Corrigé STAV Métropole–La Réunion–Antilles–Guyane septembre 2017

La calculatrice est autorisée.

L'annexe A est à rendre avec la copie

EXERCICE 1 — 6 points

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Dans un camping, on considère deux catégories de clients : les clients français et les clients étrangers. Le camping souhaite évaluer la proportion de clients satisfaits des prestations du camping.
La direction du camping réalise régulièrement des enquêtes qui lui permettent de disposer des renseignements suivants :

— Dans la région où il est implanté, le camping accueille 45 % de clients étrangers et, parmi eux, 83 % déclarent être satisfaits des prestations du camping.

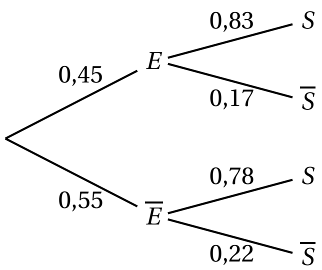
— 78 % des clients français déclarent être satisfaits des prestations du camping.

On interroge un client au hasard parmi tous ceux qui ont passé au moins une nuit au camping pendant la période de l'enquête.
On considère les évènements suivants :

— E : le client est étranger.

— S : le client est satisfait des prestations du camping.

1. Décrivons l'énoncé par un arbre de probabilités.



2. $E \cap S$ est l'événement : « le client est étranger et a été satisfait des prestations du camping. »
$p(E \cap S) = p(E) \times p_E(S) = 0{,}45 \times 0{,}83 = 0{,}3735$.

3. Montrons que $p(S) = 0,8025$. E et $\overline{E}$ formant une partition de l'univers,
$p(S) = p(E \cap S) + p\left(\overline{E} \cap S\right) = p(E) \times p_E(S) + p\left(\overline{E}\right) \times p_{\overline{E}}(S) = 0{,}3735 + 0{,}55 \times 0{,}78 = 0{,}8025$.

4. On choisit un client satisfait des prestations de ce camping.
Nous avons montré que la probabilité que la personne choisie fût étrangère et satisfaite était 0,3735. Ce résultat étant inférieur à la moitié de la probabilité que la personne soit satisfaite donc il est plus probable que la personne soit française.
Remarque : Nous aurions pu calculer $p_S(E)$ et $p_S(\overline{E})$ et comparer

PARTIE B

Dans cette partie, les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près.
On admet qu'en 2015 la proportion p de clients satisfaits des prestations du camping est de 0,8025.
Suite à la saison 2015, une enquête est réalisée sur un échantillon aléatoire (assimilable à un tirage avec remise) de 180 clients présents au camping en 2016.

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence de clients satisfaits pour cet échantillon.
On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à $0,95$ *d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, lorsque la proportion p est connue, est :*

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$n = 180 > 30 \quad np = 0{,}8025 \times 180 = 144{,}45 > 5 \quad n(1-p) = 180 \times 0{,}8025 = 35{,}55 > 5$

$$I = \left[0{,}8025 - 1,96\sqrt{\frac{0{,}8025(1-0{,}8025)}{180}}\ ;\ 0{,}8025 + 1,96\sqrt{\frac{0{,}8025(1-0{,}8025)}{180}}\right] \approx [0{,}7443\ ; 0{,}8607]$$

2. Suite à cette enquête, on a noté 151 clients satisfaits.

   La fréquence de clients satisfaits est $\dfrac{151}{180} \approx 0{,}8389$. Cette fréquence appartenant à l'intervalle de fluctuation nous pouvons considérer le fait que la proportion de clients satisfaits est, en 2016, toujours égale à 0,802 5.

EXERCICE 2 **7 points**

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,240\,]$ par

$$f(x) = -\mathrm{e}^{0,016x} + 0,32x + 44.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, donnée en **ANNEXE A**, dans un repère orthogonal.

1. Pour tout réel x de $[0\,;\,240\,]$ $f'(x) = -0{,}016\mathrm{e}^{0,016x} + 0{,}32$.
2. Résolvons sur $[0\,;\,240]$ l'inéquation $-0,016\mathrm{e}^{0,016x} + 0,32 \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
-0,016\mathrm{e}^{0,016x} + 0,32 &\geqslant 0\\
0,32 &\geqslant 0,016\,\mathrm{e}^{0,016x}\\
\frac{0,32}{0,016}\mathrm{e}^{0,016x} &\geqslant \mathrm{e}^{0,016x}\\
20 &\geqslant \mathrm{e}^{0,016x}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\ln(20) &\geqslant \ln\left(\mathrm{e}^{0,016x}\right)\\
\ln(20) &\geqslant 0,016x\\
\frac{\ln(20)}{0,016} &\geqslant x\\
62{,}5\ln(20) &\geqslant x
\end{aligned}$$

   L'ensemble solution de l'inéquation est $[0\ ;\ 62{,}5\ln(20)]$ soit environ $[0\ ;\ 187{,}2]$.

3. **a.** $f(0) = 43$, $f\left(\dfrac{\ln 20}{0,016}\right) = -\mathrm{e}^{0,016\times\frac{\ln 20}{0,016}} + 0{,}32 \times \frac{\ln 20}{0,016} + 44 = -\mathrm{e}^{\ln 20} + 20\ln 20 + 44$

   $f\left(\dfrac{\ln 20}{0,016}\right) = -20 + 20\ln 20 + 44 = 24 + 20\ln 20 \approx 83{,}9$

   $f(240) = -\mathrm{e}^{3,84} + 0{,}32 \times 240 + 44 \approx 74{,}3$.

   b. Étudions la variation de f.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

   Sur $[0\ ;\ 62{,}5\ln 20[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.

   Sur $]62{,}5\ln 20\ ;\ 240]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

   Construisons le tableau de variation de f sur $[0\,;\,240]$.

x	0		$62{,}5\ln 20$		240
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	43	$\nearrow$	$24 + 20\ln 20$	$\searrow$	$\approx 74{,}3$

4. On donne en **ANNEXE A** la représentation graphique de la fonction f.

   Résolvons graphiquement l'équation $f(x) = 80$. Traçons la droite d'équation $y = 80$ et lisons les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de f.

   Avec la précision permise par le graphique, les valeurs étant arrondies à l'unité, nous trouvons 144 ou 223. L'ensemble solution est $\{143\ ;\ 223\}$.

PARTIE B

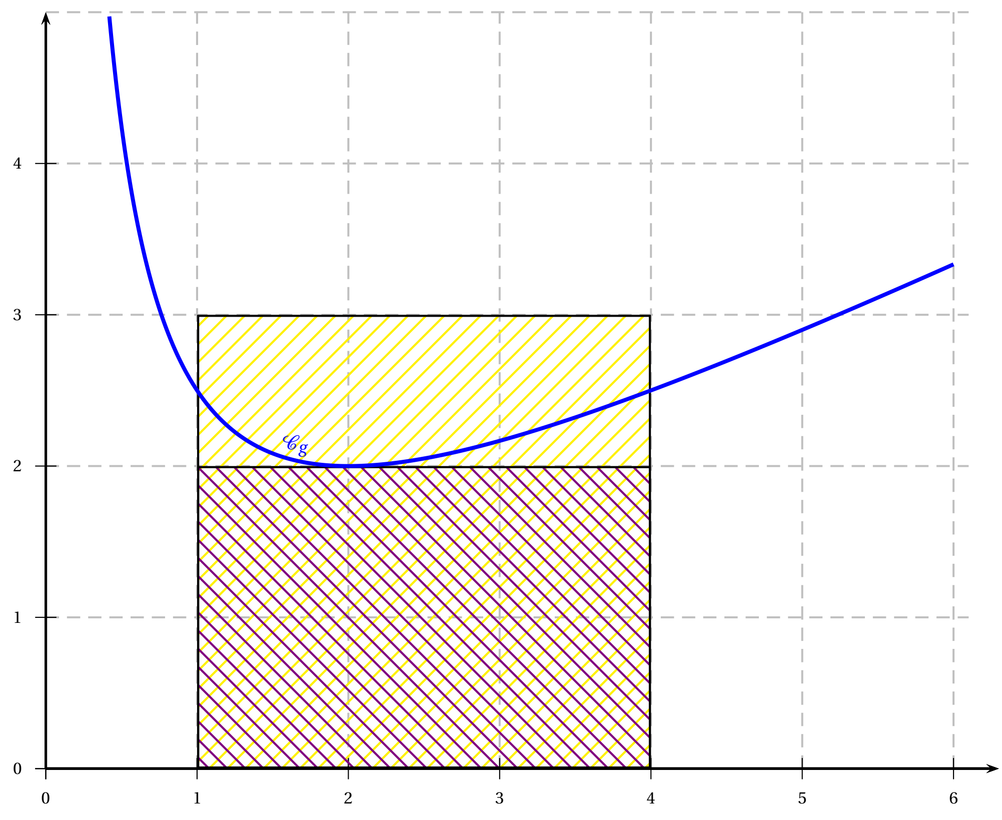
Un institut de recherche agronomique a réalisé une expérimentation sur l'évolution du rendement d'une variété de blé suivant la quantité d'azote apportée par hectare.
Ce rendement est modélisé par la fonction f étudiée dans la **PARTIE A**, avec x la concentration d'azote exprimée en kg/ha, et $f(x)$ le rendement du blé exprimé en quintaux/ha.

À l'aide des résultats de la **partie A**, répondons aux questions suivantes (les résultats sont arrondis à l'unité).

1. Le rendement du blé sans aucun apport d'azote est $f(0)$ soit 43 quintaux par hectare.
2. En utilisant le tableau de variation de la fonction f, il résulte que le rendement du blé suivant la concentration d'azote croît lorsque la concentration d'azote augmente jusqu'à une concentration d'environ 187 kg/ha mais dès que la concentration d'azote dépasse 188 kg/ha, le rendement diminue.
3. Selon ce modèle, déterminons dans quel intervalle doit se situer la concentration d'azote si l'on souhaite que le rendement soit d'au moins 80 quintaux/ha et sans apport inutile d'azote. Nous avons montré que $f(x) = 80$ pour x valant environ 144 ou 223. La courbe étant au dessus de la droite d'équation $y = 80$ entre ces valeurs, par conséquent l'intervalle à considérer est $[144~;~223]$.

EXERCICE 3 — 3 points

On pose $I = \int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$ avec g définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2}x$.
On désigne par $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé donné ci-dessous (unités graphiques : 2 cm en abscisses et en ordonnées).



1. I peut être interprétée comme l'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$. Nous pouvons remarquer, à l'aide du graphique, que cette aire est comprise entre l'aire du rectangle ayant pour longueur 3 unités et pour largeur 2 unités et l'aire du carré ayant pour longueur 3 unités. Par conséquent nous avons bien $6 \leqslant I \leqslant 9$.
2. Calculons la valeur exacte de I.
   g est une fonction continue et positive sur $[1~;~4]$. Elle admet une primitive G définie par $G(x) = 2\ln x + \dfrac{x^2}{4} + \lambda$

$$I = \int_1^4 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x = \left[2\ln x + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \left[2\ln x + \frac{x^2}{4}\right]_1^4 = 2\ln 4 + 4 - \frac{1}{4} = 4\ln 2 + \frac{15}{4}.$$

Remarque nous pouvons ainsi vérifier que I est compris entre 6 et 9.

3. En considérant que I est l'aire $\mathscr{A}$ du domaine défini supra, nous avons donc :
$\mathscr{A} = \left(4\ln 2 + \dfrac{15}{4}\right) \times 2 \times 2\ \text{cm}^2$ soit $\mathscr{A} \approx 6{,}52 \times 4\ \text{cm}^2 \approx 26{,}09\ \text{cm}^2$.

EXERCICE 4 **4 points**

Un salarié désire connaître la somme globale qu'il percevra sur dix années de travail dans la même entreprise.
La première année, son salaire annuel était de 18 000 € et chaque année il augmente de 1,2 %.
L'algorithme suivant permet de calculer la somme recherchée :

```
Variables
    N entier naturel
    U réel
    S réel
Initialisation
    U prend la valeur 18 000
    S prend la valeur 18 000
Traitement
    Pour N allant de 1 à 9
        U prend la valeur U*1,012
        S prend la valeur S+U
    Fin Pour
Sortie
    Afficher S
```

1. Le tableau est complété sur l'**ANNEXE A (à rendre avec la copie)** qui donne les valeurs de U et S calculées par l'algorithme.

2. Le salaire annuel peut être modélisé par une suite arithmétique ou géométrique. En toute logique, oui. Elle peut être modélisée par une suite géométrique de raison 1,012 puisque l'on passe d'un terme au suivant en le multipliant par ce nombre.

3. La valeur affichée par cet algorithme en sortie est 190 037,67.

4. On a modifié l'algorithme ci-dessus de deux façons différentes :

Algorithme 1 :

```
Variables
    N entier naturel
    U réel
    S réel
Initialisation
    U prend la valeur 18 000
    S prend la valeur 18 000
Traitement
    Pour N allant de 1 à 9
        U prend la valeur U*1,012
        S prend la valeur S+U
         Afficher S
    Fin Pour
```

Algorithme 2 :

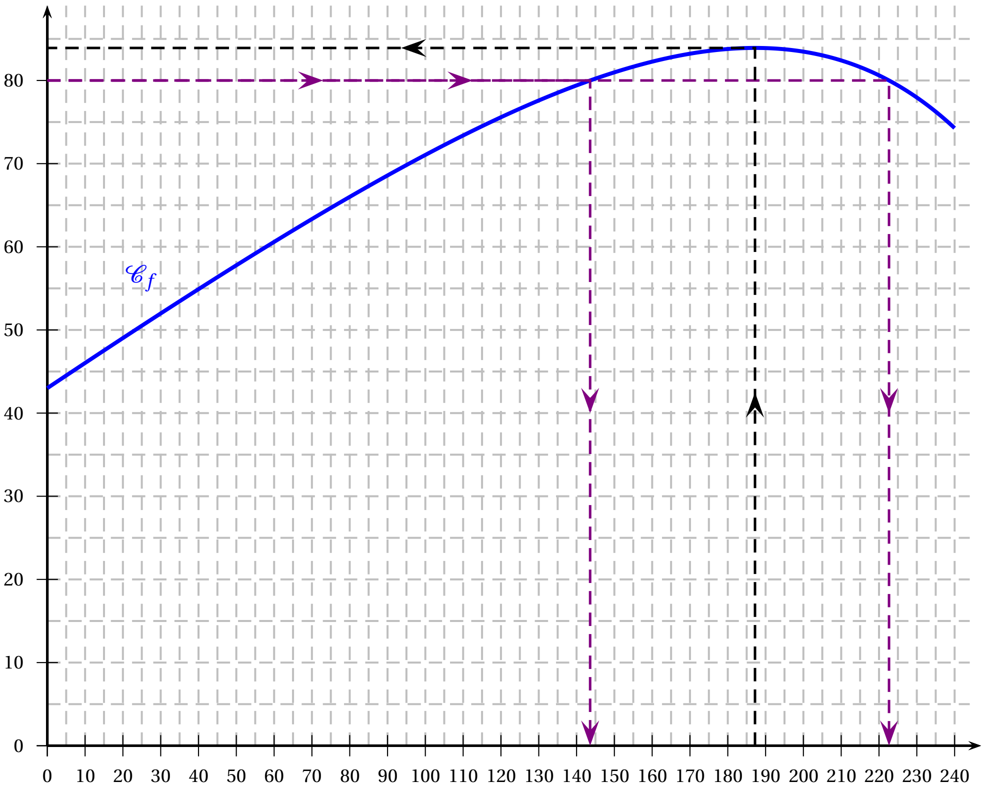
```
Variables
    N entier naturel
    U réel
    S réel
Initialisation
    U prend la valeur 18 000
    S prend la valeur 18 000
Traitement
    Pour N allant de 1 à 10
        U prend la valeur U*1,012
        S prend la valeur S+U
    Fin Pour
Sortie
    Afficher S
```

Dans le premier algorithme, les modifications n'ont pas d'incidence sur la somme recherchée puisqu'il ajoute à chaque passage dans la boucle la valeur de S. En revanche le second algorithme a une incidence sur S puisqu'il a été ajouté une boucle donc la somme affichée en sortie est celle perçue sur onze années.

Annexe A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 1

Courbe représentative de la fonction f



EXERCICE 4

Les résultats sont arrondis au cent près.

N	1	2	3	4
U	18 216	18 434,59	18 655,81	18 879,68
S	36 216	54 650,59	73 306,40	92 186,18

Rem. Vu la réponse donnée pour N=1, nous avons considéré qu'au cent [1] près signifiait au centime près et non à la centaine près, d'autant que les valeurs de U et S sont calculées par l'algorithme.

Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci.

1. nom donné au début pour les divisions de l'euro