Mathématiques

La construction du nombre

PS	Par les activités et les jeux qu'il fréquente l'enfant commence à élaborer l'idée de quantité. Celle-ci se traduit d'abord par des oppositions entre « pareil » et « pas pareil » ou entre « beaucoup » et « pas beaucoup ». Les enfants sont confrontés à des situations dans lesquelles il faut prendre autant d'objets qu'il y a de doigts montrés ou de points sur un gros dé ou dans lesquelles il faut dire le nombre associé à une petite quantité. Les premiers éléments de la comptine numérique orale peuvent déjà être mis en place, au moins jusqu'à 5 ou 6, son utilisation pour dénombrer de petites quantités commence à se développer. L'utilisation autonome des nombres relève d'actions qui ont du sens pour l'enfant et qui lui font prendre conscience que dénombrer est efficace pour retenir une quantité. Le dénombrement de petites quantités est déjà possible, les procédures peuvent varier d'un enfant à un autre : reconnaissance perceptive ou comptage un par un. Tous les enfants ne sont pas encore capables de reconnaître que le dernier mot énoncé lors du comptage exprime la quantité toute entière. L'apprentissage reste principalement centré sur l'oral.
MS	Pour comparer deux collections ou pour réaliser une collection qui a autant d'objets qu'une collection éloignée, l'enfant peut utiliser des procédures variées : - estimation, pour des quantités nettement différentes ; - image mentale globale, pour de très petites collections ; - recours à une collection intermédiaire (doigts, dessin) ; - partition de la collection en sous-collections facilement dénombrables ; - expression de la quantité par un mot-nombre. La comptine orale des nombres peut être étendue de façon importante au moins jusqu'à 12. L'usage de la suite des nombres pour le dénombrement de collections se met progressivement en place au cours d'activités dans lesquelles le déplacement des objets est possible pour être sûr de ne pas oublier ou de ne pas en compter plusieurs fois. Dans toutes les activités : - la taille des collections, - le fait de pouvoir ou de ne pas pouvoir déplacer les objets, - le fait d'avoir à anticiper la réponse (à cause de l'éloignement par exemple) sont des variables importantes que l'enseignant peut modifier pour amener les enfants à faire évoluer leurs procédures de résolution.
GS	Le nombre devient un outil de contrôle des quantités : - pour en garder la mémoire ; - pour s'assurer qu'une distribution ou un partage est équitable ; - pour décider qui en a le plus ; - pour rapporter juste ce qu'il faut dans les cas d'éloignement ; - pour construire une collection qui a autant d'objets qu'une collection de référence. Cet usage des nombres nécessite de connaître la comptine orale suffisamment loin : 30 est l'objectif à atteindre en grande section. La plupart des enfants sont capables non seulement de maîtriser la suite orale, mais aussi d'en acquérir une maîtrise qui la rend opératoire pour résoudre des problèmes : - comptage en avant et en arrière ; - comptage à partir d'un autre nombre que 1 (surcomptage) ; - récitation de la suite d'un nombre donné jusqu'à un autre nombre fixé à l'avance. Le nombre devient ainsi un outil utilisable pour : - effectuer un dénombrement ; - repérer des positions ; - mémoriser le rang d'une personne ou d'un objet dans un alignement ; - résoudre des problèmes portant sur des quantités ou sur les positions sur une bande numérotée. Les jeux permettent une première mise en relation des mots-nombres avec leur « image-chiffrée », l'élaboration d'une bande numérique par l'enfant lui permet de contrôler l'avancée de sa connaissance de la comptine orale et : - de retrouver l'écriture chiffrée d'un nombre « dit » ; - de l'écrire en respectant le sens des tracés ; - de dire un nombre donné par son écriture chiffrée.

La numération

Connaître les nombres entiers naturels

La capacité grouper-échanger peut être travaillée en classe avec différents matériels : objets en nombre, boîtes, abaques, cartes à ponts ou monnaie.

<u>Les objets en nombres</u>

Dans les pratiques de dénombrement, on pourra utiliser des objets en nombre (haricots, allumettes, jetons, pailles, etc. …) pour montrer l'utilité de grouper.

<u>Exemples</u> :

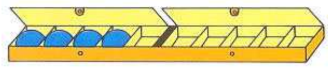
- L'élève fera des paquets d'allumettes puis comptera : deux paquets de dix et trois allumettes par exemple (au lieu de compter jusqu'à vingt-trois ce qui peut être long et source d'erreurs).
- L'élève rangera des haricots dans des boîtes et comptera : deux boîtes de dix haricots et trois haricots par exemple.

On écrira le résultat du dénombrement ainsi effectué en instituant des règles de position : les paquets d'abord puis les unités.

<u>Les boîtes</u>

Comme on vient de le voir, les boîtes sont souvent utilisées pour accueillir des paquets d'objets et symboliser une dizaine, une centaine, etc. …

Parmi ces boîtes, on trouve les boîtes de Picbille.



© Éditions RETZ, 1991.

L'élève peut y ranger des jetons alignés. Il pourra fermer la boîte à moitié quand elle contiendra 5 jetons, et totalement quand elle en contiendra 10.

Ce matériel permet de travailler :

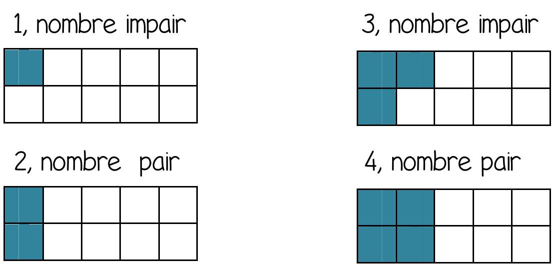
- Le groupement par cinq et par 10 ;
- L'échange « 10 contre 1 » ou « valeur contre une autre valeur » : une boîte contient 10 jetons, dix jetons font une dizaine, la boîte symbolise cette dizaine.

<u>Les cartes à points</u>

Ces cartes répondent à plusieurs préoccupations, la première étant la construction du nombre. Elles proposent aux élèves une première représentation du nombre en utilisant des **constellations** qui permettent de visualiser aisément les valeurs sans avoir à les dénombrer. Une constellation est un groupe d'éléments disposés de manière à former une représentation symbolique et normative d'un nombre donnée. Par exemple, le dé utilise six constellations.

<u>Exemple</u> :

Cette manière d'organiser les collections, par groupes de deux, permet à l'élève, sans dénombrer, par simple reconnaissance global de savoir si le nombre représenté est pair ou impair.



Les cartes à points permettent également d'aborder les principes fondamentaux de la numération décimale de position, c'est-à-dire les groupements par paquets de dix et l'échange : l'élève passe du groupement par paquets de dix à la dizaine puis à la centaine.

<u>Exemples</u> :

Les abaques :

Un abaque est constitué d'un support comportant trois ou quatre tiges verticales sur lesquelles peuvent glisser des anneaux, chaque tige ne pouvant accueillir que 10 anneaux.

La première tige (en partant de la droite) représente les unités, la deuxième tige les dizaines, la troisième tige les centaines, etc. … Une tige remplie pourra être vidée de ses anneaux, ces anneaux étant transformés en un anneau supplémentaire sur la tige suivante.

Les abaques permettent d'illustrer les groupements par paquets et le passage à la dizaine, la centaine, etc. … Ils permettent également de comprendre de quoi se décompose le nombre et l'importance de la position dans la valeur d'un chiffre.

La monnaie :

L'étude et l'utilisation de la monnaie constituent un excellent support de travail pour toutes les problématiques de numérations, notamment en fin de cycle 2 et en début de cycle 3, dont la capacité « Faire des groupements / faire des échanges » et la compétence qui lui est liée « Comprendre la valeur du chiffre selon sa position ».

Les pièces :

Les billets :

Exemple :

Le jeu de la marchande permet aux enfants de se familiariser avec les pièces et les billets en usage, mais aussi d'appréhender la notion de « 10 contre 1 », « 1 contre 5 », etc. … Cinq pièces de 1 € peuvent être échangées contre un billet de 5 € ou un livre surmonté de l'étiquette de 5 euros.

Connaître la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres

C2

Cette compétence n'est pas exigible mais elle fait partie manière implicite de la compétence générale « Connaître les nombres inférieurs à 1000 ».

Une première approche de cette compétence implicite au cycle 2 se fait par les activités de groupements-échanges. En effet, au cycle 2, avant d'entrer dans les problématiques de numération proprement dite, l'usage du nombre par les élèves est référé essentiellement à l'idée de quantité. Le nombre 2 par exemple réfère à l'idée de 2 objets ou 2 unités.

A partir du CP, dans le contexte de la monnaie, par exemple, on rencontre une pièce sur laquelle est écrit le nombre 2, nombre qui se réfère alors à une valeur. Les activités de regroupements (avec des matériels variés) seront privilégiées par rapport à celles faisant intervenir des échanges qui sont plus difficile pour beaucoup d'élèves, dans la mesure où elles nécessitent une prise en conscience de la distinction entre valeur et quantité.

Les élèves du CP sont réticents à échanger, par exemple, deux pièces de 1 euro dont une pièce de 2 euros. Ce qui fait nombre, pour eux, c'est d'abord la quantité. Le travail avec la monnaie offre, en fin de cycle, un contexte favorable à une première pratique des échanges, en particulier « dix contre un » (10 pièces de 1 € contre 1 billet de 10 € ou 10 pièces de 1 centimes contre 1 pièce de 10 centimes).

Pour aider à la compréhension de l'idée d'échange, d'autres situations sont proposées (5 pièces de 1 € contre 1 billet de 5 €, par exemple). Toutes ces activités contribuent également à une première connaissance des pièces et billets en usage.

L'acceptation de la validité de tels échanges, basée sur la notion de valeur, ne se fait que progressivement au cours du cycle 2.

C3

La valeur des chiffres doit être constamment envisagée en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent. Les mots dizaines, centaines, milliers … sont employés comme synonymes et reformulés sous la forme de « paquets » de 10, de 100, de 1000 …

Exemples :

- Dans 5324, le 3 signifie 3 paquets de 100, c'est-à-dire 300 ou encore 3 centaines (et non 3 unités) ;
- Dans 8926, il y a 89 paquets de 100 ou 892 paquets de 10.

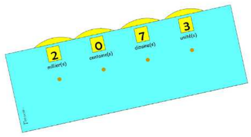
Les formulations du type « combien y a-t-il de paquets de 10 dans 8926 ? » accompagnent celles comme « quel est le nombre de dizaines dans 8936 ? ».

Dans cette perspective, il convient d'éviter les activités formelles et l'utilisation trop systématique du tableau de numération.

La capacité à connaître la valeur d'un chiffre en fonction de sa position dans l'écriture d'un nombre, en relation avec l'évocation de groupements, constitue un objectif essentiel. Cette étude constitue une priorité concernant la maîtrise des nombres et elle ne doit pas être subordonnée aux difficultés lexicales : on peut comprendre l'écriture d'un nombre comme 76 (interprété comme 7 paquets de 10 et 6 unités) sans pour autant savoir le nommer « soixante-seize ».

Supports possibles :

Le compteur



On l'utiliser notamment pour ce qui concerne le passage à la dizaine, mais aussi pour déterminer le prédécesseur et le successeur d'un nombre, ce qui amène à l'écriture d'une suite ordonnée de nombres, croissante et décroissante.

Exemple :

Sur le compteur : le nombre suivant 0079 s'obtient en tournant d'une unité la roue des unités (on fait apparaître alors le chiffre 0). Le passage de 9 à 0 a pour effet de faire avancer la roue 2 (chiffre des dizaines) d'un cran également, on a alors 7 + 1, soit une dizaine supplémentaire.

Les cartes à points

Elles permettent de visualiser le passage de l'unité à la dizaine : dix unités au recto, une dizaine au verso, de la dizaine à la centaine : dix dizaines au recto, une centaine au verso, etc. …

Contrairement au compteur, qui utilise la notion d'ordre, de suite, les cartes font appel à des transformations de quantité. Les passages unités-dizaines ou centaines-unités sont étudiés de deux façons différentes.

Le tableau de numération

Il permet de travailler les notions de position de manière plus abstraite que les cartes ou le compteur. L'élève utilise le tableau pour écrire les nombres et les décomposer en centaines, dizaines, unités.

Exemple : Tableau de numération

Millions			Milliers			Unités		
c	d	u	c	d	u	c	d	u
							1	5
							5	1
						2	8	0
							2	8
							8	2

L'élève en notant 15 et 51 dans ce tableau se rend compte que, dans 15, il y a une dizaine et 5 unités et que, dans 51, il y a 5 dizaines et 1 unité. Dans 28, il y a 2 dizaines et 8 unités quand, dans 82, il y a 8 dizaines et 2 unités.

Le nombre 280 comporte lui deux centaines et huit dizaines.

Le tableau à double entrée

Certaines progressions utilisent un tableau à double entrée pour organiser l'écriture des nombres jusqu'à 100 et instituer ainsi les règles de position en lien avec la manière d'oraliser les nombres.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Première ligne	10	11	12	13						
Deuxième ligne	20	21								
Troisième ligne					34					
Quatrième ligne, etc. …							46			

La monnaie

La monnaie est un excellent support pour introduire auprès des élèves les facilités que permet le groupement par 10 dans les activités de dénombrement. Elle permet également de sensibiliser les élèves au problème de la valeur dans les pratiques d'échange et d'achat.

Savoir écrire et nommer les nombres entiers

C2

<u>Jusqu'à 1000</u> :

Alors que la compréhension de la valeur prise par un chiffre en fonction de sa position peut être assurée simultanément pour tous les nombres de deux chiffres, la maîtrise de leur lecture usuelle ne peut se faire que progressivement. On acceptera donc de travailler avec des nombres que l'on ne sait pas encore lire.

Les difficultés de lecture des nombres de deux chiffres sont connues :

- la tranche de 1 à 9 est à mémoriser ;
- la tranche de 20 à 59 est plus régulière, la mémorisation de la suite « vingt, trente, quarante, cinquante » constitue un appui efficace ;
- ensuite, il convient d'étudier simultanément les nombres de la tranche dont le nom commence par « soixante » (de 60 à 79), puis ceux de la tranche de nombres dont le nom commence par « quatre-vingts » (de 80 à 99) ; ces deux tranches ne seront maîtrisées (à l'oral) par beaucoup d'élèves qu'en dernière année de cycle 2. Les différences importantes entre les numérations écrite et orale sont cause de difficultés d'enseignement et d'apprentissage.

De 1 à 9 :

Les pratiques sont identiques dans l'une et l'autre numération, chaque nouveau nombre est désigné par un nouveau chiffre ou un nouveau mot.

De 10 à 20 :

<u>Dans le registre de la numération décimale de position (écrite chiffrée)</u> :

a. Nécessité de l'introduction du zéro :

Jusqu'en GS, la bande numérique commence à 1.

Au CP, on introduit le zéro pour indiquer l'absence de quantité à la une place donnée mais aussi comme origine dans les activités de mesurage, c'est pourquoi au CP la bande numérique commence à 0 ;

b. Utilisation de la position comme expression de la valeur d'un chiffre dans l'écriture d'un nombre : 12, c'est 1 paquet de 10 et 2 unités.

<u>Dans le registre de la numération orale (ou écrite littérale)</u> :

a. De « dix » à « seize » inclus : à chaque nouveau nombre correspond un nouveau mot. Il y a un décalage dans les usages entre les deux numérations utilisés ;

b. De « dix-sept » à « dix-neuf » inclus : on réutilise des mots déjà rencontrés selon des règles propres à cette numération hybride (position et addition). Le décalage entre les deux numérations est moins important : « dix-sept » signifie 1 paquet de 10 et 7 unités.

De 20 à …

Certaines progressions découpent la bande numérique de 10 en 10, en s'appuyant sur la régularité de la numération de position. D'autres proposent le découpage suivant :

- de 20 à 59 : régularité dans l'écriture et l'oralisation ;
- de 60 à 79 : la famille des « soixante » ;
- de 80 à 99 : la famille des « quatre-vingts ».

Les nombres de trois chiffres peuvent ensuite être lus sans difficulté particulière en insistant sur le fait qu'il faut, pour cela, grouper les chiffres des dizaines et des unités : 375 se lit en isolant le chiffre 3 (trois cents) et le groupe 75 (soixante-quinze).

L'écriture littérale des nombres doit être introduite très progressivement, lorsque les désignations orales sont bien maîtrisées et en apportant aux élèves les aides nécessaires pour les difficultés orthographiques.

C3

<u>**Jusqu'au milliard en passant par le million**</u> :

Les connaissances relatives à la désignation orale, littérale ou chiffrée des nombres entiers naturels, comme celles relatives à l'ordre sur ces nombres, doivent être bien maîtrisées à la fin de l'école primaire car elles sont indispensables à la poursuite des apprentissages au collège. Elles sont complétées par une première approche de leur structuration arithmétique, caractérisée par la maîtrise de certaines relations entre les nombres, approche qui sera approfondie au collège.

Ces connaissances ne doivent pas fonctionner uniquement pour elles-mêmes. Elles doivent, le plus souvent, être envisagées en relation avec des activités de résolution de problèmes : dénombrement, mesurage, graduation …

Au cycle 3, l'association « désignation orale – désignation écrite en chiffre » se fera pour des nombres allant jusqu'à la classe des millions, voire des milliards en CM2.

Exemples :

- 59 246 789 se lit 56 millions 246 mille 789.
- Cent sept millions cinquante-trois mille cent trente-quatre s'écrit 107 053 134.

L'intérêt d'un découpage en tranche de trois chiffres pour la lecture usuelle des nombres (fondée sur les classes : milliers, millions, milliards …) est souligné et les difficultés inhérentes à l'écriture en chiffres des nombres ayant un ou plusieurs zéros intermédiaires font l'objet d'une attention particulière.

Comparer, ranger, encadrer des nombres entiers naturels

C2

La compréhension de l'ordre (savoir quel est le plus petit ou le plus grand nombre, savoir ranger des nombres) précède l'utilisation des symboles < ou >, dont la maîtrise n'est pas un objectif du cycle 2. Ces symboles peuvent cependant faire l'objet d'une première approche, leur usage conjoint avec celui du signe = pouvant aider à concevoir ce dernier comme signe d'une égalité entre deux écritures et pas seulement comme annonce d'un résultat.

On s'attachera à mettre en relation comparaison des nombres et signification des écritures chiffrées : 54 est plus grand que 37 parce que dans 54, il y a 5 paquets de 10 et qu'il y en a seulement 3 dans 37.

C3

La compréhension de l'ordre (savoir quel est le plus petit ou le plus grand nombre, savoir ranger des nombres) doit précéder l'utilisation des symboles < ou >. Le vocabulaire « inférieur à, supérieur à » commence à être utilisé en même temps que « plus petit, plus grand ».

L'usage simultané des symboles =, < et > pour rendre compte de la comparaison d'écritures arithmétiques permet de renforcer la signification mathématique du symbole d'égalité. Au cours de l'apprentissage, les procédures de comparaison font l'objet d'une explication par les élèves.

Exemples :

- 650 < 658 < 660 mais aussi 600 < 658 < 700.
- 4 800 < 4 862 < 4 900 mais aussi 4 800 < 4 862 < 5 000.

Ecrire une suite de nombres dans l'ordre croissant et décroissant

C2

Les régularités des suites de nombres écrits en chiffres peuvent être mises en évidence par l'utilisation de compteurs ou de calculatrices (suites obtenues par des séquences « +1 », « -1 », « +10 », « -10 », « +100 », « -100 »).

Un apprentissage essentiel en début de cycle 2 est celui qui consiste à considérer que « ajouter 1 » (ou « retrancher 1 ») et dire ou écrire le nombre suivant (ou précédent) donnent le même résultat.

C3

Cette compétence s'affine et se précise. L'élève doit être capable de produire cette suite à partir de n'importe quel nombre et sur un champ numérique plus étendu, de l'ordre du million ou du milliard.

Il s'agit de mettre en évidence les régularités des suites de nombres écrits en chiffres (en liaison, par exemple, avec le fonctionnement d'un compteur) ainsi que les régularités et les accidents des suites de nombres dits oralement.

La production des suites de nombres (écrits en chiffres) de 10 en 10, 100 en 100 … doit être mise en relation avec les effets d'ajouts successifs de 10 (ou d'une dizaine), de 100 (ou d'une centaine) … A partir de ces activités les élèves peuvent commencer à envisager le caractère infini de ces suites.

Repérer et placer des nombres entiers sur une droite graduée

C2

On travaillera avec des lignes graduées de 1 en 1, de 10 en 10 ou de 100 en 100. On fera également le lien avec la suite des nombres : dans un livre, la page 54 se trouve après la page 37, ou, en avançant de 1 en 1 avec un compteur, on rencontre 37 avant de rencontrer 54.

Ces activités sont l'occasion d'une toute première approche de l'ordre de grandeur des nombres : 376 est situé entre 300 et 400, mais plus près de 400 que de 300. Cette compétence sera utile, au cycle 3, pour le travail sur le calcul approché.

C3

Exemples :

- Pour placer exactement 450, on peut utiliser le fait qu'il se situe à « mi-chemin » entre 400 et 500.
- Pour placer approximativement 276, on peut utiliser le fait qu'il est plus près de 300 que de 200.

Le placement précis nécessite des compétences relatives à la proportionnalité : les distances entre deux nombres sont proportionnelles aux écarts (différences) entre les deux nombres. Le placement approché permet de développer des compétences qui seront utiles pour le calcul approché (approximation des nombres).

L'utilisation d'une frise historique peut également être l'occasion d'activités de placement approché.

Structure additive : addition et soustraction

Les problèmes dont la structure relève de l'addition ou de la soustraction peuvent être rangés sous l'appellation « problèmes de structure additive » dans la mesure où, la soustraction peut être définie comme l'addition étendue dans Z (soustraire équivaut à additionner l'opposé).

Les apprentissages du domaine « structure additive », addition et soustraction des entiers, concernent plus particulièrement le cycle2. Au cycle 3, les apprentissages du cycle 2 seront approfondis (sur des nombres plus importants par exemple) et prolongés (aux décimaux notamment). Les structures des problèmes proposés aux élèves seront de plus en plus complexes.

Connaître les doubles et moitiés des nombres d'usage courant

Au cycle 2, les nombres étudiés sont essentiellement structurés par la connaissance des règles de la numération décimale et la capacité à les ranger en ordre croissant ou décroissant.

La structuration arithmétique, appuyée sur des relations additives ou multiplicatives entre nombres, ne fait l'objet que d'une première approche. Elle sera approfondie au cycle 3, en même temps que s'enrichiront les compétences dans le domaine du calcul.

La connaissance de certains doubles, joue en rôle important sur le calcul mental.

Mémoriser et utiliser les tables d'addition

La capacité à donner très rapidement (quasi instantanément) les résultats des tables d'addition et à les utiliser pour fournir des compléments et des différences nécessite un long apprentissage.

Pour les tables d'addition, certains élèves parviennent à mémoriser l'ensemble des résultats alors que d'autres n'en mémorisent qu'une partie et se dotent de moyens pour reconstruire très rapidement les autres résultats, en s'appuyant sur des résultats connus.

Pour élaborer cette compétence essentielle, l'entraînement et la répétition ne suffisent pas. Au départ, la plupart des résultats sont reconstruits par les élèves, en s'appuyant sur le sens de l'addition et de la soustraction puis, de plus en plus fréquemment, sur des résultats déjà maîtrisés.

Durant cette phase, la construction d'un répertoire additif par les élèves en facilite la compréhension. La mise en place de points d'appui constitue un objectif important : utilisation des doubles, de la commutativité de l'addition (3 + 8 c'est comme 8 + 3), des compléments à 10, etc. …

Effectuer un calcul posé

Addition et soustraction sont des termes génériques recouvrant à la fois l'écriture mathématique (additive et soustractive) et les procédés de calcul propres à chacune de ces opérations. Il serait illusoire de penser que les élèves développeront les mêmes capacités dans le calcul des soustractions que dans le calcul des additions.

L'acquisition de capacités dans le calcul de soustractions se fait de manière plus lente et s'appuie largement, pour progresser, sur les capacités acquises dans le calcul d'additions (« si je sais que 5 + 4 = 9, alors je peux accéder au fait que 9 – 5 = 4 »), mais le saut à faire pour passer de l'un à l'autre avec aisance prend du temps.

<u>Addition</u> :

A la fin du cycle 2, la technique opératoire de l'addition est exigible, qu'elle soit traitée en ligne ou en colonnes, la présentation en colonnes n'étant qu'une organisation spatiale facilitant le repérage des chiffres de même rang. La technique utilisée doit être justifiée (notamment le principe de la retenue), en référence aux connaissances sur la numération.

<u>Soustraction</u> :

Au cycle 2, les élèves sont confrontés à des calculs de différences. Ils les traitent par un calcul réfléchi écrit, par exemple en décomposant les nombres, en s'appuyant sur une droite numérique ou en utilisant la technique opératoire pour les nombres inférieurs à 100.

Calculer mentalement des sommes, des différences

Au cycle 2, le calcul réfléchi (mental ou aidé par des traces écrites) occupe la place principale.

Les procédures utilisées sont explicitées et font l'objet d'échanges entre les élèves. C'est l'occasion d'insister sur la diversité des procédures utilisables pour traiter le même calcul.

Du point de vue du calcul réfléchi mental, quelques types de calcul constituent des objectifs importants :

- Additionner ou soustraire des dizaines ou des centaines entières ;
- Additionner ou soustraire un nombre à un chiffre à un nombre donné ;
- Déterminer les compléments à 100.

Exemples :

- Le résultat de 27 + 13 peut être obtenu en décomposant chaque nombre ou en ajoutant successivement 10 puis 3 à 27 (ou 3, puis 10).
- Le résultat de 87 – 33 peut être obtenu en retranchant 30 puis 3 à 87.

Utiliser les fonctions de base de la calculatrice

Dans la mesure où les calculatrices sont maintenant largement disponibles en dehors de l'école, une première initiation à leur utilisation est envisageable dès le cycle 2. Cela ne signifie pas qu'elles sont toujours disponibles. Il appartient à l'enseignant de décider des occasions où leur usage est pertinent, de manière à ne pas gêner les apprentissages dans le domaine du calcul (notamment du calcul mental).

Produire et reconnaître les décompositions additives

Concernant l'addition et la soustraction, il est souhaitable que les écritures « a + b » et « a – b » soient dès le départ travaillées simultanément pour éviter que l'écriture « a + b » ne soit utilisée de façon automatique, car étant la seule disponible.

Cela devrait permettre d'éviter que les élèves réduisent la résolution de ces opérations à « faire un plus », comme ils l'expriment parfois.

Les problèmes de structure additive peuvent être classés selon quatre catégories, ce qui permet de bien comprendre et bien mémoriser les attendus des programmes (ces quatre catégories sont le fait d'un pédagogue, Gérard Vergnaud).

- **Les problèmes de transformation**

On peut modéliser la structure de ces problèmes selon la méthode utilisée à l'école primaire :

ETAT INITIAL — *transformation (positive ou négative)* → ETAT FINAL

Dans les problèmes de transformation, on peut être amené à déterminer :

- l'état initial d'une situation,
- l'état final d'une situation,
- la transformation d'une situation.

Recherche de l'état final :

Dans des situations où une quantité (ou une valeur) subit une diminution ou une augmentation, on cherche à déterminer **la quantité (ou la valeur) finale**.

Exemple :

Rémi arrive à l'école avec un sac de dix billes. A la récréation, il joue aux billes et il en gagne (il en perd) cinq.

Combien de billes Rémi a-t-il maintenant dans son sac ?

Ces problèmes doivent être résolus selon une procédure experte dès la fin du cycle 2.

Pour résoudre le problème ci-dessus, l'élève écrit : 10 + 5 = … (ou 10 – 5 = …), puis il calcule : 10 + 5 = 15 (ou 10 – 5 = 5).

Recherche de l'état initial :

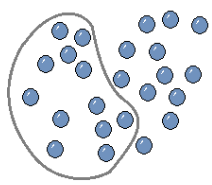
Dans des situations où une quantité (ou une valeur) subit une augmentation ou une diminution, on cherche à déterminer **la quantité (ou la valeur) initiale**.

Exemple :

Rémi a joué aux billes à la récréation et il a gagné (ou perdu) 12 billes. Il a maintenant 24 billes.

Combien Rémi avait-il de billes lorsqu'il est arrivé à l'école ?

Ces problèmes ne seront résolus selon des procédures expertes qu'au cours du cycle 3. Au cycle 2, les élèves résolvent ce type de problèmes en mobilisant des procédures personnelles.



Au cycle 2, les élèves résoudront le problème ci-dessus en utilisant une schématisation puis un comptage.

1. Il rassemblerait les 12 billes gagnées.
2. En comptant les billes restantes, il trouve le nombre de billes initial : 12

Recherche de la valeur de transformation

Dans des situations où une quantité (ou une valeur) subit une augmentation ou une diminution, on cherche à déterminer **la valeur de l'augmentation ou de la diminution**.

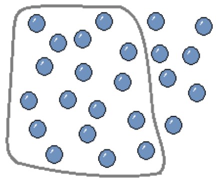
Exemple :

Rémi est arrivé ce matin à l'école avec 24 billes. Il repart chez lui le soir, avec 17 billes.

Combien Rémi a-t-il perdu de billes ?

Ces problèmes ne seront résolus selon des procédures expertes qu'au cours du cycle 3. Au cycle 2, les élèves résolvent ce type de problèmes en mobilisant des procédures personnelles.

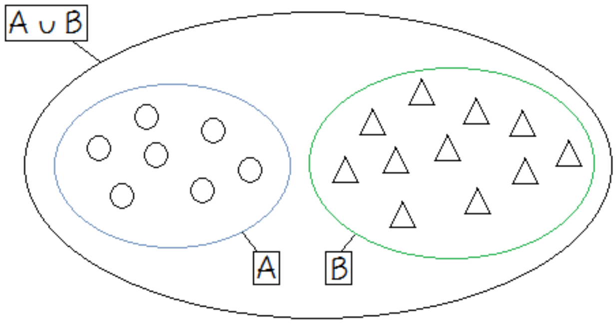
Un élève de cycle 2 procèderait par schématisation et comptage pour résoudre le problème de l'exemple ci-dessus :



1. Il dessinerait les 24 billes du matin.
2. Il rassemblerait les 17 billes du soir.
3. Il compterait les billes restantes soit 7, correspondant aux billes perdues.

- Les problèmes de réunion

On peut modéliser la structure de ces problèmes de la manière suivante :



Card A ∪ B = Card A + Card B

Dans cette catégorie de problèmes, on peut être amené à déterminer :
- Le cardinal de A ∪ B ;
- Le cardinal d'une des parties du tout (Card A ou Card B).

Recherche du cardinal de l'ensemble (Card A U B)

Dans des situations où deux quantités (ou deux valeurs) sont réunies, on cherche à déterminer la quantité (ou la valeur) totale.

Exemple :

Dans un vase, il y a 6 roses et 8 tulipes.

Combien y a-t-il de fleurs dans ce vase ?

Ces problèmes doivent être résolus selon une procédure experte dès la fin du cycle 2.

Recherche du cardinal d'une des parties (Card A ou Card B)

Dans des situations où deux quantités (ou valeurs) sont réunies, on cherche à déterminer l'une des quantités (ou l'une des valeurs).

Exemple :

Dans un vase, il y a 35 fleurs, des marguerites et des tulipes. Il y a 17 tulipes.

Combien y a-t-il de marguerites dans ce vase ?

Ces problèmes ne seront résolus selon des procédures expertes qu'au cours du cycle 3. Au cycle 2, les élèves résolvent ce type de problèmes en mobilisant des procédures personnelles.

Le problème ci-dessus est un problème de recherche du complément.

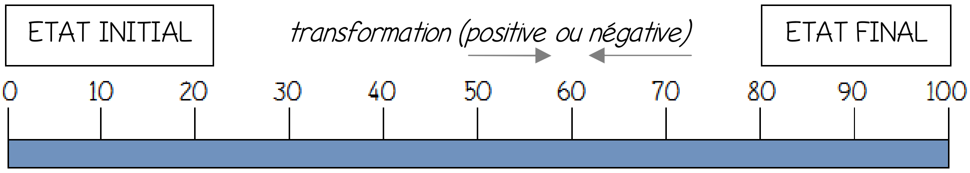
Il peut se traduire par deux types d'écriture mathématique :
- Une addition à trou : 17 + … = 35 ;
- Une soustraction : 35 – 17 = …

La procédure experte est le calcul de la soustraction, on la retrouve en cycle 3.

Certains élèves, notamment en cycle 2, pourront :
- Surcompter de 17 à 35 ;
- Schématiser la situation et compter.

- **<u>Les problèmes de repérage sur une droite graduée</u>**

On peut modéliser ces problèmes de la même manière que les problèmes de transformation, seul le contexte change : les états initiaux et finaux sont des positions.



✓ Les problèmes de repérage peuvent consister à chercher la **position finale** après un déplacement, problème pouvant être résolu selon une procédure experte dès la fin du cycle 2.

<u>Exemple :</u>

Au jeu des petits chevaux, un des cavaliers est sur la case 16. En lançant son dé, il obtient 4. Sur quelle case arrivera-t-il ?

Un élève de cycle 2 pourra résoudre ce problème en utilisant la procédure experte : 16 + 4 = 20.

✓ Ils peuvent aussi consister à chercher la **position initiale** ou la **valeur du déplacement** : on cherchera à déterminer une position initiale sur une ligne graduée, avant la réalisation d'un déplacement (en avant ou en arrière) pour atteindre une position donnée, ou à déterminer la valeur de ce déplacement.

Ces problèmes ne seront résolus selon des procédures expertes qu'au cours du cycle 3. Au cycle 2, les élèves résolvent ce type de problèmes en mobilisant des procédures personnelles.

<u>Exemple :</u>

Au jeu des petits chevaux, un des cavaliers arrive sur la case 24 après avoir obtenu 6 à son lancer de dé. De quelle case est-il parti ?

Pour résoudre ce problème, les élèves peuvent utiliser la bande numérique avec curseur qu'ils déplaceront en arrière de six cases.

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
		6	5	4	3	2	1			

- **<u>Les problèmes de comparaison d'état</u>**

Dans des situations où deux situations (ou deux valeurs) sont comparées, on cherche à déterminer **l'une des quantités (ou l'une des valeurs) ou le résultat de la comparaison**.

<u>Exemple :</u>

Rémi a cinq ans de moins que son grand frère Julien. Julien a 16 ans. Quel âge a Rémi ?

En utilisant la bande numérique avec curseur et en décomptant, un élève de cycle 2 peut résoudre ce problème :

10	11	12	13	14	15	16
	5	4	3	2	1	

Ces problèmes ne seront résolus selon des procédures expertes qu'au cours du cycle 3. Au cycle 2, les élèves résolvent ce type de problèmes en mobilisant des procédures personnelles.

Maîtriser les techniques de calcul : posé, en ligne, mental et instrumenté.

Les programmes préconisent l'enseignement de plusieurs procédés de calcul utilisant chacun des connaissances et des techniques différentes.

A la fin du cycle 2, les élèves doivent maîtriser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1000).

- <u>Le calcul mental</u>

Ce mode de calcul qui n'autorise aucune trace écrite utilise :

- La connaissance des « tables d'addition » ;
- Les nombreuses relations arithmétiques entre les entiers naturels, comme les doubles et les moitiés des nombres d'usage courant ;
- Les propriétés de l'addition : associativité et commutativité.

Calcul mental au cycle 2 :

Addition :

Exemple :

On propose au CP ou au CE1 le calcul mental de 8 + 7, lorsque les élèves n'ont pas encore mémorisé de manière automatique ce résultat. Assez fréquemment, les élèves recourent au surcomptage à ce stade :

- Soit mentalement ;
- Soit en utilisant la collection témoin de leurs doigts.

Ils s'expriment alors parfois ainsi : « Je mets 8 dans ma tête (ou sur mes doigts) et 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. »

L'enjeu est de permettre aux élèves de dépasser ce type de procédures pour entrer dans des procédures de calcul.

On peut pour cela leur enseigner le procédé suivant :

1. Utiliser la décomposition additive de 8 (associativité de l'addition) : 8 + 7 = 7 + 1 + 7
2. Utiliser la commutativité : 8 + 7 = 7 + 7 + 1
3. Utiliser à nouveau l'associativité : 8 + 7 = (7 + 7) + 1
4. Déterminer ensuite le double de 7, résultat mémorisé (connaissance des doubles numériques) : 8 + 7 = 14 + 1
5. Déterminer enfin le successeur du double de 7 (faire + 1) sur la bande numérique : 8 + 7 = 15.

Soustraction :

Le calcul mental de soustraction est particulièrement délicat au cycle 2. C'est pourquoi il est préférable de laisser aux élèves l'usage d'outils comme la bande numérique affichée dans la salle de classe.

Exemple :

Pour « calculer » 17 - 9 en cycle 2, les élèves vont d'abord « décompter » en utilisant la bande numérique : 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8.

Ce n'est que petit à petit qu'ils pourront recourir à des procédés de calcul comme « Retirer 9, c'est retirer 10 et ajouter 1 », d'où le procédé de calcul mental : 17 – 9 = 17 – 10 + 1 = 7 + 1 = 8.

Calcul mental au cycle 3 :

Addition :

Au cycle 3, les élèves doivent avoir mémorisé tous les résultats des « tables d'addition ». Les calculs proposés dans ce cycle portent par exemple sur l'addition de deux nombres à deux chiffres.

Exemple :

Soit le calcul de 27 + 14, proposé en CE2 ou CM1.

L'enseignant peut proposer ce procédé de résolution à ses élèves :

1. Utiliser l'associativité de l'addition, faire la décomposition additive de 14 :
   27 + 14 = 27 + 3 + 11 ;
2. Faire le complément de 27 à la dizaine immédiatement supérieure :
   27 + 3 + 11 = 30 + 11
3. Utiliser l'associativité de l'addition :
   30 + 11 = 30 + 10 + 1 = 40 + 1 = 41

Soustraction :

Exemple :

Soit le calcul de 27 - 14, proposé en CE2 ou CM1.

« Pour retire 14, on retire 10 puis 4 » : cela peut s'écrire 27 - 14 = 27 - 10 - 4 = 17 - 4 = 13.

Le retrait de 10 se fait en enlevant une dizaine. Le calcul de 17 - 4 n'est pas simple : souvent les élèves décomptent.

- <u>Le calcul en ligne ou posé en colonnes</u> :

Le calcul en ligne et le calcul posé (technique opératoire en colonnes) utilisent :
- La connaissance des tables d'addition ;
- Les principes de la numération ;
- Une propriété de l'addition : l'associativité de l'addition.

<u>Addition</u> :

<u>Par le calcul en ligne</u> :

<u>Exemple</u> :

Voici un calcul en ligne proposé au CE1 : 25 + 32. L'enseignant au tableau peut utiliser les couleurs pour aider les élèves à bien distinguer unités et dizaines.

25 + 32 = (2 + 3) dizaines et (5 + 2) unités = 57

<u>Par le calcul posé</u> :

Les difficultés du calcul en ligne permettent d'amener la technique opératoire comme un outil de calcul. Au lieu d'utiliser les couleurs, on dispose les uns sous les autres les chiffres des unités et ceux des dizaines.

$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ +\ 3\ 2 \\ \hline 5\ 7 \end{array}$$

Cet outil se révélera particulièrement efficace dès lors qu'il y aura « des retenues à gérer ».

$$\begin{array}{r} {}^{1}2\ 5 \\ +\ 3\ 7 \\ \hline 6\ 2 \end{array}$$

<u>Soustraction</u> :

<u>Par un calcul en ligne</u> :

Le calcul d'une soustraction nécessite d'abord d'écrire correctement la soustraction à effectuer, c'est-à-dire de bien prendre en considération la relation d'ordre entre les deux nombres à soustraire (« on soustrait le plus petit nombre du plus grand ») :

52 – 64 est une opération impossible dans N contrairement à 64 – 52.

Pour effectuer ce calcul, on utilise les couleurs dans un premier temps pour distinguer dizaines et unités : 64 – 52 = 12.

Soustraire 2 unités de 4 unités est possible, cela donne 2 unités.

De même : soustraire 5 dizaines de 6 dizaines peut se faire et donne 1 dizaine comme résultat.

Le résultat final de 64 – 52 est donc une dizaine et deux unités, soit 12.

<u>Pour un calcul posé</u> :

Calculs sans retenue :

$$\begin{array}{r} 6\ 4 \\ -\ 5\ 2 \\ \hline 1\ 2 \end{array}$$

Ici, la condition « pour que l'opération a – b soit possible dans N, il faut que a soit plus grand que b » est respectée puisque 4 est plus grand que 2, et 6 plus grand que 5, les soustractions du côté des unités et du côté des dizaines sont donc possibles sans retenue : 4 unités – 2 unités, 6 dizaines – 5 dizaines, pour un résultat de 12.

Calculs avec retenue :

Au cycle 2, on s'appuiera sur les connaissances en numération pour transmettre certains procédés aux élèves comme la méthode anglo-saxonne.

$$\begin{array}{r} \overset{4}{\cancel{5}}\ {}^{1}2 \\ -\ 3\ 8 \\ \hline 1\ 4 \end{array}$$

Soustraire 8 unités de 2 unités est impossible, on ajoute donc 1 dizaine aux 2 unités, ce qui se représente par l'ajout d'un 1 devant le 2 du haut, on aura 12 – 8 = 4. Cette dizaine ajoutée va s'enlever du nombre de dizaines de 52, il ne comportera plus 5 dizaines mais 4 (5 est barré pour devenir 4). On soustrait donc 3 dizaines à 4 : 4 – 3 = 1, d'où le résultat final : 1 dizaine et 4 unités, soit 14.

Au cycle 3, on pourra évoquer vers la méthode par compensation

$$\begin{array}{r} 5\ {}_{1}2 \\ -\ 3\ \ 8 \\ {}_{1}\ \ \ \ \\ \hline 1\ \ 4 \end{array}$$

Du côté des unités des deux nombres en présence, 2 est inférieur à 8, on ne peut donc pas soustraire 8 de 2, on ajoute donc 1 dizaine à 2 pour faire 12. On soustrait 8 à 12, ce qui donne 4 unités. Cette dizaine ajoutée se compense en enlevant une dizaine au résultat de (5 dizaines – 3 dizaines) pour donner 1 dizaine (cette dizaine à enlever apparaît sous la forme d'un 1 dans la colonne de gauche sous 5 et 3), d'où le résultat final : 14, soit 1 dizaine et 4 unités.

- **Le calcul à la calculatrice**

Bien utiliser la calculatrice en classe est un défi pour les enseignants.

Deux attitudes extrêmes peuvent exister :

- L'enseignant peut considérer la calculatrice exclusivement comme un obstacle à la mémorisation des tables par les élèves, il en bannira alors l'usage en classe ;
- L'enseignant peut demander à ses élèves de se précipiter sur leur calculatrice au moindre calcul, élèves qui ne pourront alors jamais se constituer une mémoire de faits numériques directement accessibles.

Afin d'éviter l'un ou l'autre de ces excès, il est bon de demander aux élèves d'utiliser la calculatrice dans un cadre strict et normé :

- Pour vérifier leurs calculs ;
- Pour alléger leurs procédures de calcul lorsque les compétences visées relèvent plutôt de la résolution de problèmes ;
- Pour résoudre des problèmes utilisant des grands nombres.

Les calculatrices peuvent être utilisées, par exemple, dans le cadre de la résolution de problèmes, en particulier lorsque les calculs ne peuvent pas être effectués mentalement ou lorsqu'un calcul réfléchi serait possible mais se révèlerait peu rapide ou peu fiable.

L'usage de la calculatrice permet aux élèves de mémoriser le résultat de nombreuses additions, ils se révéleront ainsi par la suite plus rapides que la calculatrice pour effectuer certains calculs.

Les calculatrices peuvent servir de support aux questions portant sur les nombres.

Exemple :

Comment passer, en un minimum d'opérations, de l'affichage de 38 à l'affichage de 48 (ou de 37 à 53), sans effacer le premier affichage ?

Les compétences sollicitées pour répondre à cette question relèvent de la numération ou du calcul mental.

L'enseignant profitera de toutes les occasions pour mettre en évidence le fait qu'un calcul mental est souvent plus rapide que le recours à la calculatrice (en particulier pour les doubles, les résultats connus des tables et les multiplications par 10).

Le résultat affiché par la calculatrice nécessite souvent une interprétation, notamment lorsque s'affichent de nombreuses décimales : il faut alors déterminer quels sont les chiffres significatifs de la partie décimale, en référence au contexte.

Au cycle 3, la compétence « calcul à la calculatrice » est inséparable de la résolution de problèmes : l'élève doit acquérir une meilleure autonomie grâce à l'outil calculatrice, qui lui offre la possibilité de centrer davantage son attention sur l'organisation des calculs à mettre en place et l'occasion de faire des expériences multiples.

Le recours à une calculatrice dans le cadre de la résolution d'un problème doit faire l'objet d'un apprentissage : interrogation sur la pertinence de son utilisation, réflexion sur la suite des calculs à effectuer, sur la nécessité de noter des résultats intermédiaires et sur leur signification.

Multiplication et division des entiers naturels

C2

Calcul automatisé

Le calcul automatisé fait appel à une mémoire constituée et procède selon une méthode toujours identique dans laquelle la numération joue un rôle essentiel.

Exemple :

Les techniques opératoires sont un mode de calcul automatisé, elles nécessitent :
- L'utilisation d'une mémoire portant sur les chiffres ;
- L'utilisation d'un procédé toujours identique, un algorithme.

Le calcul en ligne peut être un calcul automatisé dans des cas simples du type :

(15 x 3) = (10 + 5) x 3 = 10 x 5 + 5 x 3 = 30 + 15 = 45

Le calcul mental peut être un calcul automatisé dans des cas simples du type :

15 x 2 = 30

Connaitre les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres inférieures à 20 (CP) puis les doubles et les moitiés des nombres d'usage courant (CE1) :

La connaissance de ces doubles et des moitiés (doubles des nombres de 1 à 10) sert de point d'appui pour la construction d'autres résultats. Elle peut permettre de viser dix autres nombres-clés : 20, 30, 40, 50, 100, 200, 300, 400, 15, 25.

La maîtrise du calcul du double s'acquiert de façon progressive : après les nombres inférieurs à 10, on passe aux nombres inférieurs à 50 en tenant compte de la difficulté de calcul du double ; les doubles des nombres ronds et les nombres dont le chiffre des unités est 0 ou 5 constituant des points d'appui utiles. On passe enfin aux nombres inférieurs à 100.

Parmi ces nombres, seront d'abord travaillées les moitiés de ceux dont le chiffre des dizaines est pair.

Connaître les tables de multiplication par 2 (CP) et par 2, 3, 4 et 5 (CE1) :

Des observations sur les régularités des résultats en favorisent la mémorisation. Dès les débuts de cet apprentissage, la connaissance des résultats doit permettre de répondre aux questions du type : « Combien de fois 5 dans 35 ? »

Calcul réfléchi

Il faut souligner trois points importants :
- Une liste de calculs relevant du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive, elle pourra donc être adaptée par les enseignants ;
- Les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et sur les opérations en jeu ;
- L'explication des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorisent les progrès des élèves.

Pour maîtriser le produit de deux nombres inférieurs à 10, certaines relations sont à privilégier (relation entre 5 et 10, entre 25 et 50, entre 50 et 100, entre 15 et 30, entre 30 et 60, entre 12 et 24).

En dehors de celles de 2, 3, 4 et 5, la mémorisation des tables de multiplications relève du cycle 3.

Mais, dès la fin du cycle 2, tous les résultats doivent pouvoir être reconstruits par les élèves, soit en utilisant l'addition itérée, soit en s'appuyant sur quelques résultats connus (notamment les produits de la table de 5) : ainsi 8 x 6 peut être construit comme « 8 de plus que 8 x 5 », l'usage du mot « fois » facilitant cette relation (6 fois 8, c'est 5 fois 8 et encore 1 fois 8).

Le fait que la multiplication est commutative doit être rapidement mis en évidence, la connaissance de « 5 fois 8 » entraînant alors celles de « 8 fois 5 » et l'égalité correspondante : 5 x 8 = 8 x 5.

Calcul posé

Seule la technique usuelle française de multiplication posée doit être maîtrisée (et bien entendu comprise) par les élèves.

La compréhension de la technique usuelle de la multiplication nécessite la coordination de plusieurs types de connaissances :
- tables de multiplication ;
- numération décimale pour la gestion des retenues, dans les multiplications intermédiaires puis dans l'addition finale ;
- « règle des zéros » : passage du résultat de la multiplication d'un nombre par 3 à la multiplication de ce même nombre par 30, par 300, etc. … ;
- distributivité de la multiplication.

La « règle des zéros » est utilisée pour effectuer un produit dont l'un des facteurs est multiple de 10, 100, etc. …

Exemples :

- Pour effectuer le produit de 5 x 30 :
  1. On effectue le produit de 5 x 3 = 15 ;
  2. Comme 30 = 3 x 10, on juxtapose à la droite du produit de 5 x 3 un zéro pour obtenir le résultat : 150.
- Pour effectuer le produit 5 x 300 :
  1. On effectue le produit de 5 x 3 = 15 ;
  2. Comme 300 = 3 x 100, on juxtapose à la droite du produit de 5 x 3 deux zéros pour obtenir le résultat : 1 500.

De la même manière, on effectuer les produits par 3 000, 30 000, etc. …

Certaines de ces connaissances commencent à être travaillées au cycle 2, mais la maîtrise nécessaire à la compréhension de la technique de la multiplication posée ne commence à être assurée qu'au cours de la première année du cycle 3.

Le cas de la technique de la multiplication de nombres à deux ou trois chiffres ou plus par un nombre à un chiffre est le plus simple et sa maîtrise constitue un préalable à celle de la multiplication par un nom à plusieurs chiffres.

Cette multiplication repose sur les principes de la numération décimale et la connaissance des produits des nombres à un chiffre (les tables de multiplication) ainsi que sur la commutativité de la multiplication et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (27 x 6 = 7 x 6 + 20 x 6). Au cours d'une première étape, certains élèves peuvent être autorisés à utiliser un répertoire écrit de ces tables pour alléger leur charge de travail.

Cette technique peut être mise en relation avec le calcul de l'addition itérée (posée) d'un même nombre.

C3

Calcul automatisé

Mémoriser et mobiliser les résultats des tables de multiplication :

La stabilisation complète du répertoire multiplicatif nécessite au moins deux années de travail au cycle 3 et doit être soutenue dans la dernière année de ce cycle, puis au collège.

Le repérage des régularités ou de particularités sur la table de Pythagore peut constituer une aide à la mémorisation.

Et n'oublions pas que connaître 8 x 6 = 48, c'est tout autant pouvoir donner rapidement ce résultat que répondre à « Combien de fois 8 dans 48 ? », à « Diviser 48 par 6 » ou à encore « décomposer 48 sous forme de produits de deux nombres inférieurs à 10 ».

Multiplier et diviser un nombre entier par 10, 100, 1 000 …

Pour multiplier par 10 et par 100, la procédure de calcul consistant à décaler les chiffres d'un rang ou de deux vers la gauche doit être reliée au fait que multiplier 13 par 10, par exemple, revient à chercher le nombre que représentent 13 dizaines.

Cette compétence doit être mise en relation avec le système de numération chiffrée : multiplier 34 par 10 revient à chercher une autre écriture de 34 dizaines ; diviser 340 par 10 revient à chercher combien il y a de dizaines dans 340.

La référence à l'écrit constitue ici une aide importante, l'énoncé du résultat nécessitant un sectionnement par tranches de trois chiffres : pour 530 x 10, on passe ainsi de « cinq cent trente » à « cinq mille trois cents ».

Calcul réfléchi

La frontière entre calcul automatisé et calcul réfléchi n'est pas toujours facile à préciser. A un même moment, elle peut varier d'un élève à l'autre et, surtout, elle se modifie au cours du cycle.

Dans tous les cas, on insistera sur la variété des procédures qui peuvent être utilisées et qui, généralement, s'appuient sur une décomposition des nombres.

Ainsi : 15 x 16 peut être calculé :

- En ajoutant les résultats de 15 x 10 et de 15 x 6 ;
- En ajoutant les résultats de 10 x 16 et 5 x 16 ;
- En calculant 15 x 4, puis en multipliant le résultat par 4 ;
- En multipliant 16 par 30 et en divisant le résultat par 2, etc. …

Il s'agit ici de dépasser les seules décompositions liées à la connaissance des tables.

Par exemple :

- 64, c'est 8 x 8 mais aussi 32 x 2 et 16 x 4 …
- 72, c'est 9 x 8 mais aussi 24 x 3 …

Cette compétence sera très utile aux élèves lorsqu'ils auront, au collège, à simplifier les fractions, chercher des factorisations, ou calculer avec des racines carrées.

Calcul posé

Le cas de la technique de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres intervient bien après l'apprentissage du produit d'un nombre à un chiffre par un nombre à plusieurs chiffres. Sa compréhension nécessite d'avoir assimilé l'utilisation de la « règle des zéros » et de la distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 523 par 205 revient à multiplier par 200 puis par 5 et à additionner les deux résultats obtenus). Il est donc prudent d'attendre la fin de la première année ou de la deuxième année du cycle 3.

Dans tous les cas, les élèves sont aidés par l'écriture explicite des « 0 » (qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage), ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer.

Exemple :

```
        5 2 3
      x 2 0 5
      -------
      2 6 1 5     <- 523 x 5
  + 1 0 4 6 0 0   <- 523 x 200
  -------------
    1 0 7 2 1 5
```

Division posée :

La technique usuelle française, telle qu'elle a été longtemps enseignée, est très dépouillée (pas de soustractions posées) et donc également source de nombreuses erreurs.

De plus, celles-ci sont difficiles à repérer puisque tous les calculs effectués n'ont pas donné lieu à une trace écrite. Par ailleurs, il s'agit d'un calcul « à risque », insécurisant, dans la mesure où un chiffre essayé au quotient n'est jamais absolument certain. C'est également le seul calcul où l'estimation intervient au cours de calcul, alors que, pour les autres opérations, elle intervient soit au début, soit à la fin comme instrument de prévision ou de contrôle.

Il faut également souligner le peu d'usage qui est actuellement fait de cette technique … et en tirer la conséquence suivante : plus encore que pour les autres opérations, le travail doit être principalement orienté vers la compréhension de l'articulation des différentes étapes du calcul.

Etapes dans le cas de la division euclidienne de deux nombres entiers :

✓ La compréhension de cette technique suppose de nombreuses connaissances préalables :

- Maîtrise des deux « sens » de la division : « quelle est la valeur de chaque part ? » (diviser 2 782 par 26 parts égales et chercher la valeur d'une part), « combien de fois ? » (diviser 2 782 par 26 revient à chercher combien de fois 26 est contenu dans 2 782) ;
- Maîtrise des tables de multiplication (ce qui englobe la recherche de « combien de fois 7 dans 59 ? », qui n'est pas directement dans la table de multiplication par 7) ;
- Capacité à prévoir le nombre de chiffres du quotient, par encadrement ou par partage d'une partie du dividende.

✓ A partir de là, plusieurs étapes peuvent être suggérées.

Un temps préalable suffisant doit être consacré au calcul réfléchi de quotients et de restes. En effet, ce type de calcul donne l'occasion aux élèves de mettre en œuvre, en acte, des compétences également sollicitées dans l'exécution de la technique opératoire. Ainsi, diviser mentalement 1 548 par 7 incite à décomposer 1 548 en 1 400 + 148, après avoir repéré que 1 400 est divisible par 7 (200), puis 148 en 140 + 8 pour déterminer les deux autres composantes du quotient (20 et 1) et le reste (1).

Le quotient s'obtient par addition des quotients partiels : 200 + 20 + 1 = 221.

La seconde étape vers la technique peut consister à effectuer des divisions par un nombre à un chiffre, avant de travailler sur des divisions plus complexes, tout en limitant le niveau de difficulté.

Dans toutes les circonstances, trois recommandations peuvent être faites :

- Commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient (ce qui permet un premier moyen de contrôle sur le quotient) ;
- S'autoriser à poser des produits annexes, à la suite d'une première estimation du chiffre cherché dans le quotient (la production de la totalité de « la table du diviseur » ne doit pas être encouragée) ;
- Encourager la pose effective des soustractions (sans interdire toutefois aux élèves qui le souhaitent de s'en dispenser).

L'exemple suivant montre ce qui peut être attendu en fin d'école primaire :

7 8 0 5	2 7	2 7	2 7
- 5 4	2 8 9	x 9	x 8
2 4 0	c d u	2 4 3	2 1 6
- 2 1 6			
2 4 5			
- 2 4 3			
2			

La technique « dépouillé » de la division n'est pas une compétence visée, ni à l'école primaire ni au collège.

Pour la division euclidienne, il n'existe pas de signe conventionnel pour désigner le quotient entier. Pour rendre compte complètement du calcul (quotient et reste), on utilise l'égalité caractéristique de la division : 37 = (5 x 7) + 2 (en soulignant que le reste est inférieur au diviseur).

On évitera d'utiliser des écritures du type 37 : 5 = 7 (reste 2).

Les compétences mentionnées pour le cycle 2 doivent faire l'objet, au cycle 3, d'un travail visant à les stabiliser et à les enrichir.

Fractions et décimaux

Les notions nouvelles de fractions et décimaux, introduites au cycle 3 en CM1, bien qu'utiles à la résolution de certains problèmes, vont venir bouleverser les représentations que les élèves se font du nombre.

__Au cycle 2__ :

Dans les programmes de cycle 2, il n'est fait allusion ni aux fractions, ni aux décimaux ; toutefois dans certains problèmes où apparaissent des conversions (en classes de CP et de CE1), les élèves sont amenés à transformer des mesures exprimées avec certaines unités, comme par exemple transformer 125 centimes d'euros en euros et centimes d'euros ; on parlera alors d'un euro vingt-cinq (centimes) en s'appuyant sur le langage courant.

De même, bien que les fractions ne soient pas enseignées au cycle 2, lors de l'apprentissage de la lecture de l'heure (en fin de cycle 2), les élèves sont confrontés aux quarts d'heure et aux demi-heures ; les termes « quart » et « demi » ne leur seront donc pas inconnus à leur entrée au cycle 3, mais ils auront été utilisés dans un contexte très particulier.

__Au cycle 3__ :

Au cycle 3, les élèves mettent en place une première maîtrise des fractions et des nombres décimaux : compréhension de leurs écritures, mise en relation des écritures à virgule avec des sommes de fractions décimales, comparaison des nombres décimaux, utilisation de graduations.

Connaissance des fractions simples

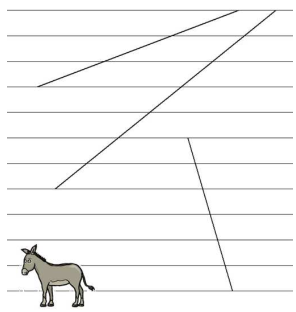
Les fractions et les nombres décimaux peuvent tout d'abord apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les problèmes entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante : problèmes de partage, de mesure de longueurs ou d'aires, de repérage d'un point sur une droite.

La plupart des connaissances relatives à ces nouveaux nombres peuvent être travaillées et interprétées dans des activités relevant d'autres champs disciplinaires (sciences et technologie, géographie …).

En dehors de la connaissance des fractions d'« usage courant », le travail sur les fractions permet de donner du sens aux nombres décimaux envisagés comme fractions décimales ou sommes de fractions décimales (fractions de dénominateurs 10, 100, 1 000 …).

__Exemple__ :

$$2{,}58 = \frac{258}{100} = 2 + \frac{58}{100} = 2 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100}$$



Les fractions telles que 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 peuvent être illustrées ou évoquées en référence à des pliages successifs en deux de l'unité.

Dans d'autres cas, par exemple ceux où l'unité est partagée en trois ou en cinq, on peut avoir recours à un réseau de droites parallèles équidistantes (aussi appelé « guide-âne »). Ce réseau permet de partager une longueur en plusieurs longueurs égales, sans recours, à la division.

Des fractions supérieures à 1 sont utilisées.

Désignations orales et écrites des nombres décimaux

Les écritures à virgule prennent sens en étant mises en relation avec les fractions décimales, ce qui correspond à l'introduction historique des décimaux.

Cela permet de comprendre que la valeur d'un chiffre est dix fois plus petite que celle du chiffre écrit immédiatement à sa gauche et dix fois plus grande que celle du chiffre écrit immédiatement à sa droite (ce qui est vrai aussi bien pour la partie entière que pour la partie décimale.

__Exemple__ :

$$\frac{956}{10} = 95 + \frac{6}{10} = 95{,}6$$

Ordre et décimaux

La comparaison de nombres tels que 2,58 et 2,6 se ramène à celle de leurs parties décimales, mais celles-ci ne doivent pas être considérées comme des entiers.

Le recours à des graduations, dans une activité comme situer exactement ou approximativement des nombres décimaux sur une droite graduée de 1 en 1, ou de 0,1 et 0,1 peut être une aide pour les élèves.

Ces activités permettent aux élèves de prendre conscience que la notion de nombres consécutifs, valable pour les nombres entiers, ne l'est plus pour les nombres décimaux : intercaler un nombre (décimal) entre deux nombres (décimaux) devient toujours possible.

La notion de valeur approchée fait l'objet d'un tout premier travail qui doit prendre sens pour l'élève, en relation avec un contexte issu de la vie courante, de la physique, de la géographie.

Sur une droite graduée de 0,1 en 0,1 on peut placer 12,7 exactement mais 12,83 approximativement (plus près de 12,8 que de 12,9).

Les fractions inférieures à l'unité

✓ <u>Par l'utilisation des connaissances culturelles des enfants dans des contextes particuliers : notamment heure et masse.</u>

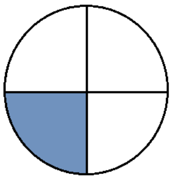
<u>Exemple :</u>

Explicitation et écriture d'expressions comme « une demi-heure », « un quart d'heure », « un demi-kilo », etc. … et extension à d'autres fractions usuelles.

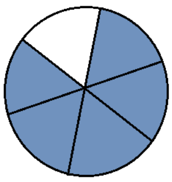
✓ <u>Par situation de partage d'une entité</u>

<u>Exemple :</u>

Partage d'un gâteau, d'une pizza, ce qui donne lieu à ce type de représentations et d'écritures :

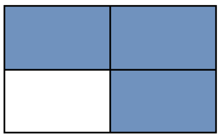


=> 1/4

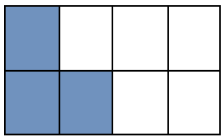


=> 5/6

Ce qui peut se représenter aussi sous forme de rectangle :



=> 3/4



=> 3/8

✓ <u>Par une situation de mesure :</u>

<u>Exemple :</u>

Utilisation d'une bande-unité pour exprimer la mesure de segments dont les longueurs ne sont pas des mesures entières.

On favorise les mesures utilisant des fractions qui ont pour dénominateurs 2, 4, 8, etc. … et qui sont accessibles par pliage en deux successifs.

✓ <u>Par une situation de partage équitable que les entiers ne permettent pas de résoudre totalement :</u>

<u>Exemple :</u>

Quatre amis se partagent neuf baguettes de pains. Quelle est la part de chacun d'entre eux ?

Résolution :

La résolution de ce problème en utilisant les entiers seuls conduit à dire : « Chacun aura 2 baguettes et il restera 1 baguette ».

Pour aller jusqu'au bout du partage, on est amené à partager l'unité restante en quatre, ce qui nous ramène à l'introduction par le partage d'une entité.

Mais nous dirons alors que chacun des quatre amis disposera de deux baguettes et un quart de baguette, ce qui permet d'écrire : 9/4 = 2 + 1/4, en utilisant la barre de fraction comme représentant un partage équitable, division qui aura dû être travaillée en amont.

✓ <u>Par un mélange des différents exemples :</u>

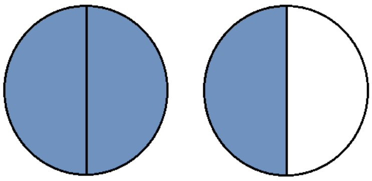
Quelle que soit l'introduction des fractions ménagée auprès des élèves, quel que soit le contexte choisi (plutôt la mesure, plutôt les partages équitables, etc. …) les premières écritures fractionnaires mobilisées et travaillées sont des fractions qui sont :

- L'expression d'une proportion, c'est-à-dire que les fractions expriment toujours l'idée de « fraction de quelque chose » : 1/4 de baguette, 1/8 d'unité, ce que l'on voit quelques fois écrit « 1/8 u » ;
- Inférieures à l'unité.

La fraction naît de la nécessité dans certaines situations de « fractionner l'unité ». L'écriture fractionnaire correspond à écrire un nombre de parts « su » ou « par rapport à » un nombre de parts total. L'écriture fractionnaire devrait toujours être suivie d'une expression liée au contexte (1/4 de baguette).

Les différents travaux de didactique ont permis de montrer que les élèves pouvaient à ce stade développer des conceptions de la fraction qui les amènent à commettre l'erreur illustrée ci-dessous :

Problème : quelle fraction représentent les parts colorées ?



⇨ Réponse : 3/4 (au lieu de : 3 parts sur les 4 parts présentes ce qui aurait été une écriture plus juste) ou 1 + 1/2.

Il ressort de l'analyse de cette erreur qu'à ce stade de la progression (introduction de l'écriture fractionnaire) les élèves ne conçoivent que la fraction comme l'expression d'une proportion (3 par rapport à 4 dans l'exemple précédent), le tout étant pris pour le 1, ce qui signifie que toute fraction serait nécessairement inférieure à 1.

Il paraît donc nécessaire dans les progressions de prendre en considération différentes étapes dans lesquelles on aborde :

- les fractions inférieures à l'unité,
- les fractions supérieures à l'unité.

Les fractions supérieures à l'unité

Nous avons vu que seule l'introduction de la fraction s'appuyant sur des situations de partage équitable conduisait d'emblée à des écritures comme 9/4.

Mais cette écriture ne pourra vraiment prendre sens que lorsque l'écriture 1/4 aura elle-même pris sens pour les élèves.

Donc dans tous les cas après un travail sur la fraction inférieure à 1, il faut faire franchir le pas aux élèves et passer à des fractions supérieures à 1.

On passe par la voie des opérations sur les premières fractions introduites, qui peuvent être représentées et manipulées par les élèves.

Exemples :

1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 5/4

3 x 1/2 = 3/2

Dès cette étape, pour ne pas avoir à utiliser des écritures trop lourdes, les fractions sont écrites comme de nouveaux nombres (3/2) et non seulement comme deux entiers séparés par une barre et codant une proportion résultant d'un partage équitable (3/2 u).

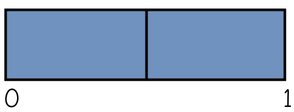
Cela va être utilisé pour situer les fractions, nouveaux nombres, par rapport aux entiers et on va pouvoir employer une droite graduée.

Exemple :

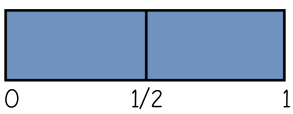
Comment amener des élèves à placer des fractions sur une droite graduée ?

1. On utilise la bande-unité :

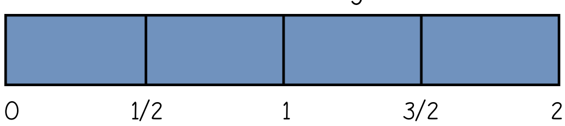
2. Lorsqu'on la plie en deux, on obtient :



3. La fraction 1/2 est située au milieu de la bande-unité ce qui permet de situer la fraction entre 0 et :



4. On étend ensuite à la droite graduée :



Les fractions décimales

Les fractions vont ensuite être utilisées pour exprimer des mesures.

Il y a alors rencontre entre les fractions et le système métrique :

- un litre et un décilitre devient une et un dixième de litre, ce qui peut être écrit (1 + 1/10) de litre ;
- un mètre et trois centimètres devient (1 + 3/100) de mètre ;
- un kilo et demi devient 1 + 1/2 kilo soit (1 + 5/10) de kilo, etc. …

Dans ce cadre – la mesure -, on utilise de manière privilégiée les fractions décimales. Les élèves développent des habiletés sur ces fractions particulières : fractions égales, sommes, produit par un entier.

Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement

- <u>Ecriture des nombres décimaux</u> :

Les écritures décimales peuvent être présentées aux élèves comme un autre moyen d'écrire une fraction ou une somme de fractions décimales.

<u>Exemples</u> :

- 4/10 = 0,4
- 1 + 7/10 + 3/100 = 1,73
- 2 + 9/100 = 2,09

Parfois, pour aider les élèves à comprendre cette convention d'écriture que sont les écritures décimales à virgule, on utilise le tableau de numération pour les entiers, étendu aux fractions décimales.

<u>Exemple</u> :

Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes
		2,	3	6

La disposition de 2 + 3/10 + 6/100 dans le tableau amène l'écriture 2,36.

Toutefois, le lien avec le repérage de points sur une droite graduée est primordial pour éviter les confusions, entre dixième et centième par exemple, en particulier si le tableau de numération reste d'usage délicat pour les élèves.

<u>Exemple</u> :

Les nombres 2,01 ; 2,10 ; 2,7 ou 2,07, qui diffèrent les uns des autres par la position de leurs zéros ou de leurs chiffres de la partie décimale, placés sur une droite graduée, donnent des points très éloignés l'un de l'autre, ce qui permet à l'enfant de se rendre compte de l'importance de la position des chiffres.

Le travail peut être complété avec la mesure d'aires de figures composées de rectangles, grâce à l'utilisation d'une unité (un carré) fractionnée en 10 ou 100 parties.

Tous ces travaux visent la maîtrise des équivalences de notations du type.

126/100 = 1 + 26/100 = 12/10 + 6/100 = 1 + 2/10 + 6/100 = 1,26

L'emploi du système métrique permet ensuite aux élèves un usage des nombres décimaux dans un autre contexte : les écritures décimales vont permettre de « simplifier » les expressions des mesures utilisant unités, multiples et sous-multiples.

<u>Exemple</u> :

Dans le cadre des mesures de longueur, « 3m 8cm » peut à présent s'écrire « 3,08m ».

- <u>Oralisation des nombres décimaux</u> :

Pour les fractions : les élèves doivent être capables d'utiliser les mots « demi », « tiers » et « quart » pour les fractions de dénominateurs 2, 3 et 4 respectivement ainsi que les mots en « -ième » (trois septièmes, par exemple) pour les fractions ayant d'autres dénominateurs.

Pour les nombres décimaux : prenons l'exemple 42,37.

On doit éviter, dans un premier temps en tout cas, de lire ce nombre « quarante-deux virgule trente-sept ». Il est préférable de le lire « quarante-deux et trente-sept centièmes » ou « quarante-deux, trois dixièmes et sept centièmes » (manières de lire porteuses de sens et s'appuyant sur les décompositions) afin de ne pas laisser à penser aux élèves qu'un décimal est formé par un couple d'entiers (un entier pour la partie entière et un entier pour la partie décimale).

Comparer, ranger, intercaler, situer

Les travaux de didactique ont permis de montrer que pendant une longue période les élèves n'ont pas véritablement accès à la mutation qui s'opère avec l'introduction des nombres décimaux dans l'univers du nombre. Ils conservent des représentations qui sont fortement marquées par les nombres entiers.

<u>Exemple</u> :

On sait que pour de nombreux élèves : 2,3 < 2,25. On peut émettre deux hypothèses concernant la source de cette erreur.

1. Les élèves s'appuient sur la conception suivante du nombre décimal : deux nombres entiers séparés par une virgule. Ils comparent séparément les parties entières et les parties décimales des deux nombres.

Ils en concluent que, puisque 3 est inférieur à 25, alors 2,3 est inférieur à 2,25.

2. Les élèves peuvent aboutir au même résultat en faisant tout simplement abstraction de la virgule. Ils comparent alors 23 et 225 comme on le fait dans l'ensemble des entiers naturels.

La problématique sous-jacente, très difficilement accessible aux élèves, est le fait que l'on passe d'un univers discret (ensemble des entiers) à un univers continu (ensemble des décimaux).

Dans un univers continu, la question du successeur et du prédécesseur n'a plus aucun sens. De nombreux élèves penseront que le successeur de 1,9 est 2 voire 1,91, mais auront beaucoup de mal à concevoir que ce successeur est en réalité impossible à trouver.

Entre deux nombres décimaux, il y a une infinité de décimaux.

Pour amener petit à petit les élèves à une conception juste du nombre décimal et à la prise en compte du caractère dense de cet ensemble par rapport au caractère discret de l'ensemble des entiers naturels, on va utiliser des exercices et des situations menant les élèves à :

- **Comparer ;**

<u>Exemple</u> :

Ordonner du plus petit au plus grand les nombres suivants : 1,2 – 1,10 – 1,15 – 1,05.

- **Situer des nombres décimaux sur une graduation ;**

- **Encadrer des nombres ;**

<u>Exemple</u> :

Encadrer les nombres suivants par deux entiers consécutifs : 1,8 – 0,45 – 3,15 – 3,015 – 30,15.

- **Intercaler ;**

<u>Exemple</u> :

Déterminer deux nombres décimaux compris entre :

1,5 et 2 ; 1,6 et 1,9 ; 1,8 et 1,9 ; 1,8 et 1,81.

- **Déterminer des valeurs approchées.**

La comparaison d'une fraction avec des entiers peut être effectuée en décomposant la fraction à l'aide de la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1.

<u>Exemple</u> :

$7/3 = 2 + 1/3$ d'où $2 < 7/3 < 3$.

La comparaison de deux nombres décimaux s'appuie d'abord sur la fraction décimale.

<u>Exemple</u> :

Comparer 6,27 et 6,3

Résolution :

Les parties entières sont les mêmes, il faut comparer 27/100 à 3/10 ou 27/100 à 30/100.

Le passage par les fractions décimales pour comparer des décimaux est une méthode lourde, l'élève doit évoluer vers l'une ou l'autre des deux méthodes présentées dans l'exemple ci-dessous.

Exemple :

Pour comparer 3,24 et 3,3 :

1. On compare d'abord leurs parties entières ;

2. Si elles sont égales, on compare leurs parties décimales et c'est là que les procédures divergent :
- soit on ajoute des zéros pour que les deux parties décimales aient autant de chiffres (si ce n'est pas le cas) puis on compare les parties décimales « obtenues » comme si c'était des entiers : 3,24 < 3,30 car 24 < 30 ;
- soit on compare les parties décimales « chiffre à chiffre » en commençant par le chiffre des dixièmes jusqu'à ce qu'il y ait une différence : 3,24 < 3,3 car dans 3,24 le chiffre des dixièmes est 2 alors que dans 3,3 le chiffre des dixièmes est 3 ; 3 est plus grand que 2.

Additionner des décimaux

Les opérations sur les décimaux sont amenées en fonction des nécessités rencontrées en résolution de problèmes :

- Additionner, soustraire deux nombres décimaux ;
- Multiplier un nombre entier par un nombre décimal (en fin de CM1) ;
- Multiplier deux nombres décimaux en calcul posé (en fin de CM2) ;
- Diviser deux entiers en calcul posé, quotient décimal ;
- Diviser un nombre décimal par un entier en calcul posé.

Les programmes rappellent la nécessité de développer les capacités des élèves à calculer avec des décimaux, aussi bien dans le calcul mental que dans le calcul posé et le calcul à la machine. La maîtrise des élèves concernant les nombres décimaux doit être suffisante avant qu'ils soient amenés à poser les opérations (en colonnes). Cette maîtrise passe par l'usage « intensif » du calcul mental. Savoir ajouter 5 centièmes et 2 dixièmes, en se référant aux fractions décimales ou en imaginant la place de chacun des chiffres dans le nombre décimal, est une compétence à acquérir avant la technique opératoire des décimaux, plus pratique certes, mais « mécanique » et faisant perdre le sens des décimaux.

Autant l'addition et la soustraction de décimaux ne nécessitent pas de modification profonde du sens de ces opérations par rapport aux calculs avec les entiers, autant la multiplication d'un entier par un décimal est plus problématique.

- Comment concevoir que l'on puisse multiplier par un nombre décimal alors que, jusque-là, multiplier par un entier équivalait à faire une addition réitérée ?
- Comment concevoir également que multiplier par un décimal puisse produire un résultat inférieur au « nombre de départ » (multiplier un entier par 0,5 produit un résultat plus petit que l'entier de départ) ?

Une autre compétence est attendue chez les élèves : multiplier un décimal par 10, 100, etc. … Là encore, dans un premier temps, les élèves auront à faire l'analogie avec les fractions décimales :

Multiplier 8,3 par 10, c'est multiplier 83 dixièmes par 10, (83/10 x 10), ce qui donne comme résultat : 830 dixièmes, (830/10), soit 83 unités.

Les procédures de décalage de la virgule doivent apparaître uniquement lorsque les élèves ont donné du sens à ce type de multiplication.

Calcul et résolution de problèmes

Les principales compétences au programme sont :

- ✓ En ce qui concerne le calcul :
  - Mémoriser des résultats (tables d'addition, tables de multiplication, doubles et moitiés utiles à connaître) ;
  - Savoir calculer mentalement ;
  - Savoir effectuer des calculs en ligne et posés (techniques opératoires de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division) ;
  - Savoir effectuer des calculs avec la calculatrice.
- ✓ En ce qui concerne les problèmes :
  - Savoir résoudre des problèmes (dans les domaines de l'arithmétique, de la géométrie, des grandeurs et mesures et de l'organisation et la gestion de données).

Mémoriser des résultats

Le calcul s'appuie sur la mémorisation qui est faire progressivement :

- Des tables d'addition (addition deux à deux des nombres compris entre 1 et 10) ;
- Des tables de multiplication (tables de 2 à 9 aussi appelées tables de Pythagore) ;
- De résultats utilises comme les doubles ou les moitiés de nombres significatifs.

1) L'addition et la soustraction

La capacité à donner instantanément ou très rapidement les résultats des tables d'addition et à les utiliser pour fournir des compléments et des différences nécessite un long apprentissage. Pour élaborer cette compétence essentielle, l'entraînement et la répétition ne suffisent pas.

Au départ, la plupart des résultats sont reconstruits par les élèves, en s'appuyant sur le sens de l'addition et de la soustraction puis, de plus en plus fréquemment, en s'appuyant sur des résultats déjà maîtrisés.

La mise en place de points d'appui constitue un objectif important : utilisation des doubles, de la commutativité de l'addition (« 3 + 8 c'est comme 8 + 3 »), des compléments à 10, etc. …

Dans tous les cas, si un résultat a été oublié, il doit pouvoir être reconstruit par les élèves. Il s'agit de prendre conscience que trouver le complément à la dizaine immédiatement supérieure revient à trouver le complément à 10 du chiffre des unités.

2) La multiplication et la division

Au cycle 2, la connaissance des tables de multiplication est progressivement acquise par les élèves en commençant avec les tables de 2, 3, 4 et 5, connaissance complétée au cycle 3 par la manipulation d'autres tables.

- Pour la table de 2, il suffit de fournir les doubles (souvent bien connus).
- Pour la table de 5, les régularités facilitent la mémorisation.
- Pour la multiplication par 10, on met en évidence « la règle des zéros » en la justifiant (« 4 x 10, c'est 4 dizaines, donc 40 »).

Une bonne connaissance des tables suppose la capacité à fournir instantanément un résultat qui y figure ou un résultat dérivé :

- Connaître 7 x 8 = 56, c'est d'être capable aussi bien de compléter 7 x 8 = … que 7 x … = 56 ou … x … = 56 (sachant qu'il y a d'autres décompositions que celles fournies par les tables à ou encore de dire combien il y a de fois 7 dans 56 ;
- C'est aussi savoir que 58, par exemple, n'est ni un multiple de 8, ni un multiple de 7, mais qu'il est situé entre deux multiples de 8 (7 x 8 et 8 x 8) ; c'est également être capable de trouver très rapidement combien il y a de fois 8 dans 58.

Les nombres inférieurs à 100 qui sont égaux au produit d'un nombre par lui-même sont mis en évidence, ce qui prépare la notion de racine carrée, étudiée au collège.

<u>Exemple :</u>

49 = 7 x 7.

De même, on s'attache à reconnaître les nombres qui sont le double, triple ou quadruple d'un autre nombre (en particulier pour les nombres inférieurs à 50).

Calculer mentalement

L'expression calcul mental signifie, qu'entre l'énoncé du problème et l'énoncé du résultat, on renonce à utiliser toute opération posée ou calculée à l'aide d'une calculatrice.

Dans certains cas, il est permis d'utiliser une trace écrite, par exemple pour noter des résultats intermédiaires, ou d'utiliser des aides comme des bandes numériques.

Le calcul mental s'appuie sur une mémoire : les tables d'addition, les tables de multiplication (appelées aussi tables de Pythagore), ainsi que d'autres résultats pratiques à connaître (doubles et moitiés de certains nombres, etc. …).

✓ On parlera de calcul mental automatisé pour des calculs simples, orientés vers la production de résultats immédiatement disponibles (récupération en mémoire de résultats connus par cœur ou en reconstruction instantanée de ces résultats) et faisant appel à des procédures automatisées (en particulier : complément à la dizaine, à la centaine, etc. …, immédiatement inférieure, immédiatement supérieure, etc. …). Le calcul mental automatisé met surtout en jeu la rapidité d'exécution.

Il peut exister plusieurs procédures permettant d'élaborer un résultat par un calcul mental automatisé.

Exemples :

- Calculer 27 + 13

Procédure 1 : le résultat peut être obtenu en décomposant chaque nombre :

27 + 13 = 20 + 7 + 10 + 3 = 20 + 10 + 7 + 3 = 30 + 10 = 40.

Procédure 2 : le résultat peut être obtenu en ajoutant successivement 10, puis 3 à 27 (ou 3, puis 10) :

27 + 13 = 27 + 10 + 3 = 27 + 3 + 10 = 30 + 10 = 40.

- Calculer 8 x 6

Procédure 1 : le résultat peut être obtenu en calculant de manière additive :

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8

16 16 16

32

48

Procédure 2 : on peut parvenir au résultat en considérant que 8 x 6 c'est 8 de plus que 8 x 5 (dont le résultat est connu, car figurant dans les tables de multiplication de 5 et de 8).

- Calculer 43 x 3

Procédure 1 : le résultat peut être obtenu en faisant la somme de trois termes égaux à 43 : 43 + 43 + 43.

Procédure 2 : on peut parvenir au résultat en multipliant 4 dizaines et 3 unités par 3 : 40 x 3 + 3 x 3 et en ajoutant les deux résultats : 120 + 9 = 129.

- Calculer 253 – 87

Procédure 1 : le résultat peut être obtenu en retranchant à 253 successivement 50, 30 et 7.

Procédure 2 : le résultat peut être obtenu en retranchant à 253 successivement 3, 4, puis 40 et encore 40.

Procédure 3 : le résultat peut s'obtenir en cherchant le complément de 87 à 253 :

- Pour aller de 87 à 90 : 3 ;
- Pour aller de 90 à 100 : 10 ;
- Pour aller de 100 à 250 : 150 ;
- Pour aller de 250 à 253 : 3.

D'où 253 – 87 = 3 + 10 + 150 + 3 = 166.

✓ On parlera de calcul mental réfléchi (ou raisonné) pour des calculs nécessitant la mise en œuvre d'une méthode adaptée à la situation (choix d'une stratégie, élaboration d'une procédure). Le calcul réfléchi nécessite l'élaboration de procédures originales et, par-là, il contribue au développement des capacités de raisonnement des élèves. Les calculs réfléchis peuvent aller au-delà du calcul purement mental et s'appuyer sur quelques traces écrites.

Exemples :

- 15 x 11 = 165 car 15 x 11 = (15 x 10) + 15 ;
- 15 x 19 = 300 – 15 = 285 car 15 x 19 = (15 x 20) – 15 ;
- 15 x 19 = 19 x 15 = 190 + 95 = 285, car le calcul de 19 x 15 peut être décomposé en celui de 19 x 10 et de 19 x 5 (qui est égal à la moitié de 19 x 10).

Les justifications peuvent être fournies oralement, par une suite de calculs écrits, par un arbre de calcul, par une écriture utilisant des parenthèses, etc. …

En classe, l'explication et l'analyse par les élèves des raisonnements utilisés constituent un moment important de cet apprentissage.

Exemple :

Voici un arbre de calcul pouvant être utilisé en cycle 2 :

```
8 + 9 + 7 + 3
 \ /     \ /
 17      10
   \    /
     27
```

Les élèves traduisent souvent des calculs enchaînés par des expressions telles que 15 x 11 = 15 x 10 = 150 + 15 = 165.

Erronées du point de vue de la signification donnée au symbole « = » en mathématiques, ces écritures reflètent cependant une procédure correcte, qui doit être reconnue comme telle.

L'expression erronée peut être corrigée sous l'une des formes envisagées ci-dessus,

- suite d'égalités comme : 15 x 10 = 150, 150 + 15 = 165 ;
- arbre de calcul ;
- écriture avec parenthèses : 15 x 11 = (15 x 10) + 15 = 150 + 15 = 165.

En général, pour le calcul mental, on se borne à utiliser des nombres décimaux simples.

On peut ainsi exploiter des erreurs du type 0,5 x 3 = 0,15 pour revenir sur la signification des écritures décimales.

Effectuer des calculs en ligne et posés

✓ Définitions :

On appelle **calculs automatisés** des calculs qui utilisent des procédés de calcul toujours identiques écrit (en ligne) ou mental.

Exemple :

27 + 13 = 20 + 10 + 7 + 3 relève du calcul automatisé, on utilise pour le mener à bien :

- les tables d'addition ;
- la décomposition des dizaines ;
- les propriétés de l'addition.

On appelle **calcul réfléchi** un procédé de calcul original qui pourra utiliser des voies différentes selon la mémoire de chacun.

Exemple :

27 + 13 = 27 + 20 – 7 = 47 – 7 = 40

Les techniques opératoires des quatre opératoires relèvent du calcul automatisé.

✓ La réalisation d'un calcul posé n'exclut pas le recours au calcul mental. En effet, les techniques opératoires des quatre opérations requièrent la connaissance des tables ainsi que la gestion des retenues, qui relèvent du calcul mental. De manière générale, un défaut de maîtrise du calcul mental fragilise gravement l'apprentissage des techniques écrites.

✓ Le calcul « posé », aussi appelé « technique opératoire », est un calcul disposé « en étages » ou « en colonnes » :

$$\begin{array}{r} 2\ 3 \\ +\ 3\ 5 \\ \hline 5\ 8 \end{array}$$

✓ Le calcul « en ligne » est présenté horizontalement :

23 + 35 = 58

Il existe des techniques opératoires pour effectuer des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions.

Calculs en ligne et posés particuliers : les opérations à trous sont utilisées à partir du CE2. Il s'agit de calculs en ligne ou posés donnés avec leur résultat mais dont une partie des chiffres ou des nombres ont été effacés, l'exercice consistant à reconstituer tous les termes de l'opération.

Exemples :

- Opération à trous en ligne :

34 + 1_ = 48

L'élève doit mettre 4 à la place du tiret rouge pour avoir les deux termes, 34 et 14, de l'addition donnant 48.

34 + 14 = 48.

- Opération à trous posée :

```
  _ 3
+   8
  1 _
```

L'élève doit ajouter 2 au terme du haut pour obtenir 23, et 5 au résultat pour avoir l'opération complète :

```
  2 3
+   8
  1 5
```

Effectuer des calculs avec la calculatrice

Le programme définit les compétences liées à l'usage de la calculatrice :

- L'utilisation des fonctions de base en CE1 et en CE2 ;
- La connaissance de quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs en CM1 ;
- L'utilisation de la calculatrice à bon escient en CM2.

✓ L'élève doit se familiariser dans un premier temps avec les fonctionnalités de la calculatrice, puis l'utiliser pour alléger la charge de calcul dans un problème ou effectuer des vérifications.

✓ Une utilisation à bon escient de la calculatrice suppose que l'élève discerne les situations dans lesquelles le calcul mental ou écrit s'avère plus efficace que le calcul instrumenté.

Exemple :

Il est sans doute plus rapide et plus simple de calculer mentalement 1 021 + 21 que de taper ces chiffres sur la calculatrice.

Par ailleurs, l'élève doit être incité à juger les résultats obtenus avec la calculatrice en calculant mentalement l'ordre de grandeur attendu.

- **Quand ?**

Il appartient à l'enseignant de décider des occasions où l'usage de la calculatrice est pertinent, de manière à ne pas gêner les apprentissages dans le domaine du calcul (notamment du calcul mental). Les calculatrices peuvent être utilisées par exemple :

- Dans le cadre de la résolution de problèmes lorsque les calculs ne peuvent pas être effectués mentalement, lorsqu'un calcul réfléchi serait possible mais peu rapide ou peu fiable, lorsque les objectifs poursuivis sont d'abord liés à la résolution de problèmes et que le calcul peut apparaître alors comme secondaire (il arrive que la difficulté des calculs « pollue » le travail de logique nécessaire à la résolution) ;
- Comme support de questions portant sur les nombres.

Exemple :

Comme passer, en un minimum d'opérations, de l'affichage 38 à l'affichage 48 (ou de 37 à 53) sans effacer le premier affichage ?

Les compétences sollicitées pour répondre à cette question relèvent alors de la numération ou du calcul mental.

- **Comment ?**

✓ L'enseignant profitera de toutes les occasions pour mettre en évidence le fait que calculer mentalement est souvent plus rapide qu'avoir recours à la calculatrice (en particulier pour les doubles, les résultats connus des tables, la multiplication par 10).

✓ Le résultat affiché par la calculatrice nécessite souvent une interprétation, notamment lorsque s'affichent de nombreuses décimales : il faut alors déterminer quels sont les chiffres significatifs de la partie décimale, en référence au contexte.

✓ Le recours à une calculatrice dans le cadre de la résolution d'un problème doit faire l'objet d'un apprentissage : interrogation sur la pertinence de son utilisation, réflexion sur la suite des calculs à effectuer, sur la nécessité de noter des résultats intermédiaires et leur signification.

- **Pourquoi ?**

Le travail avec la calculatrice donne l'occasion d'approfondir la compréhension des écritures numériques comportant des parenthèses. Ainsi, avec une calculatrice ordinaire (sans touche « (» et «) »), il n'est pas possible de calculer directement un expression comme :

(563 x 78) – (406 x 24) : il faut soit noter des résultats intermédiaires, soit utiliser les touches « mémoire ».

Ce travail avec la calculatrice permet également à un élève de manipuler de grands nombres et de se familiariser avec leur écriture.

Résoudre des problèmes

✓ Les problèmes à résoudre par les élèves peuvent être des **problèmes de mobilisation et d'approfondissement des connaissances** ou des problèmes de recherche destinés à développer le goût du raisonnement.

✓ Il existe aussi des problèmes visant la **construction d'une nouvelle connaissance**. C'est le cas des **problèmes de partage ou de groupements**, dont la résolution sert à aborder la division de deux nombres entiers en CE1.

La résolution de problèmes concerne tous les domaines du programme : le calcul, la géométrie, les grandeurs et mesures, l'organisation et la gestion de données.

✓ Selon les connaissances et les capacités des élèves à un instant donné, les problèmes peuvent être résolus en utilisant une **procédure experte** ou une **procédure personnelle**.

Voici un problème extrait de l'évaluation à l'entrée en sixième de 2002, destiné à des élèves de la fin du cycle 3, permettant de préciser la distinction entre ces termes.

Exemple :

Emma a un paquet de bonbons. Elle donne 8 bonbons à chacun de ses cinq camarades. Il lui en reste 3. Combien y avait-il de bonbons dans le paquet ?

Résolution :

On attend d'un élève de fin de cycle 3 qu'il déterminer les deux étapes de la résolution :

1. Déterminer le nombre de bonbons donnés ;

2. Déterminer ensuite le nombre de bonbons qu'il y avait dans le paquet.

* A partir de là, on attend que, pour calculer le nombre de bonbons distribués, il utilise le produit de 8 par 5 (résultat mémorisé) et qu'ensuite il additionne 40 et 3 pour fournir la réponse. Il utilise alors le même raisonnement et les mêmes calculs qu'une personne experte. On parle alors de procédure (ou de solution) experte.

* Si l'élève a compris la situation et la question posée et si, pour la première étape, il ne reconnaît pas que le recours au produit de 8 par 5 est efficace (ou s'il a oublié le résultat), il peut utiliser d'autres modes de résolution, comme calculer 8 + 8 + 8 + 8 + 8 ou même schématiser les cinq groupes de 8 bonbons et procéder à un dénombrement. Il utilise un mode de résolution correct, mais différent de celui mis en œuvre par une personne experte. On parle alors de procédure (ou de solution) personnelle.

✓ Les problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées et à les exercer sont des **problèmes de réinvestissement ou d'application**. Comme leur nom l'indique, ce sont des problèmes pour lesquels les élèves disposent de la procédure experte qu'ils doivent mettre en œuvre pour les résoudre.

Ces problèmes de réinvestissement peuvent être des problèmes d'application d'une seule connaissance ou des problèmes de réinvestissement faisant appel à la mise en œuvre de plusieurs connaissances, dans un enchaînement d'étapes de calculs indiquées ou non dans l'énonce.

✓ Les **problèmes de recherche** sont des problèmes pour lesquels les élèves ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. C'est alors l'activité même de résolution de problème qui est privilégiée dans le but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique.

Ces situations peuvent enrichir leur représentation des mathématiques, développer leur désir de chercher, leurs capacités de résolution et la confiance qu'ils peuvent avoir dans leurs propres moyens.

Dans ces activités, l'enseignant doit créer les conditions d'une réelle activité intellectuelle des élèves. Les élèves doivent être mis en situation de prendre en charge les différentes tâches associées à la résolution d'un problème :

- Faire des hypothèses, les tester ;
- Elaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle ;
- Vérifier par eux-mêmes les résultats obtenus ;
- Formuler une réponse dans les termes du problème ;
- Expliquer leurs méthodes, les mettre en débat, argumenter.

✓ Les **problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance** sont des problèmes que l'on donne à résoudre aux élèves dans le but d'aborder la connaissance mathématique experte dont ils n'ont pas encore l'usage.

Les élèves devront toutefois pouvoir résoudre le problème proposé en usant de méthodes personnelles, ce qui signifie d'abord que la difficulté du problème ne doit pas être perçue comme insurmontable.

Mais les procédures personnelles à mettre en œuvre doivent être jugées comme suffisamment laborieuses et inadaptées pour que les élèves éprouvent le besoin d'utiliser un moyen plus performant et efficace.

Proportionnalité

Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité

A l'école primaire, on n'étudie pas la proportionnalité pour elle-même, mais on la fait fonctionner comme « outil ». Les élèves sont confrontés à de nombreux problèmes qu'ils résolvent en utilisant des raisonnements appuyés implicitement sur des propriétés de la proportionnalité.

Exemples :

- Les questions posées à l'occasion de l'étalonnage d'un verre doseur cylindrique peuvent être le point de départ d'un travail sur la proportionnalité entre masse et hauteur de liquide (sans omettre d'évoquer les imprécisions dues aux instruments de mesure et à leur utilisation).
- La notion d'échelle peut être précisée à l'occasion de l'étude de cartes en géographie.
- Les quelques conversions d'unités envisagées seront aussi reliées à la proportionnalité.

✓ Dans les programmes 2008, la « règle de trois », procédure experte, est explicitement requises dans l'éventail des procédures que doivent utiliser les élèves, les procédures attendues des élèves sont donc plutôt des procédures expertes s'appuyant sur :

- La propriété de linéarité : additive et multiplicative, c'est la propriété qui est le plus souvent utilisée : idée de « fois plus » (si j'achète trois fois plus d'objets, je paierai une somme trois fois plus importante …) ;
- Le coefficient de proportionnalité, il s'utilise dans le cas où est mise en jeu une relation entre grandeurs de même nature :
    - Mélanges (cinq fois plus d'eau que de sirop dans un verre par exemple),
    - Agrandissement ou réduction de figures et d'échelles (les dimensions sur le papier sont cent fois plus petites que dans la réalité).

✓ La notion de proportionnalité, à la fin de l'école primaire, est donc liée au fonctionnement de certains types de raisonnements contextualisés, appuyés sur l''une des deux propriétés que sont la linéarité (multiplicative et additive) et l'existence du coefficient de proportionnalité, qui engendrent des procédures comme la « règle de trois », le retour à l'unité, le produit en croix ou la méthode graphique.

Des situations om ces types de raisonnement ne fonctionnent pas peuvent être proposées (situations de non-proportionnalité).

Les situations mettant en jeu les notions de pourcentage, de vitesse, d'échelle ou encore de changements d'unités sont donc résolues en référence au sens.

Exemple :

Un objet coûte 240€, il subit une hausse de 20%. De combien son prix augmentera-t-il ?

Résolution

Pour calculer cette augmentation, à la fin de l'école primaire les élèves peuvent utiliser un raisonnement du type :

« Pour 100€, la hausse est de 20€ ; pour 200€, elle est de 40€ ; pour 10€ elle est de 2€, pour 40€, elle est donc de 8€, et pour 240€, elle sera de 48€. »

La procédure experte pour calculer l'augmentation n'est enseignée qu'en sixième (pour prendre 20% de 240, on calcule 240 x 0,20 ou 240 x 20 / 100) et en troisième, les élèves apprendront à trouver directement le nouveau prix (en calculant 240 x 1,20).

Lire, interpréter et construire quelques représentations : tableaux, graphiques

A l'école primaire, les élèves sont amenés à lire, interpréter et utiliser divers modes de représentation de données (tableaux, graphiques). Ce travail se poursuit au collège dans le domaine des statistiques.

Dans un premier temps, les élèves sont mis en situation de lecture et d'interprétation de ces différents types de présentation des données, puis, dans des cas simples, des situations de proportionnalité, en situation de production.

Agrandir ou réduire une figure plane

La notion d'agrandissement ou de réduction de figures fait l'objet d'une première étude, en liaison avec la proportionnalité, et conduit à une approche de la notion d'échelle.

Les mots « agrandie » et « réduire » ont, en géométrie, un sens particulier (différent de celui qu'ils ont souvent dans le langage courant) : ils impliquent la conservation des angles, du parallélisme, de la perpendicularité, des milieux ainsi que la proportionnalité des longueurs des côtés qui se correspondent.

La réalisation de plans, de maquettes peut constituer une source d'activités sur ce thème. Le quadrillage peut par exemple être utilisé comme outil pour réduire ou agrandir une carte. La réalisation d'une figure agrandie ou réduite peut être demandée en indiquant au préalable la valeur du coefficient d'agrandissement ou de réduction, ou les longueurs de deux côtés qui se correspondent.

Espace et géométrie

Définir l'espace

D'après les travaux faits en didactiques, l'espace peut être divisé en trois catégories selon les tailles respectives du sujet et des objets.

Ces catégories peuvent être des outils utiles pour l'analyse des situations.

- Micro-espace

C'est l'espace des interactions liées à la manipulation des petits objets.

<u>Exemple</u> : L'espace déterminé par l'environnement de la table de l'enfant.

- Méso-espace

C'est l'espace des déplacements du sujet dans le domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet.

<u>Exemple</u> : L'espace déterminé par l'environnement de la classe de l'enfant.

- Macro-espace

C'est l'espace accessible uniquement à des visions partielles. Les objets y sont fixes et une partie seulement est sous le contrôle de la vue.

<u>Exemple</u> : Le village ou le quartier de l'enfant, sa ville, etc. …

Distinguer un solide et vérifier certaines propriétés relatives aux faces ou à l'aide des instruments

Au cycle 2, l'objectif est de permettre l'analyse perceptive d'un solide (cube et pavé droit) de différents points de vue : comme objet de l'espace différent d'autres objets, comme morceau de l'espace limité par des faces ou à partir de ses arêtes.

Des activités de classement de divers solides ou des activités du type « jeu du portrait » permettent, par comparaison, de mettre en évidence et de formaliser quelques propriétés simples caractérisant ces solides (propriétés relatives en particulier à la forme des faces, au nombre de faces ou de sommets).

Des problèmes de reproduction de solides sont proposés en utilisant des matériaux (par exemple : pâte à modeler, faces prédécoupées, tiges prédécoupées pour les arêtes) ou par assemblage d'autres solides (jeu de cubes par exemple).

Au cycle 3, les compétences sont relatives à une liste limitée de solides, mais les activités qui permettent de construire ces compétences peuvent concerner d'autres solides (prisme, pyramide, sphère, cylindre, cône).

Le travail sur la perspective cavalière relève du collège : seules des activités relatives à la lecture de telles représentations sont envisagées (reconnaissance de certains solides ou mise en correspondance du solide réel avec une représentation en perspective).

Le solide est identifié et nommé parmi d'autres solides ou parmi des représentations planes de solides (vues, patrons).

Construire un solide

Au cycle 3, la construction est réalisée à partir d'éléments simples (faces rectangulaires ou triangulaires), en assemblant des solides simples ou en utilisant des patrons.

Le recours à des matériels variés permet d'insister sur des aspects différents d'un solide (carton pour les faces, tiges pour les arêtes) et d'envisager, par exemple, la reproduction d'un solide construit à partir de ses arêtes (tiges) à l'aide de ses faces (carton).

Reconnaître, construire ou compléter un patron de cube, de parallélépipède rectangle

Au cycle 3, pour les solides, les activités où s'établissent des relations entre espace et plan sont privilégiées.

Par exemple, la description d'un solide conduit à prendre des empreintes des faces, à s'interroger sur la nature de ces faces ; la nécessité d'en construire un autre identique amène à l'élaboration d'un patron du solide, puis à son remontage.

D'autres solides que le cube ou le parallélépipède rectangle peuvent donner lieu à la réalisation de patrons.

Utiliser le vocabulaire spécifique à la géométrie dans l'espace

Au cycle 2, les élèves utilisent les mots suivants : cube, pavé droit, face, arête, sommet.

En revanche, le vocabulaire relatif aux solides doit être limité. Les mots polyèdre, boule, cylindre ne sont pas exigés, mais ils sont utilisés occasionnellement par l'enseignant.

Au cycle 3, les élèves utilisent, en plus du vocabulaire acquis au cycle 2, le mot parallélépipède rectangle.

Construire des figures complexes par assemblage de figures simples

On appelle **tangram** certains puzzles de formes géométriques. Il existe essentiellement des tangrams carrés et des tangrams « œufs ». Ce matériel peut être utilisé dès le cycle 1, selon la nature des tâches des élèves.

Exemple : **le tangram carré**

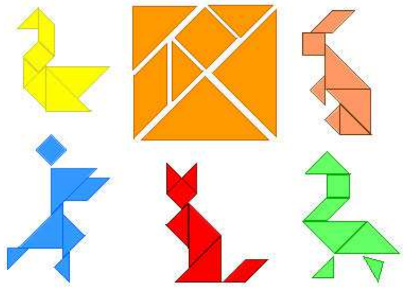
Ce tangram est un puzzle de carré découpé en 7 formes géométriques : carré, triangle, parallélogramme.

Il permet notamment de travailler la structuration de l'espace projectif plan (la feuille de papier qui va devenir le lieu essentiel de « l'activité géométrique ») :

- Droite, gauche ;
- Haut, bas.

Exemple :

Une activité que l'on peut mener en classe avec un tangram consiste à reconstituer des silhouettes d'animaux à partir d'un modèle.



Cette activité met en œuvre des compétences :

- De reconnaissance de formes ;
- De repérage dans le plan ;
- D'orientation ;
- De décomposition d'une figure complexe en figures géométriques simples.

Le tangram est un matériel assez fréquemment utilisé dans les classes.

Il présente de nombreux avantages dont celui de pouvoir être fabrique par les enfants eux-mêmes. Ainsi chacun dispose de son propre matériel pour des activités qui peuvent être récurrentes et progressives.

Autres exemples : le tangram « œuf » et le tangram « cœur »

Reconnaître et compléter le patron d'un cube

- **Cube et pavé droit**

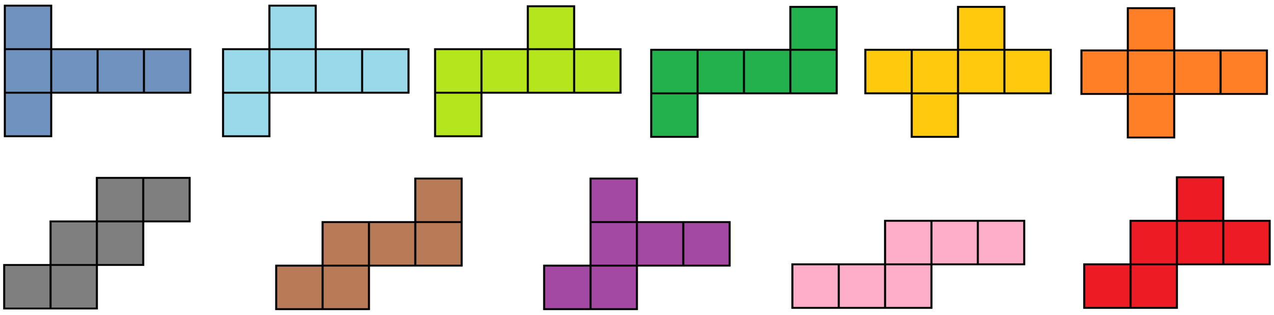
Le cube et le pavé droit sont deux volumes droits retenus dans les programmes, qui vont permettre de développer des connaissances et des capacités dans le domaine du passage de la géométrie plane à la géométrie dans l'espace.

Ces connaissance et capacités seront ensuite étendues à d'autres volumes droits : cylindre et prismes.

La connaissance de ces deux volumes s'appuie sur des caractéristiques de leurs patrons ainsi que sur quelques éléments de leurs représentations planes en perspective cavalière.

- **Le patron du cube est un assemblage ordonné de six carrés isométriques (superposables)**

Les onze patrons d'un cube sont représentés ci-dessous :

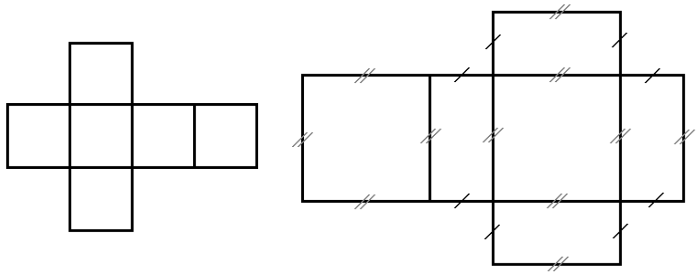


Les autres assemblages de six carrés isométriques ne permettraient pas la construction d'un cube : il y aurait alors des « trous » et de faces qui se chevauchent ou des impossibilités de construction.

La connaissance de ces onze patrons n'est pas requise pour les élèves.

- **Le pavé droit est une variante du cube**

Les faces sont des rectangles qui sont isométriques par paires. Les mêmes problèmes relatifs à la construction du pavé se posent.



Il existe 54 patrons pour un pavé droit.

- **Patrons**

On se limite ici aux patrons de polyèdres (solides droits).

La capacité à reconnaître un « bon patron » nécessite de nombreuses compétences qui relèvent de l'anticipation mentale de la construction effective du solide.

Ces compétences sont travaillées progressivement :

✓ La connaissance d'un objet comme le cube (ou le pavé droit) passe dans un premier temps par l'observation.

Le cube est un objet de micro-espace, sa connaissance peut être développée en multipliant les points de vue :
- On comptera les faces, on identifiera leurs formes, etc. … ;
- On regarder de dessus, de dessous, sur le côté, etc., on pourra utiliser un appareil photo numérique.

Ces activités peuvent être menées dès la grande section de maternelle.

✓ La connaissance de ce même objet pourra ensuite être prolongée par sa « mise à plat » :
- On pourra faire « rouler » un cube sur une plaque de pâte à modeler pour voir les empreintes laissées par le cube (ou le pavé droit) ;
- On pourra faire « rouler » un cube sur une feuille de papier blanc et suivre le contour de chacune de ses faces pour obtenir un tracé des empreintes du cube ;
- On pourra « emballer » le cube. En dépliant l'emballage, on verra apparaître les faces et les arêtes du solide.

✓ Chacune de ces activités est l'occasion de développer un usage précis du vocabulaire : face et arête.

✓ La connaissance des volumes s'appuiera ensuite sur des activités relatives aux patrons de ces volumes ainsi que sur leurs représentations planes.

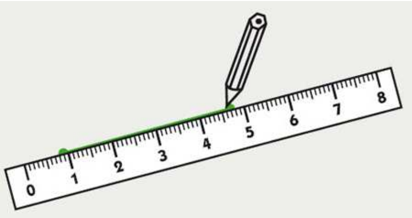
Les élèves devront apprendre à identifier un « bon patron » en s'appuyant sur :
- Le nombre de faces ;
- La forme des faces ;
- L'ordonnancement des faces.

Points, droite, segments, perpendicularité

Tracer à la règle

Le tracé à la règle, par exemple, pour joindre deux points ou prolonger un segment déjà tracé, présente des difficultés pour les élèves, en particulier pour maintenir la règle ou positionner le crayon sur la règle.

Il nécessite un apprentissage spécifique et un entraînement régulier, pour développer l'habileté manuelle, la concentration et l'attention.



Reconnaître l'angle droit

Une première activité peut consister à identifier de manière perceptive (= sans instruments) que des angles sont droits, puis à le vérifier à l'aide d'un gabarit.

<u>Exemple</u> :

On peut utiliser comme gabarit le coin d'une feuille de papier, ou une feuille pliée en quatre.

On peut également différent objet de la classe (légos, boîte …).

L'équerre traditionnelle de l'écolier peut engendrer des représentations erronées relatives à l'angle droit (confusion avec le triangle, qui est la forme de l'équerre).

Reconnaître la perpendicularité ou le parallélisme de deux droites

L'utilisation de tracés à main levée joue un rôle important dans la mise en place d'images mentales relatives au parallélisme et à la perpendicularité, de même que la recherche de procédés pour obtenir des droites perpendiculaires ou parallèles par pliage d'une feuille de papier.

Pour les droites parallèles, la propriété d'écart constant entre ces droites sera mise en évidence et utilisée pour les activités de reconnaissance ou de construction.

Les situations de perpendicularité et de parallélisme rencontrées ne doivent pas se limiter aux représentations liées aux positions verticales et horizontales de droites parallèles aux bords de la feuille de papier.

Par ailleurs, les élèves doivent être confrontés à des cas où, pour décider si deux droites sont parallèles ou perpendiculaires, il est nécessaire de prolonger les traits qui représentent ces droites.

Le travail sur les droites perpendiculaires et les droites parallèles aboutit à une synthèse sur les positions relatives possibles de deux droites :

- Droites non sécantes (droites parallèles) ;
- Droites sécantes en prenant en considération leur inclinaison relative (notion d'angle) ;
- Droites qui se coupent en faisant quatre angles égaux (droites perpendiculaires).

Vérifier ou construire l'alignement : le point, le segment, la droite

- **La feuille de papier**

✓ <u>La feuille de papier, espace de l'activité géométrique</u>

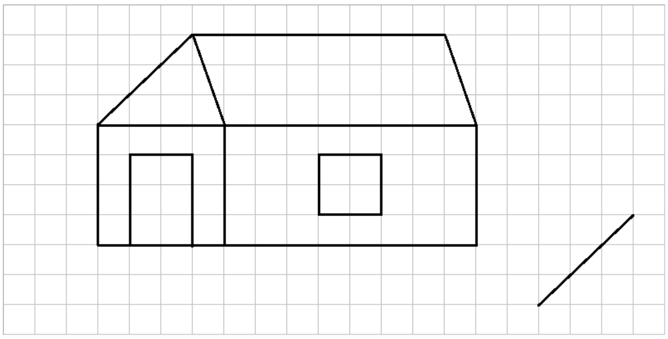
Rappelons que l'objectif de l'école maternelle est de passer de l'espace vécu à l'espace représenté. La géométrie à l'école maternelle se situe dans le cadre de « la découverte du monde ».

Au début du cycle 2, l'espace de la feuille devient le lieu des activités géométriques.

✓ <u>La feuille, espace projectif structuré</u>

La feuille de papier blanc devient progressivement un espace projectif structuré. Pour aider et accompagner les élèves dans cet apprentissage, on utilise des feuilles de papier quadrillées.

Exemple : Activité de reproduction d'un dessin géométrique de maison



Consigne : « Reproduis la maison ; on a déjà commencé à tracer un trait. »

Pour effectuer cette tâche, l'élève peut à la fois :

- S'appuyer sur une *vision globale* de la figure ; il s'agit de réaliser le dessin d'une maison ;
- S'appuyer sur une *vision locale* de la figure ; la maison est un ensemble de traits droits qui relient des nœuds du maillage. Le papier quadrillé permet en l'occurrence de respecter sans trop de difficultés liées aux instruments de tracé, la longueur et l'orientation des « traits droits » (segments) à tracer ;
- S'appuyer sur une *vision analytique* de la figure : cette maison est composée de triangles, rectangles, carrés, parallélogrammes.

Ce type d'activité géométrique va permettre à l'enfant de concevoir progressivement l'espace de la feuille blanche comme un espace structuré avec, haut, bas, droite, gauche …

- **Les premiers concepts de la géométrie euclidienne**

✓ Le point

Sur la feuille blanche, le nœud du maillage devient une localisation qui permet d'introduire la notion euclidienne de point : les points sont des positions locales précises représentées de différentes manières et nommées.

✓ La droite

Le concept euclidien de droite est abordé de deux façons :

- Le trait droit, la règle, etc. … ;
- L'alignement qui correspond à la position relative de points.

L'alignement a aussi été éprouvé par les enfants au cours de diverses activités motrices, jeux d'équipes par exemple, notamment avec la consigne souvent entendue : « Mettez-vous en rang ! »

L'alignement d'abord éprouvé dans l'espace vécu est ensuite transféré dans l'espace représenté et appliqué aux points de la feuille.

✓ Le segment

Au cycle 2, la droite n'est jamais qu'un trait droit :

- Conceptuellement et visuellement, ce qui en jeu, c'est l'alignement ;
- Au point de vue moteur, c'est la capacité à utiliser un premier instrument de tracé : la règle.

A aucun moment n'est abordé le caractère infini de cette notion euclidienne qu'est la droite.

On utilise néanmoins le nom de droite plutôt que celui de segment de droite lorsque le trait peut toujours être continué.

La notion de segment est abordée de deux façons :

- Trait droit qui rejoint deux points donnés ;
- Trait droit qui mesure x centimètres.

Pour comprendre les difficultés éprouvées par les enfants au cours de ces apprentissages, il peut être utile d'avoir en mémoire ce type de travaux d'élèves :

Exemple :

Consigne : « Relie par un trait droit les deux points A et B. »

On peut noter ici les difficultés que peut éprouver un enfant :

- à comprendre la notion de point. Il relie plutôt les lettres qui nomment les points que les positions locales précisent que représentent ces points ;
- à utiliser de manière satisfaisante l'instrument de tracé. Il peut éprouver des difficultés de coordination des différents mouvements nécessaires à la réussite du tracé.

- **Les instruments de tracé : les compétences instrumentales**

La règle est un instrument qui permet de tracer des traits droits.

La règle graduée va, en plus, permettre de tracer des segments d'une longueur déterminée, c'est aussi une représentation de l'alignement.

La **règle** peut être fabriquée par simple pliage d'une feuille de papier :
- Prendre une feuille de papier ;
- La plier en deux, bord à bord ;
- Marquer le pli.

On obtient une règle !

- **Les compétences langagières**

Exemple :

Considérons à nouveau un enfant à qui l'on passe la consigne suivante :

« Trace un trait droit qui relie les points A et B. »

L'enfant semble perplexe devant la tâche à accomplir et incapable de coordonner les mouvements nécessaires pour prendre en compte toutes les données.

Cela peut provenir du fait que parfois les enfants assimilent le mot droit à « horizontal » ou « vertical » (droit est compris en opposition à « penché »), la tâche devient alors impossible et l'enfant s'y perd.

Percevoir et reconnaître l'angle droit

- **Perpendicularité**

Comme l'alignement, la perpendicularité peut être éprouvée par les élèves à l'école maternelle et au début du cycle 2 notamment :
- Dans des activités de construction (empilage de cubes, etc.) ;
- En s'appuyant sur les orientations horizontale et verticale.

C'est dans le cadre de l'espace vécu que le concept de perpendicularité peut d'abord être rencontré par les élèves.

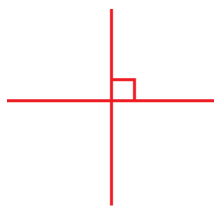
Ceci peut permettre de passer ensuite à l'observation d'objets qui nous entourent :
- Micro espace (boîte à chaussure) ;
- Méso espace (table, bureau, etc.) :
- Macro espace (la classe).

- **Perpendicularité et angle droit**

La notion de perpendicularité dans le plan de la feuille caractérise la position relative de deux droites l'une par rapport à l'autre. Cette notion est comprise facilement lorsque l'on se réfère par exemple au maillage du **papier quadrillé**.

Lorsque la feuille quadrillée est devant nous, les lignes horizontales et les lignes verticales sont perpendiculaires, elles forment un angle droit.

Le passage au papier blanc se fait sans trop de difficulté dès lors que les droites représentées sont parallèles aux bords de la feuille ; il est alors aisé de « voir » l'angle droit :



Mais dès lors que les droites sont obliques, il devient plus difficile de percevoir le caractère invariant de l'angle droit :

Deux types de progressions sont alors rencontrés.

✓ Premier type

Dans la continuité de ce qui a été travaillé à l'école maternelle, l'angle droit est le premier des angles rencontrés, en lien avec la perpendicularité (horizontal, vertical).

Les premières activités liées à cette notion doivent permettre aux élèves d'apprécier « au jugé » (vision globale) si un angle est bien droit (si la maison qu'on est en train de dessiner va tenir debout ou pas).

Il devient assez vite nécessaire, notamment lorsque l'orientation des droites change, de se munir d'un instrument qui va permettre de vérifier si notre appréciation « au jugé » est valide ou non : l'équerre.

L'équerre est un gabarit (modèle déplaçable) d'angle droit.

✓ Deuxième type

La notion d'angle est définie comme étant déterminée par deux demi-droites de même origine. L'angle droit est présenté comme un angle particulier.

L'équerre

L'équerre est un instrument pratique, il est aisé d'en confectionner une (même cheminement que pour la confection d'une règle).

Une fois l'équerre fabriquée :

- On déplie et on voit apparaître deux droites perpendiculaires ;
- On replie, on dispose d'un gabarit d'angle droit, une équerre.

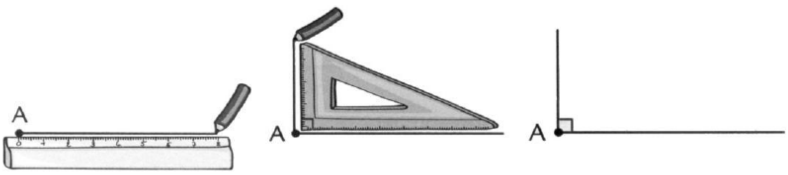
Cependant, l'équerre est un instrument difficile à utiliser, même pour la simple tâche de vérification. Il nécessite une coordination des mouvements qui n'est pas simple pour les enfants de CP et CE1.

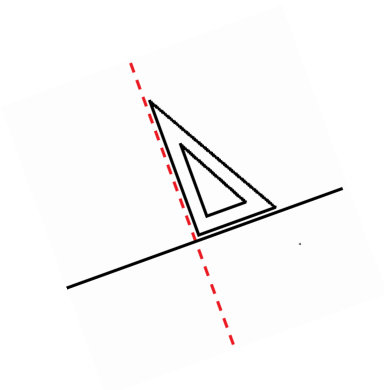
Exemple :

L'élève ne sait pas lequel des trois angles de l'équerre il doit utiliser, il ne sait pas orienter son instrument pour vérifier la perpendicularité de deux droites.

Les tracés à l'équerre

Tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée.





Triangles et cercle

Dessiner un triangle

A l'école maternelle, le dessin des triangles est obtenu en utilisant des gabarits.

<u>Exemple</u> :

On pose sur une feuiller une forme triangulaire en plastique ou en bois et on suit le pourtour de cette forme sur la feuille avec un feutre ou un crayon.

Au cycle 2, les dessins sont obtenus par des tracés à la règle.

Distinguer de manière perceptive un triangle et un cercle parmi d'autres figures planes

Au cycle 2, des activités de classement de diverses figures permettent, par comparaison, de mettre en évidence et de formaliser quelques propriétés simples caractérisant le triangle et le cercle.

<u>Exemple</u> :

Un triangle quelconque a nécessairement 3 côtés.
Un triangle rectangle est caractérisé par un angle droit.
Un cercle est caractérisé par son centre et son diamètre.

Des problèmes de reproduction de solides sont également proposés en utilisant des matériaux (pâte à modeler, faces prédécoupées, tiges prédécoupées pour les arêtes) ou par assemblage d'autres solides (jeu de cubes).

Repérer une case ou un point sur un quadrillage

Au cycle 3, un point ou une case peuvent être repérés de plusieurs façons :

- En utilisant des axes privilégiés : case (A ; 4) ou (4 ; A), point (5 ; 2) (dans ce dernier car, il est nécessaire d'avoir décidé quel est l'ordre dans lequel les axes sont utilisés) ;
- Par rapport à un point donné, en imaginant un déplacement : « par rapport au point P, le point Q est à 3 vers la droite et à 3 vers le haut. »

Reconnaître et reconstruire un triangle et un cercle (à l'aide d'un compas)

Les triangles sont reconnus à partir de propriétés relatives aux longueurs des côtés, au parallélisme ou à la perpendicularité.

Au cycle 3, les élèves développent des compétences techniques liées au maniement d'instruments de dessin tels que le compas, et ce afin de tracer des cercles ou des arcs de cercle, ou encore de reporter des longueurs. Mais la construction d'un triangle à l'aide du compas, à partir de la donnée des longueurs des trois côtés, n'est pas une compétence exigible à la fin du cycle 3. Cependant, un premier travail peut être conduit avec les élèves à ce sujet.

<u>Exemple</u> :

Placer rapidement le plus possibles de points situés à une distance donnée d'un point donné, chercher à localiser des points dont les distances respectives à deux points donnés sont connues.

Pour le cercle, diverses constructions sont envisagées :

- à partir de la donnée du centre et de la longueur du rayon ou du diamètre,
- à partir de la donnée du centre et d'un point du cercle,
- à partir de la donnée d'un diamètre.

Construire un cercle avec un compas, tracer une figure à partir d'un programme de construction

✓ Au cycle 3, cercle et disque occupent une place peu importante dans les programmes. L'accent est mis sur :

- La reconnaissance du cercle ;
- Son tracé à l'aide du compas ;
- La maîtrise du vocabulaire : centre, rayon, diamètre.

✓ Les progressions des situations proposées en classe, séances et séquences, visent à faire en sorte que les élèves, petit à petit, intériorisent les concepts de cercle et disque et passent du dessin à la figure.

✓ Si les élèves n'ont aucune difficulté à reconnaître un cercle lorsqu'il est tracé et achevé, ils ne l'identifient pas forcément lorsqu'il n'est que partiellement tracé ou encore symbolisé par une série de points.

✓ La seule connaissance de la définition du cercle (ensemble des points situés à égale distance d'un point donné) ne garantit pas la maîtrise des concepts cercle et disque.

Lorsque les élèves découvrent la **notion de cercle**, ils ont tendance à la rattacher à :

- Une forme, le rond. La perception est globale, la notion de centre n'est pas perçue ;
- Un instrument, le compas, qui sert à tracer des ronds.

Pour vérifier qu'une figure est un cercle et que des points sont situés sur un même cercle, les élèves se posent la question suivante : « est-ce que je peux tracer un rond avec mon compas qui recouvre (ou passe par) tous ces points ? »

Le cercle est alors un dessin. Il faut amener progressivement les élèves vers le concept de cercle défini comme lieu géométrique des points équidistants d'un point donné ;

✓ Pour ce faire, plusieurs types d'activités peuvent être envisagés :

- Des exercices d'identification et de recherche tels que celui que nous avons étudié précédemment ;
- Des activités de construction de figures plus ou moins complexes. Avant même de procéder aux tracés, les élèves seront amenés à se poser les questions relatives aux positions des centres et aux mesures des rayons.

✓ On vise également la maîtrise de l'instrument compas dont l'appropriation par les élèves est souvent délicate. Les tracés ne sont pas suffisamment précis et cela nuit à l'appropriation du concept de cercle par les élèves.

✓ Un travail constant sur la précision du vocabulaire doit également être mis en œuvre afin que les élèves sachent faire la différence entre un cercle et un milieu et utilisent à bon escient des termes comme rayon, diamètre, etc. …

On veillera à bien distinguer les usages : par exemple, l'emploi de « un rayon » ou « le rayon » dépend du contexte dans lequel on se place.

On sera de plus en plus exigeant sur la façon de nommer les segments qui correspondent au rayon et au diamètre.

Les quadrilatères

Comparer, classer et ranger des objets selon leur forme

Très tôt, le jeune enfant est capable de reconnaître une forme, bien avant de l'analyser, de la nommer, d'en repérer des propriétés ou d'en donner une première définition.

✓ Dès la **petite section**, les enfants commencent à différencier globalement des formes figuratives et des formes simples par la vue et par le toucher. Dans les jeux d'emboîtement, d'encastrement ou avec des puzzles, l'élève doit identifier la pièce puis la bonne orientation pour faire coïncider une face avec le trou ou l'empreinte. Il est en effet essentiel que l'enfant observe des formes placées dans des positions variées afin de percevoir l'invariance d'une forme par rapport aux déplacements qu'elle peut subir.

Les jeux de reconnaissance tactile, par exemple ceux où il s'agit de sortir d'un sac exactement le même objet que celui montré ou désigné, contribuent à l'appréhension des formes.

Les jeux de Kim (retrouver un objet enlevé ou déplacé dans un lot d'objets) incitent à construire des images spatiales pour mémoriser.

Des classements de lots de formes variées toutes de même couleur et épaisseur, des jeux des dominos des formes (conduisant à associer des formes superposables) renforcent ces premières connaissances.

Ces activités sont aussi l'occasion pour le maître d'utiliser du vocabulaire et de vérifier sa compréhension (rond, arrondi, pointu, plat, droit).

✓ En **moyenne section**, le travail sur les formes se poursuit à l'aide d'activités identiques à celles mises en œuvre en petite section, mais le nombre de formes différentes augmente et elles sont plus souvent présentées dans différentes positions. Les formes géométriques simples que les enfants savent désigner sont plus nombreuses : carrés, rectangles, etc. … Pour aider à la perception des formes et à leur description, les enfants peuvent être amenés à reconnaître la pièce qui ne va pas dans une collection de formes proposées. Il est en effet souvent plus facile de dire pourquoi ce n'est pas pareil que de dire ce qui est commun à un ensemble d'objets regroupés.

De nombreuses activités, de décoration par exemple, peuvent être proposées pour travailler des algorithmes où les enfants utilisent des gommettes de formes géométriques simples. Des jeux associant formes et grandeurs sont également proposés. Certaines activités conduisent à associer un objet à une de ses représentations (photo, dessin). Les enfants représentent eux-mêmes certaines formes, par exemple en vue de les faire identifier par d'autres enfants.

✓ En **grande section**, des formes simples telles que le carré, le rectangle sont reconnues et nommées. De plus, sans que cela constitue une compétence à acquérir, les enfants peuvent différencier des formes en énonçant, dans leur langage, certaines de leurs propriétés mathématiques (bord droit, bord courbe …). Les sommets ou « coins » des figures sont perçus et touchés du doigt, les côtés ou « bords » sont suivis avec le doigt. Ces figures sont reconnues dans des assemblages complexes, par exemple, dans une composition artistique. Elles sont également identifiées et utilisées pour réaliser des solides qui peuvent être construits avec différents matériaux (pâte à modeler, pailles, figures planes emboîtables …).

Comme en moyenne section des activités conduisant à associer un objet à certaines de ses représentations (photo, dessin) sont proposées. Les enfants deviennent davantage capables de représenter eux-mêmes certaines formes, en particulier dans des jeux de communication.

Reconnaître, identifier et décrire des quadrilatères de manière perceptive

Au cycle 2, lors de la résolution de la plupart des problèmes de géométrie, les élèves vont d'abord prélever des propriétés de façon perceptive, puis être amenés à utiliser les instruments de géométrie pour vérifier les hypothèses émises.

<u>Exemple :</u>

> En début de cycle, pour tracer un carré en choisissant quatre points parmi un ensemble de points donnés, les élèves tracent simplement ce qu'ils pensent être un carré. En revanche, en fin de cycle, ils accompagnent ce tracé d'une vérification qui s'appuie sur des propriétés du carré (longueur des côtés et angles droits, par exemple) et fait appel à l'usage d'instruments de géométrie.

Les problèmes proposés sur des figures simples et sur d'autres figures moins familières donnent l'occasion d'identifier et d'utiliser certaines de leurs caractéristiques. Des activités de classement de diverses figures ou des activités du type « jeu du portrait » permettent, par comparaison, de mettre en évidence et de formaliser quelques propriétés simples caractérisant ces figures (lignes polygonales ou lignes courbes fermées, nombre de côtés et de sommets). Ces activités donnent aux élèves l'occasion de fréquenter des figures usuelles telles que le losange, le parallélogramme et le cerf-volant.

Les figures utilisées doivent être de différentes tailles, présentées dans des positions variées, notamment en travaillant avec des figures découpées que l'élève peut manipuler. L'utilisation du rétroprojecteur permet de présenter facilement une même figure dans différentes positions.

Les élèves sont capables de vérifier si une figure est un carré ou un rectangle dans des situations de reproduction, de construction ou de description d'une figure. Les élèves sont incités à vérifier les angles droits et les longueurs des côtés même si, le plus souvent, les vérifications sont redondantes. Les longueurs des côtés sont comparées à l'aide d'un gabarit (bande de papier) ou mesurées avec une règle graduée (la graduation étant réalisée à l'aide d'une seule unité, le centimètre).

Au cycle 3, les activités concernent également les quadrilatères particuliers tels que le trapèze, le cerf-volant et le parallélogramme.

L'indentification d'une figure peut être faite :

- Globalement (par lecture visuelle) ;
- Par un repérage perceptif de propriétés : parallélisme, présence d'angles droits, égalité de longueur de segments.

Par ailleurs, pour vérifier l'existence d'une figure simple dans une configuration complexe, les élèves ont recours aux propriétés et aux instruments. Le recours aux instruments vient valider les hypothèses faites sur des propriétés supposées.

Enfin, la capacité à décrire une figure est vérifiée par l'élaboration d'un message contenant toutes les informations nécessaires à la reproduction de la figure.

Selon l'activité proposée, deux types de description peuvent être utilisés :

- Enoncé de propriétés que vérifie la figure choisie ;
- Enoncé de la suite des étapes qui permettent de construire la figure (programme de construction).

Reproduire, compléter et tracer une figure

Au **cycle 2**, les figures à reproduire sont des figures ou des assemblages de figures polygonales données sur **papier quadrillé**. Les sommets sont des nœuds du quadrillage, les côtés pouvant ne pas suivre des lignes de ce quadrillage. Les procédures utilisées lors de la résolution de ce type de problèmes font en général appel au repérage. Elles doivent faire l'objet d'explications et de débats entre élèves.

Sur papier non quadrillée, il est aussi possible de faire réaliser la figure modèle en joignant des points à choisir parmi des points donnés.

Au **cycle 3**, selon le problème posé, on peut préciser l'emploi d'instruments de dessin précis ou de demander aux élèves de choisir l'instrument le mieux adapté (papier calque, papier quadrillé ou pointé, règle, équerre). Pour le carré et le rectangle, les élèves sont confrontés à des exercices de constructions à partir de la donnée d'un ou deux côtés tracés ou à partir de la seule donnée des longueurs de ces côtés.

En fin de cycle, des tracés à main levée accompagnés de données codées (mesures, symboles d'égalité de segments, d'angles droits) peuvent être proposés par l'enseignant en vue de faire construire une figure, à condition que les codés utilisés aient acquis une signification pour les élèves.

Reconnaître et nommer un quadrilatère, vérifier sa nature

C1

Dès le cycle 1, les élèves distinguent les différentes formes planes.

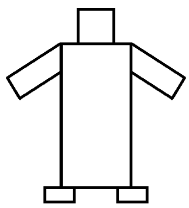
Ils manipulent ces formes (en plastique ou en bois) dans des activités :

- De tri et de classement ;
- De puzzle ;
- De pavage (réalisation de mosaïque).

Toutes ces activités permettent de développer chez l'enfant une connaissance kinesthésique des figures planes. Les enfants de cycle1 pourront également rencontrer des activités sur papier

Exemple :

Découper les formes qui permettront de réaliser un pantin stylisé, un clown, etc. …



Des activités de tracés pourront commencer en utilisant ces diverses formes planes comme des gabarits : le dessin du carré est obtenu en traçant le pourtour de l'objet carré.

Progressivement, les enfants acquièrent la capacité de nommer les figures planes qu'ils rencontrent et manipulent telles que le rectangle et le carré.

C2

Au cycle 2, le lieu essentiel des activités géométriques devient l'espace feuille (passage de l'espace vécu à l'espace représenté).

Pour reconnaître une figure géométrique et la nommer, les élèves ne passent plus par la manipulation.

Dans un premier temps, les élèves reconnaissent les figures de manière perceptive et globale. Ils s'appuient sur l'image mentale des figures construites grâce aux connaissances kinesthésiques et aux nombreux dessins de ces figures qu'ils auront pu rencontrer.

Un des premiers obstacles de reconnaissance des figures dessinées est **l'orientation**.

Exemple :

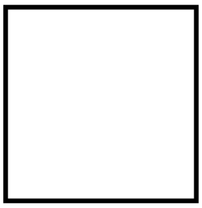


Figure 1

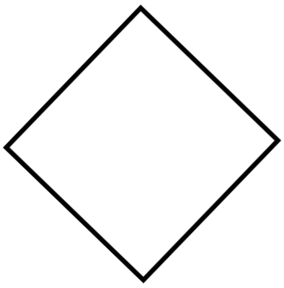


Figure 2

Souvent, les élèves n'auront pas de difficulté à reconnaître un carré à la figure 1. En revanche, la même figure orientée différemment (figure 2) ne sera plus perçues comme un carré, mais comme un losange.

Le premier carré est dit en position **prototypique** ou **canonique**.

Pour les élèves, la figure « carré » est associée à cette représentation de la figure.

Le premier enjeu de l'enseignement de la géométrie au cycle 2 concernant les quadrilatères est de dépasser cette seule perception globale de la figure et de développer des moyens de reconnaissance liés aux propriétés des figures et aux instruments de géométrie.

En effet, le carré doit être vu comme un quadrilatère qui a quatre côtés égaux et quatre angles droits.

La vision de la figure est fortement rattachée aux instruments qui permettent de vérifier ce qu'une perception globale permet d'affirmer :

- La règle graduée ou le compas (ou autre) pour comparer les longueurs des côtés ;
- L'équerre pour vérifier que les angles sont droits.

Progressivement, cette vision sera affinée grâce à la découverte de diverses propriétés de la figure (symétrie, etc. ...).

Les connaissances relatives à la figure seront organisées et rationalisées. Ainsi la figure passera du statut d'**objet perçu** au statut d'**objet conçu**.

Au cycle 2, les premières activités de tracés géométriques sont essentiellement des activités de reproduction de figure : l'élève dispose d'une figure modèle qu'il doit reproduire à l'identique.

Les activités de reproduction ne nécessitent ni les mêmes connaissances ni les mêmes capacités selon le support préconisé.

- **Papier quadrillé**

C'est un support d'aide à la structuration de l'espace feuille.

L'élève peut développer des visions globales (la figure tout entière) et des visions locales (côté après côté) de la figure.

Pour reproduire un carré sur du papier quadrillé, quelle que soit son orientation, un élève pourra reconnaître (ou pas) que la figure est un carré et ensuite tracer sa figure comme on trace un chemin, de point en point (les points sont les nœuds du maillage du papier quadrillé).

- **Papier pointé**

C'est un intermédiaire entre papier quadrillé et papier blanc.

Il ne laisse apparent que les nœuds du maillage. Les lignes horizontales et verticales ont disparu. Cela pose une difficulté supplémentaire mais laisse aussi davantage de liberté, notamment pour la conception de droites perpendiculaires et d'angles droits.

	• **Papier blanc** La reproduction sur papier blanc d'une figure comme le carré nécessite dès lors : - Des connaissances (longueurs égales, mesures, angles droits) ; - Des capacités (utiliser la règle et l'équerre).
C3	Au cycle 3, les activités géométriques relatives aux quadrilatères sont le prolongement direct de celles du cycle 2. Les objectifs restent ceux énoncés précédemment. Les activités ont de plus en plus lieu sur du papier blanc. Les figures proposées deviennent des **figures complexes** (ou composées). En effet, les élèves doivent identifier des figures simples (carré, rectangle, losange) au sein d'une figure complexe, en procédant par perception globale puis vérification à l'aide d'instruments. Les activités de tracés géométriques seront de plus en plus des **constructions** plutôt que des **représentations** de figures. La notion de **figure géométrique** s'imposera au dépend de celle de dessin géométrique (l'orientation n'est pas une caractéristique d'une figure géométrique) pour parvenir à l'objectif annoncé : « (…) Faire passer la figure du statut de l'objet perçu à celui d'objet conçu, les activités géométriques doivent s'accompagner d'un travail sur la précision du vocabulaire. »

Transformation plane, la symétrie

A l'école primaire, les élèves se familiarisent avec la symétrie par le biais d'activités d'observation de l'environnement et par la construction de figures symétriques.

Mais c'est seulement au cycle 2 que la notion de symétrie est approchée en tant que propriété, avant d'être travaillée et structurée au cycle 3. En effet, la simple observation d'objets ne suffit pas pour assurer une maîtrise correcte de cette transformation. C'est en construisant des objets de nature géométrique et en résolvant des problèmes que l'élève sera progressivement amené à concevoir certaines propriétés, à les formuler et à les utiliser.

Au cycle 2, lors de la résolution de la plupart des problèmes de géométrie, les élèves vont d'abord prélever des propriétés de façon perceptible, puis être amenés à utiliser les instruments de géométrie pour vérifier les hypothèses émises.

Repérer une case de quadrillage par rapport à une autre

La réalisation de figures symétriques sur du papier quadrillé nécessite la maîtrise de son usage.

Il s'agira notamment de savoir repérer des cases ou des nœuds du quadrillage les uns par rapport aux autres.

Au cycle 2, les descriptions utilisées peuvent prendre différentes formes. On peut parler, par exemple, de la case juste au-dessus d'une case donnée, si le quadrillage est dessiné, sur une feuille de papier ou sur le tableau.

On peut également repérer un point (nœud), ou une case, par rapport à un autre point, ou une autre case, en décrivant un déplacement pour aller de l'un à l'autre : par exemple, deux cases vers la droite et une case vers le haut.

Percevoir et reconnaître un ou plusieurs axes de symétrie d'une figure

Au cycle 2, la symétrie fait l'objet d'une première approche à l'occasion d'activités telles que l'agencement d'objets géométriques (puzzles, cubes), la réalisation de frises ou de ribambelles, le classement de figures selon l'existence d'axes de symétrie.

Les élèves sont également amenés à reconnaître un axe de symétrie par pliage.

Au cycle 3, il s'agit de poursuivre l'apprentissage sur cette transformation et de mettre en œuvre quelques-unes de ses propriétés.

Les activités conduites peuvent également prendre appui sur l'analyse ou la réalisation d'assemblages, de frises, de pavages, de puzzles, en utilisant différentes techniques : pliage, calque, miroir, gabarits. Ces activités sont l'occasion de mettre en évidence des phénomènes de déplacement, avec ou sans retournement, et ainsi de rencontrer d'autres transformations.

Construire le symétrique d'une figure par rapport à une droite donnée

Au cycle 2, des activités pour lesquelles il est demandé de compléter une figure par symétrie peuvent être proposées, sur un quadrillage à mailles carrées. Les axes de symétrie correspondent alors à des lignes du quadrillage.

Au cycle 3, les constructions sur papier quadrillé se limitent à l'utilisation d'axes de symétrie qui suivent les lignes du quadrillage ou qui sont des diagonales de ce quadrillage. Les élèves sont confrontés à quelques cas où l'axe de symétrie coupe la figure.

Par ailleurs, l'utilisation de l'ordinateur (logiciels de dessin, imagiciels) permet d'enrichir le champ d'expériences des élèves.

C1

Dès la maternelle de nombreuses activités vont permettre à l'élève d'approcher la notion de symétrie axiale orthogonale.

Conformément aux programmes, ces activités appartiennent au moins à deux registres.

- Découvrir les objets

A l'occasion de divers événements, les élèves pourront fabriquer des objets en utilisant la symétrie :

- des éléments de décor pour Noël (sapin, bonhomme de neige, etc. ...) ;
- des masques pour mardi gras ;
- des coccinelles ;
- des papillons.

Au cours de chacune de ces réalisations, les élèves seront amener à :

- plier une feuille de papier ou de carton ;
- découper selon une ligne, un tracé, etc. ... ;
- déplier pour observer l'effet obtenu.

Ces premières manipulations permettent à l'enfant de concevoir la symétrie comme le résultat d'une action de pliage autour d'un axe, mais le vocabulaire n'est pas introduit. Il s'agit de connaissances en acte.

- **Se repérer dans l'espace**

Dans ce cadre, les élèves sont invités à observer les symétries qui les entourent :
- Découverte des objets ;
- Découverte des corps (symétrie axiale dans le sens de la longueur, symétrie par rapport au miroir) ;
- Découverte d'œuvres d'art (pavages, etc. …).

Il s'agit d'une approche perceptive de la symétrie, d'une sensibilisation à cette notion. C'est aussi une approche structurante pour les élèves qui doivent notamment apprendre à distinguer leur gauche et leur droite et leur caractère relatif.

Cette première approche, qui se déploie dans l'espace vécu, s'accompagne d'une première appropriation du langage de la symétrie.

C2

Les activités relatives à la symétrie vont dès lors davantage se situer dans l'espace de la feuille.

Comme application directe des premiers apprentissages qui ont été faits en maternelle, on attendra des élèves qu'ils soient capables de reconnaître de manière perceptive les axes de symétrie d'une figure.

Une première familiarisation, dans la continuité des activités mises en place à l'école maternelle, amènera les élèves à compléter ou construire une figure par symétrie sur du papier quadrillé.

Les élèves devront avoir recours à des images mentales et à des modèles d'action qui vont leur permettre d'anticiper sur ce à quoi permettrait d'aboutir une activité de pliage et découpage.

Au-delà de la simple approche perceptive, les élèves pourront être amenés à vérifier que les axes de symétrie le sont effectivement :
- en utilisant le pliage,
- en utilisant la transparence et la superposition.

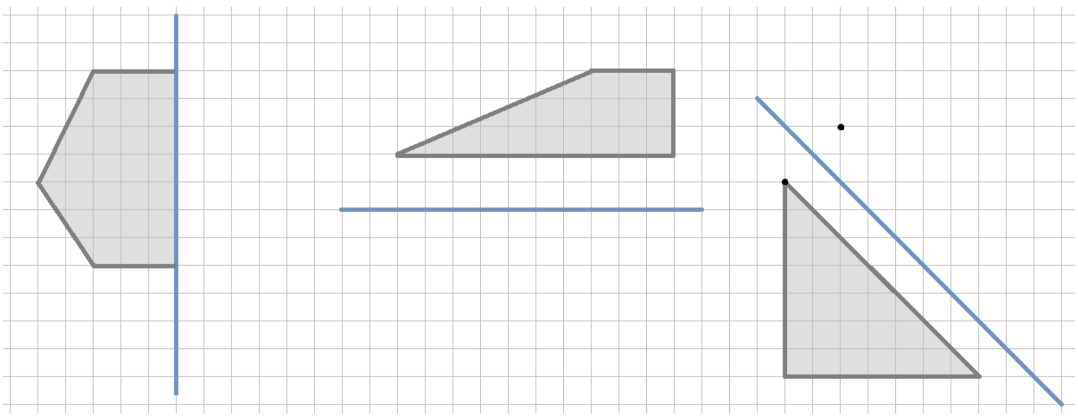
C3

C'est particulièrement au CE2 que la notion de symétrie fera l'objet d'un apprentissage systématique.

Les élèves devront alors :
- Reconnaître de manière perceptive les axes de symétrie d'une figure ;
- Vérifier que les axes sont des axes de symétrie en utilisant le pliage (effectif ou mental), le retournement et la superposition par transparence (papier calque) ;
- Compléter une figure par symétrie en utilisant le papier calque de manière précise sur papier blanc ;
- Construire une figure symétrique par rapport à un axe donné sur papier quadrillé :
  - × Avec l'utilisation de gabarit déplaçables et retournables
  - × Avec l'utilisation de papier calque

<u>Exemple</u> :

<u>Consigne</u> : Trace les figures symétriques par rapport aux axes bleus



Cet exercice fait varier divers paramètres

- **L'orientation de l'axe** :

Vertical : le plus accessible (le plus naturel ou le plus répandu) pour une anticipation de la figure obtenue après pliage.

Horizontal : plus délicat pour les élèves, ils peuvent néanmoins prendre appui sur des images de reflet dans l'eau.

Oblique : nécessite d'entrer dans des procédures abstraites.

	• **La distance avec l'axe de symétrie** : La figure est contre l'axe : figure 1. Les élèves ont tendance à envoyer la figure obtenue par symétrie à distance de l'axe, cette configuration peut donc constituer un obstacle pour bon nombre d'élèves. La figure est à distance de l'axe : figures 2 et 3. La figure symétrique doit être à la bonne distance de l'axe pour recouvrir la figure initiale par pliage et retournement. • **Paramètres de la figure 2** L'axe est horizontal, les perpendiculaires à l'axe sont verticales. La distance à l'axe est aisément repérable. Les élèves peuvent s'aider en procédant par comptage des carreaux. • **Paramètres de la figure 3** L'axe est oblique : horizontale et verticale ne constituent plus des repères immédiats. On constate qu'un point image a néanmoins été placé pour aider les élèves.

Utiliser un vocabulaire approprié

Le vocabulaire géométrique est introduit et utilisé en situation, sans brider l'expression spontanée des élèves : les termes de la vie courante sont acceptés s'ils permettent une bonne communication ; puis progressivement, ils sont remplacés par les termes spécifiques du langage géométrique.

Au cycle 2 et 3, l'expression axe de symétrie est utilisée par l'enseignant et pas les élèves.

Grandeurs et mesures

Aux cycles 2 et 3, les activités liées aux grandeurs et mesures privilégient des situations vécues par les élèves et permettent très souvent de réinvestir des notions géométriques et numériques.

Elles contribuent ainsi à une meilleure maîtrise des unes et des autres.

Comparer des grandeurs à l'aide d'instruments appropriés

Les première activités visent à construire chez les élèves le sens de la grandeur, indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne.

Au cycle 2, les activités peuvent être menées :

- Par comparaison directe : juxtaposition, superposition, mise en regard des deux objets, utilisation de la balance de Roberval pour les masses ;
- Par comparaison indirecte : recours à un objet intermédiaire, à un instrument de report (longueur servant de gabarit, masse fixée) ou transformation de l'un des objets pour le rendre comparable à l'autre (par exemple, une ligne non rectiligne peut être transformée en ligne rectiligne).

Ces activités de comparaison sont essentielles. C'est à travers elles, que l'élève accède aux grandeurs considérées et distingue progressivement la longueur d'un objet de la place qu'il occupe ou sa masse du volume qu'il occupe.

Les élèves sont aussi habitués progressivement à anticiper mentalement les résultats des comparaisons avant de les valider par l'expérience.

Les comparaisons amènent à pointer des rapports de grandeurs : il faut savoir que les élèves ont accès à la compréhension des relations entre grandeurs (égalités, inégalités, rapports simples) avant d'être capables de mesurer ces grandeurs. Ainsi il leur est facile, sans recourir à la mesure, de dessiner un crayon deux fois (trois fois) plus long qu'un autre.

Fabriquer et utiliser un instrument de mesure

Les objets mesurés doivent être de nature et de dimensions variées, le choix de l'instrument approprié constituant un objectif important.

Au cycle 2, dans le cas des longueurs, la fabrication d'un instrument de mesure par les élèves constitue une aide à la compréhension du fonctionnement des instruments usuels et à leur utilisation.

L'utilisation des graduations d'une règle est mise en relation avec le report de l'étalon-unité, ce qui peut éviter certaines erreurs dues à la confusion entre la graduation 0 et l'extrémité de la règle.

<u>Exemple</u> :

Pour graduer une bande de papier, il faut déterminer son origine, lui attribuer le nombre 0, reporter régulièrement une même longueur, appelée unité. Chaque report est en général matérialisé par un trait, chaque trait est affecté d'un nombre entier.

Lire l'heure et utiliser un calendrier

Au cycle 2, la connaissance du calendrier passe par un exercice régulier de repérage du jour, du mois, combiné à une mémorisation entraînée de la suite des noms des jours et de la suite des noms des mois.

Au cycle 3, les élèves doivent être capables de lire l'heure sur une montre à aiguilles ou sur une montre digitale et d'évaluer des durées.

L'affichage digital ne présente pas de difficulté particulière de lecture, pour peu qu'on ait compris la nécessité de lire deux nombres juxtaposés. Mais à l'école, la lecture analogique, sur montre à aiguilles et pendule, doit être privilégiée car plus difficile à appréhender par les élèves.

Au cycle 2, il est intéressant :

- De travailler sur un cadran des heures (avec une seule aiguille) et de sensibiliser à la notion d'intervalles :
  - il est pile trois heures (une seule position de la petite aiguille) ;
  - il est entre trois heures et quatre heures (de nombreuses positions de la petite aiguille) avec des précisions du type il est plus près de trois heures ou il est plus près de quatre heures (pour habituer au sens conventionnel de rotation des aiguilles) ;
- De faire prendre conscience, après de multiples observations, de la simultanéité suivante : quand et pour que la petite aiguille passe de 3 exactement à 4 exactement, la grande aiguille doit faire un tour complet (à partir de 12 et revenir à 12) : un tour complet de la grande aiguille dure une heure.

Au cycle 3, ces apprentissages sont poursuivis. Progressivement est abordée la lecture de positions particulières intermédiaires : trois heures un quart, trois heures et demie, trois heures trois quarts (aussi lu quatre heures moins le quart).

A cette occasion, il est profitable d'utiliser un cadran des minutes et faire colorier la zone balayée par la grande aiguille de 12 à 3 (un quart d'heure) ; de 12 à 6 (une demi-heure) ou de 12 à 9 (trois quarts d'heure).

C'est aussi l'occasion de les familiariser avec des angles qui sont des fractions simples de tour (et des durées, fractions simples d'heure).

Connaître les unités de mesure, effectuer des mesures et des calculs

Les élèves doivent avoir une bonne connaissance des relations entre les unités les plus utilisées :

- Pour les longueurs (1 m = 100 cm / 1 cm = 10 mm / 1 dm = 10 cm / 1 km = 1 000 m) ;
- Pour les masses (1 kg = 1 000 g / 1 t = 1 000 kg) ;
- Pour les contenances (1 L = 100 cl / 1 L = 1 000 ml) ;
- Pour les durées (1 jour = 24 h / 1 h = 60 min / 1 min = 60 s).

Ces relations doivent être mémorisées et donc utilisables sans recours à un tableau de conversion.

A la fin du cycle 3, lorsque l'utilisation des nombres décimaux se généralise, un travail est conduit sur l'égalité d'expressions comme 1m 7cm et 1,07 m. Il est aussi intéressant de travailler avec les élèves sur des égalités comme 2h30min = 2,5h : en effet, le passage de l'écriture « complexe » à l'écriture décimale (et vice versa) résulte d'un apprentissage qui sera poursuivi au collège.

Puisque les grandeurs considérées peuvent s'additionner, se soustraire, être multipliées ou divisées par un nombre, les écritures suivantes sont correctes et leur utilisation est recommandée :

3 cm + 15 mm = 30 mm + 15 mm = 45 mm = 4,5 cm

3 h 45 min + 1 h 28 min = 4 h 73 min = 5 h 13 min.

Plusieurs unités de grandeur peuvent donc coexister dans un calcul, qui n'est pas alors un calcul portant sur des nombres, mais un calcul portant sur des grandeurs.

Par ailleurs, le calcul sur les durées peut correspondre à des problèmes variés, par exemple :

- Déterminer une durée : combien de temps dure le trajet d'un train qui part à 7 h 17 et arrive à 9 h 05 ?
- Quantifier la comparaison de deux durées : quelle est la différence de temps de parcours entre deux trains si le premier met 7 h 17 et second 9 h 05 ?

Classer et ranger des surfaces, mesurer ou estimer l'aire d'une surface

Au cycle 3, les activités de classement et rangement des surfaces selon leurs aires précèdent les activités de mesurage avec une unité choisie.

En effet, par superposition et recomposition (réelles ou mentales), il est possible de comparer des aires ou de réaliser des surfaces de même aire. Ce procédé nécessite la prise de conscience par l'élève du fait que l'aire d'un assemblage de figures ne change pas lorsque l'assemblage est modifié.

La reconnaissance de rapport entre grandeurs (cette aire est le double de celle-ci, par exemple) précède la mesure de l'aire.

Les activités à base de puzzles sont particulièrement intéressantes pour montrer que deux figures non superposables peuvent avoir la même aire.

Par la suite, des activités de comparaison d'aires se mettent en place, pour lesquelles il s'agit de comparer des surfaces planes selon leur étendue. Ces surface peuvent être soit dessinées sur une feuilles de papier uni, avec la possibilité de les découper, soit matérialisées par des objets peu épais.

Il s'agit :

- De surfaces d'aires très différentes : la superposition (mentale ou effective) permet de constater que l'une est beaucoup plus étendue que l'autre ;
- De surfaces d'aires égales, l'égalité pouvant être vérifiée par superposition directe ;
- De surfaces d'aires égales, mais qui ne sont pas superposables directement : des découpages et des réagencements (effectifs ou mentaux) sont alors nécessaires pour constater l'égalité des aires.

La variété des procédures qui permettent de comparer des surfaces selon leur étendue aide la construction chez l'élève de la relation « avoir même aire ».

Exemple :

Activités : fabriquer, sur papier uni ou par découpage et juxtaposition avec du ruban adhésif, des surfaces de même aire qu'une surface de référence, mais qui ont des formes différentes, puis expliquer aux élèves comment ils ont trouvé et pourquoi ils sont sûrs de la validité de leurs propositions.

Les concepts de périmètre et d'aire ne doivent pas se réduire pour l'élève à des nombres ou des formules associés à des figures. Il est nécessaire de mettre en place des activités qui permettent aux élèves de distinguer les deux notions.

Exemple :

On peut proposer aux élèves de construire effectivement des rectangles différents d'aire 24 cm² dont on calcule le périmètre ou des rectangles différents de périmètre 20 cm dont on calcule l'aire.

Comparer, reproduire et tracer des angles

Les activités de classement et de rangement des angles précèdent les activités de mesurage en degrés, qui relèvent du collège.

Les élèves doivent, en particulier, prendre conscience du fait que les longueurs des côtés n'ont aucune incidence que le résultat de la comparaison des angles.

L'usage du rapporteur gradué classique ne relève pas du cycle 3.

Exemples :

Faire utiliser le gabarit d'un angle du triangle équilatéral :

- Pour vérifier l'égalité des trois angles de ce triangle,
- Pour faire remarquer que sa moitié est égale au tiers de l'angle droit.

Comparer des objets selon leur longueur, tracer des segments

- **La longueur**

La progression relative à la grandeur longueur débute généralement en grande section de maternelle. Les activités se déploient d'abord dans l'espace vécu.

Dans ce cadre, les enfants sont souvent amenés à échanger sur des problèmes de comparaison :

- Comparaison de taille : « Je suis plus grand que toi … » ;
- Comparaison de hauteur : « Qui a la chaise la plus haute ? » ;
- Comparaison de longueur : « Qui a sauté le plus loin ? »

Tous ces problèmes que se posent spontanément les enfants peuvent être l'occasion pour l'enseignant d'engager un apprentissage organisé de la grandeur et de sa mesure.

Pour chacune de ces questions, les élèves isolent implicitement une dimension des objets qu'ils souhaitent comparer. Ils comparent, de façon intuitive, des grandeurs rectilignes (droites).

Cette activité de comparaison nécessite déjà une capacité d'abstraction importante.

L'objectif d'apprentissage est essentiellement tourné vers la grandeur, la mesure viendra dans un second temps.

On distingue deux types de problèmes de comparaison.

✓ Problèmes relatifs aux **grandeurs déplaçables** :

- Comparaison de la taille de deux élèves que l'on peut mettre côte à côte ;
- Comparaison de la longueur de deux crayons, etc. …

Dans ce type de problème, la comparaison des longueurs s'effectuera par vision globale : une grandeur « dépasse » l'autre, elle est plus longue.

Il est cependant nécessaire de systématiser le fait que la comparaison menée ainsi n'est valable que si les deux grandeurs déplaçables sont mises côte à côte en prenant bien soin de faire **coïncider une de leurs extrémités**.

Exemple :

Dans les problèmes de comparaison de taille, il faut veiller à :

- Enlever ses chaussures ;
- Vérifier que le sol est bien plat ;
- Se mettre dos à dos, etc.

Ce premier registre d'activités va contribuer à mettre en place la **notion d'origine** : origine du repère, origine du comptage, rôle du zéro, etc.

✓ Problèmes relatifs aux **grandeurs non déplaçables** :

- Comparaison de la hauteur de deux armoires dans la classe ;
- Comparaison de la hauteur de deux arbustes dans la cour, etc.

Résolution de ce type de problèmes

Dans un premier temps, on pourra montrer l'utilité de se munir d'une grandeur déplaçable afin de ramener le problème à la résolution de deux problèmes du type précédent, avec un raisonnement transitif en plus.

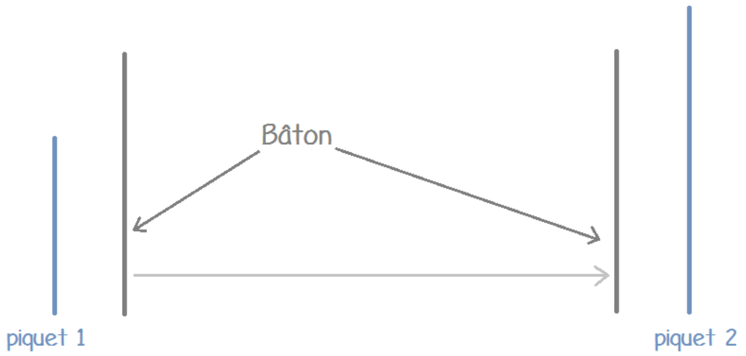
Exemple :

Comment comparer la hauteur de deux piquets qui se trouvent dans la cour, mais à des endroits très différents, et sans que l'on puisse les avoir tous les deux simultanément dans notre champ de vision ?

Première solution envisageable

On dispose d'un bâton, qui lui est une grandeur déplaçable. On compare le bâton avec le premier piquet et on constate que le bâton est plus grand que le premier piquet. On compare ensuite le bâton avec le second piquet et on constate que le bâton est plus petit que le second piquet.

On peut donc conclure par transitivité que le piquet n°1 est plus petit que le piquet n°2.



La résolution de ce problème montre tout l'intérêt qu'il peut y avoir à se munir, dans les problèmes de comparaison de grandeurs non déplaçables, d'un objet déplaçable. Sa longueur étant choisie, on pourra conclure avec justesse la comparaison par transitivité.

C'est un premier pas vers la **notion d'unité** ou de **grandeur étalon**.

Comment faire si l'on ne dispose pas d'un objet de longueur idéale ?

Exemple :

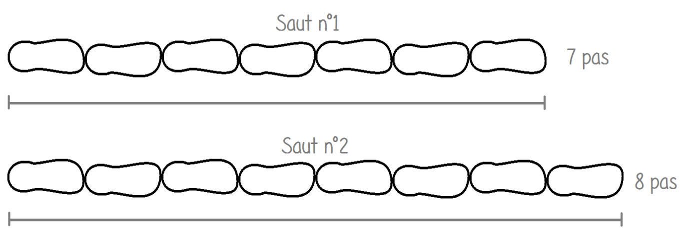
Comparer deux sauts en longueur effectués par deux élèves à des endroits différents.

Deuxième solution envisageable

Pour résoudre ce problème sans procéder par **comparaison directe** (juxtaposition des origines et mise côté à côte), on peut utiliser une **comparaison indirecte**, en utilisant par exemple, une ficelle (qui fait office de grandeur déplaçable).

Troisième solution envisageable

Compter le nombre de pas contenus « dans le premier saut » puis le nombre de ceux contenus « dans le second saut » et comparer ensuite les nombres de pas obtenus :



Nous entrons ainsi dans un processus de quantification qui sera appelé mesure.

Rappelons que ce processus nécessite lui aussi le respect de certaines règles d'action qui ne vont pas de soi en grande section, ni même encore au CP :

- Respect de l'origine ;
- Respect de l'alignement ;
- Respect de la juxtaposition des unités.

Résoudre ce type de problème à cette étape de la progression consiste à :
- Choisir une grandeur unité appropriée à la situation et facilement accessible (une partir du corps : pied, pouce, etc. …) ;
- Reporter la grandeur unité selon le protocole établi ci-dessus ;
- Compter ;
- Comparer des nombres.

Il deviendra ensuite nécessaire de faire porter l'attention des élèves sur le fait que la mesure de la grandeur dépend de l'unité choisie. Il paraît donc indispensable de se munir tous d'une unité commune : unité légale de mesure des longueurs.

Il sera également important de sensibiliser les élèves à :
- La justesse de l'unité choisie (le mètre, unité légale, pourra être utilisé pour exprimer la mesure de la longueur de la classe ; le centimètre sera plus pertinent pour exprimer la mesure d'un segment tracé sur une feuille de papier) ;
- L'estimation des longueurs pour qu'elles fassent sens.

Ce deuxième registre d'activités va contribuer à mettre en place la notion d'**unité de mesure**, d'abord au cycle 2, avant d'être approfondie au cycle 3.

En effet, au cycle 3, les longueurs ne seront plus exclusivement rectilignes.

Les notions de mesure de longueur déterminée par le calcul et de longueur curviligne se généralisent, notamment avec la notion de périmètre.

Nous aurons enfin à introduire l'**instrument de mesure**, la **règle graduée**, et son usage.

- **La pratique de la mesure par comptage**

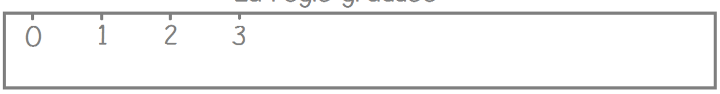
Comptage 10 unités

Ceci peut donner à la construction d'un premier instrument de mesure :
- On plie une feuille de papier pour obtenir une ligne droite (ou on prend une bande de papier) ;
- On choisit une unité u ;
- On reporte à partir de l'extrémité la longueur unité, on inscrit des marques repères, et on écrit les nombres du comptage :

On peut ensuite opérer un premier glissement. Les nombres du comptage seront inscrits maintenant sous les marques repères, l'usage du nombre s'en trouve légèrement modifié, on passe d'un usage exclusivement quantifiant à un usage du nombre qui permet de repérer.

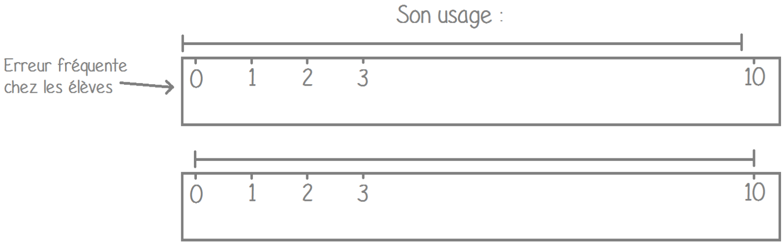
On montrera ensuite que sur les instruments courants mis à notre disposition, l'origine du comptage et du repérage ne coïncide pas nécessairement avec l'extrémité de la règle, mais que l'on trouve en lieu et place de l'origine le chiffre 0.

La règle graduée



Cela va nécessiter chez les élèves une adaptation de leurs pratiques de mesurage / comptage pour bien prendre le zéro comme origine du mesurage.

Son usage :



Dorénavant, la mesure ne s'opère plus par comptage mais sur simple lecture, ce qui nous libère de tous les problèmes liés au protocole d'action que nous avions soulevés précédemment.

Enfin, au cycle 3, l'accent sera mis sur l'appropriation des différentes unités et différents instruments de mesure utilisés en fonction du contexte, et surtout la mesure sera présente dans la résolution de nombreux problèmes.

- **La masse**

Nous avons détaillé la progression relative aux longueurs parce qu'elle est exemplaire du cheminement qu'il faudra parcourir avec les élèves pour toute autre longueur :

✓ Problèmes de comparaison directe qui peuvent être résolus :
- De manière perceptive, à l'estimation, mais cela pose de vraies difficultés (exemple du kilo de plume et du kilo de plomb) ;
- En utilisant dès ici un instrument de comparaison des masses : la **balance de Roberval**.

✓ Problèmes de comparaison indirecte avec introduction de l'unité de masse, le gramme et d'instruments de mesure des masses :
- La balance de Roberval avec des masses marquées ;
- Les balances qui permettent la lecture directe de la mesure.

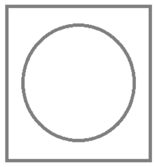
✓ Nécessité de travailler avec les élèves le sens de la mesure, son estimation, et le choix pertinent des unités en fonction du contexte du problème posé.

✓ Egalités de mesures (problèmes de conversion).

Comparer et mesurer des aires et des périmètres

- **Comparaison directe** :

✓ On procède par recouvrement



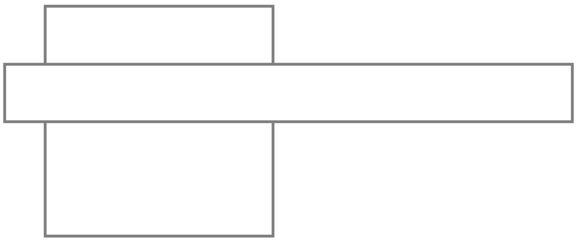
Exemple :

L'étendue du carré est supérieure à l'étendue du disque parce que le carré recouvre complètement le disque.

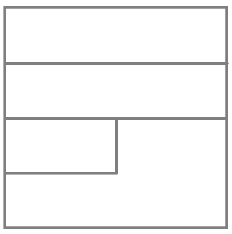
Mais on rencontrera très vite des cas où le recouvrement ne suffira plus.

Exemple :

Comment savoir, dans la figure ci-dessous, si l'étendue du carré est supérieure à l'étendue du rectangle ou l'inverse ?



On aura alors recours, lorsque c'est possible, à des décompositions et recompositions des figures dont il faut comparer les étendues. Pour comparer les étendues du carré et du rectangle, on peut découper le rectangle de façon à recouvrir le carré si possible :



Conclusion : le carré a une étendue supérieure à celle du rectangle.

✓ On procède par pavage et comptage

Dans l'exemple précédent, si l'on prend le rectangle (que l'on nomme U) pour unité, on constatera que :
- l'étendue du rectangle est de 5/2 U ;
- l'étendue du carré est de 4U.

Ces activités de pavage constituent les premières mesures.

- **Choix d'une unité**

Le choix d'une unité est ici essentiel.

Sa forme doit permettre un pavage complet des deux surfaces dont il faut comparer les étendues. Mais ceci ne sera pas possible que dans un nombre de cas relativement restreint.

✓ Détermination de l'aire

Si le problème du choix de l'unité est résolu, alors on peut procéder au pavage puis au comptage et ainsi déterminer l'aire de la surface.

Pour comparer les étendues, on peut dès lors recourir à la mesure et comparer les aires.

Si l'on se réfère à la progression relative à la grandeur longueur, l'étape suivante consiste en l'appropriation par les élèves d'un instrument de mesure.

Celui-ci permettrait de passer d'une pratique de comptage à une simple lecture sur l'instrument de la mesure.

Un tel instrument existe-t-il pour les aires ? Non.

En revanche, on montrera que dans certains cas, les aires peuvent se calculer.

✓ Cas du carré et du rectangle

Pour chacune de ces deux figures, les côtés se mesurent sur les figures géométriques en cm.

On pourra utiliser comme unité d'aire un carré de 1 cm de côté : son aire est de 1 cm².

Mais l'unité d'aire n'est pas nécessairement un carré (le centimètre ou le mètre carré), elle est protéiforme, c'est une entité abstraite.

Le pavage du rectangle, en référence aux activités relatives à la multiplication, permettra d'introduire la première formule du calcul d'aire.

Si une surface est un rectangle alors : Aire (rectangle) = longueur x largeur.

A l'école élémentaire, on se limitera aux figures pouvant se ramener au cas du rectangle :

- Le carré, avec Aire (carré) = côté x côté ;
- Le triangle, avec Aire (triangle) = $\frac{\text{base x hauteur}}{2}$;
- Le losange, le trapèze, le parallélogramme, sans obligation systématique.

Le travail sur les égalités de mesure (conversion) ne pourra être engagé que si ces premières notions sont parfaitement assimilées.

Traitement de l'information et fonctions numériques

Aux cycles 2 et 3, l'utilisation de graphiques et de tableaux permet de familiariser les élèves à la **prise d'informations** sur des supports variés.

Il s'agira notamment de sensibiliser les élèves à :

- L'information apportée par un graphique en prenant en compte les unités, l'échelle, etc. … ;
- La signification d'une même moyenne pour des ensembles de donnés répartis de manières très diverses.

Savoir organiser les données d'un problème

Aux cycles 2 et 3, certains problèmes sont destinés à permettre l'utilisation « directe » des connaissances acquises. D'autres peuvent nécessiter la mobilisation de plusieurs connaissances mathématiques (problèmes complexes) : situations proches de la vie de l'élève, effectivement vécues par la classe, ou en relation avec d'autres domaines de savoirs.

Ils peuvent être présentés sous forme écrite (énoncés écrits, mais aussi tableaux, schémas ou graphiques), fournis oralement ou encore s'appuyer sur des situations authentiques et nécessiter que l'élève recherche des informations sur différents supports.

Lire et interpréter des données fournies sous forme de tableaux, graphiques

Au cycle 3, les élèves sont confrontés à la lecture, à l'interprétation et à l'utilisation de divers modes de représentation des données : diagrammes, graphiques, tableaux.

L'analyse critique de l'information mise en évidence par de tels supports contribue à l'éducation civique des élèves.

A ce stade, les difficultés pour l'élève résident dans le fait qu'il doit s'organiser dans la prise d'informations fournies :

- Si les données apparaissent sous la forme d'un tableau, l'élève devra mettre en relation les lignes et les colonnes du tableau (compétences spatiales) ;
- Si les données apparaissent sous la forme d'un graphique, l'élève devra interpréter la longueur de certains segments, ou les dimensions de rectangles, ou encore la valeur de certains angles, avec très souvent un lien avec la proportionnalité.

Les situations qui conduisent à utiliser diverses représentations d'un ensemble de données (tableaux, graphiques, diagrammes) s'appuient sur des données effectives (résultats d'enquête, mesurages en sciences, documents en géographie, etc.).

Réaliser un tableau ou une représentation graphique

Au cycle 3, les difficultés résident dans le fait que c'est à l'élève de prendre en charge le choix du type de tableau ou du type de représentation le mieux adapté à la situation.

Pour ce qui et de la production de représentations graphiques, il est rappelé qu'elle doit se faire dans des cas simples, avec une possibilité de lien avec la proportionnalité.

Utiliser des calculatrices, tableurs et logiciels

Aux cycles 2 et 3, la relation avec les TICE doit être mise en avant. Les calculatrices et les tableurs deviennent d'usage courant pour les élèves.

Outre l'allègement de la charge de travail qu'ils permettent pour traiter des données tirées de « situations vraies », ces outils offrent l'occasion d'une approche plus expérimentale des mathématiques.

Les tableurs permettent la construction de représentations graphiques de toutes sortes de manière assez aisée, sans faire de calculs trop complexes qui surchargeraient la tâche des élèves.

Dès que les données ont été entrées dans les « cellules » de la feuille de calcul, le logiciel prend en charge ces données et les applique au document (échelle sur les différents axes, choix du type de représentation graphique : courbe ; diagramme en bâtons, etc. …)

Les logiciels de géométrie dynamique permettent de réaliser des constructions géométriques en allégeant la tâche liée à l'utilisation précise des instruments de tracé. Les élèves peuvent ainsi plus aisément entrer dans des processus de résolution de problème du type essai / erreur / rectification.

Le recours à ces outils n'est pas systématique. Il appartient à l'enseignant de décider des occasions où leurs usages sont pertinents.

Lire et construire un tableau et un graphique

C2

Les tableaux sont d'un usage courant. Les graphiques nécessitent davantage de compétences et sont très peu présents au cycle 2. Utiliser un tableau recouvre deux types d'activités.

- <u>Faire un tableau dans des situations concrètes simples</u>

Dès la GS, les élèves utilisent des tableaux à simple entrée ou à double entrée :

✓ **Dans le cadre d'activités fonctionnelles (qui ont une utilité dans le « fonctionnement » de la classe) ;**

<u>Exemple :</u>

Inscription à la cantine ou à la garderie, aux différents ateliers du jour ou de la semaine.

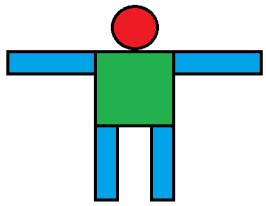
✓ **Dans le cadre d'activités construites (ateliers)**

<u>Exemple :</u>

Pour confectionner un personnage à l'aide de formes géométriques de différentes couleurs, les élèves sont amenés à passer commande sous forme de tableau à double entrée :

	Rond	Rectangle	Carré
Rouge	1		
Bleu		4	
Vert			1

→



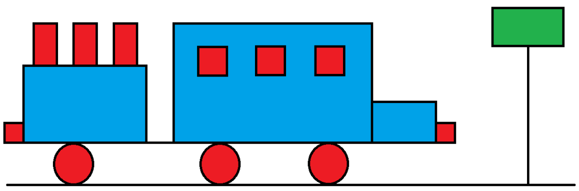
- <u>Faire un tableau dans le cadre de la résolution de problème</u>

Pour organiser les informations :

<u>Exemple :</u>

Au CP, lecture d'image.

Compléter le tableau suivant à partir de l'image ci-dessous :



	Rond	Rectangle	Carré
Rouge	1	3	5
Bleu	2	4	
Vert			1

- <u>Lire un tableau</u>

A l'inverse et dans le même temps, les élèves exploitent des tableaux déjà faits et en tirent l'information dont ils ont besoin :

✓ **Dans des situations concrètes simples ;**

<u>Exemple :</u>

En GS, les élèves peuvent se diriger vers l'atelier qui les concerne aujourd'hui et auquel ils se sont inscrits au début de semaine :

	Lundi	Mardi	Jeudi	Vendredi
Graphisme				
Peinture			Manon	
Puzzle				

✓ **Dans des situations concrètes simples ;**

Exemple :

Problème de logique au cycle 2.

	Rose	Pivoine	Tulipe
Rouge	2	3	5
Blanche	1	2	3

Question : combien y a-t-il de fleurs rouges dans mon jardin ?

C3

Les mêmes compétences sont approfondies.

Ensuite, progressivement, et dans le cadre d'autres disciplines :

- La lecture et l'interprétation de graphiques font l'objet d'une première approche en sciences, en histoire, en géographie, en lien avec les mathématiques ;
- A partir de données effectives (enquêtes, mesurages, documents d'actualité), les élèves construisent des tableaux et des représentations graphiques ;
- Au-delà d'une première maîtrise de ce type d'outils, on cherche à mettre en lumière le fait que l'interprétation de l'information dont ils rendent compte doit être faire avec vigilance.

Exemple :

Cas des moyennes : deux élèves peuvent avoir la même moyenne 10, en mathématiques, mais le premier a eu deux fois la note de 10, alors que le second a eu 0 comme première note et 20 comme seconde note. Les compétences de ces deux élèves sont-elles tout à fait identiques ?

Il faut donc être vigilant lorsque l'on compare des moyennes, d'autres informations sont souvent nécessaires.

Les tableaux associés à des graphiques de natures différentes ;

- Diagrammes en bâtons ;
- Diagrammes circulaires ;
- Histogrammes ;
- Courbes.

Pour lire et construire une courbe, il est nécessaire d'introduire des notions de :

- Fonction numérique ;
- Repère du plan : axe unité, coordonnées d'un point, etc. …

✓ **Les variables de situation**

La tâche et les procédures mises en œuvre par les élèves pourront être de natures assez différentes selon :

Le type de grandeurs :

- *Simple* : la longueur, par exemple, exprimée en m ;
- *Composées* : la vitesse, par exemple, exprimée en m/s.

Le type de valeurs :

- *Discrètes* : utilisées, par exemple, dans les diagrammes en bâtons ;

  Exemple :

  Les pointures de chaussures représentent une variable discrète : 35, 36, 37 etc. … On chausse soit du 35 soit du 36, il n'y a pas de possibilité intermédiaire (même si cela ne correspond pas tout à fait à la situation réelle).
- *Continues* : représentation en histogramme.

  Exemple :

  La longueur d'un saut représente une variable continue. On peut réussir un saut de 4,30 m ou 4,56 m ou 4,75 m.

  Tous ces sauts sont compris entre 4 et 5 m.

Le champ numérique :

- Nombres entiers :
- Nombres décimaux ;
- Nombres écrits sous forme de fractions.

	Le mode de représentation : - Tableau simple ou double entrée ; - Graphiques : diagrammes en bâtons, histogrammes, courbes, diagrammes circulaires. Le type de travail demandé : - Lire un tableau ou un graphique ; - Compléter un tableau ou un graphique ; - Construire un tableau ou un graphique. Le support : - Papier blanc ; - Papier millimétré ; - Papier quadrillé.