

Attendus de fin de cycle 4

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Les connaissances à acquérir

Connaître la définition et l'orthographe des mots suivants :

expérience, issue, aléatoire, événement, événement élémentaire, fréquence, probabilité, événement impossible, événement certain, équiprobabilité, arbre, arbre pondéré, événements incompatibles, événement contraire.

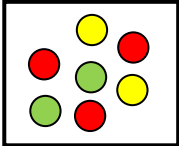
Les compétences à travailler

- | | |
|------------|---|
| G 1 | Comprendre la notion de probabilité |
| G 2 | Étudier quelques propriétés des probabilités |
| G 3 | Comprendre une expérience aléatoire à deux épreuves |

Objectif G1 Comprendre la notion de probabilité

1 Vocabulaire

On réalise les trois expériences suivantes :

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde sa face supérieure	On lance un dé à six faces équilibré et on regarde le nombre de points inscrits sur sa face supérieure	On tire une boule au hasard dans une urne non transparente contenant 7 boules et on regarde sa couleur.
		

définition

Chacun des résultats possibles d'une expérience est une **issue** de l'expérience.

Exemples

la pièce de monnaie	le dé à 6 faces	l'urne
cette expérience admet 2 issues : pile et face	cette expérience admet 6 issues : 1, 2, 3, 4, 5, 6	cette expérience admet 3 issues : rouge, vert, jaune

définition

Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs issues possibles et que l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel résultat se produira.

Exemples

la pièce de monnaie	le dé à 6 faces	l'urne
Chacune des expériences ci-dessus est une expérience aléatoire.		

définition

Un **événement** est un ensemble de résultats qui peut être, ou ne pas être, réalisé lors d'une expérience.

Un événement peut être réalisé par une ou plusieurs issues de cette expérience.

Un **événement élémentaire** est un événement réalisé par une seule issue.

Exemples

la pièce de monnaie	le dé à 6 faces	l'urne
F est l'événement « on obtient face » F est un événement élémentaire. Il est réalisé par une seule issue de cet expérience.	B est l'événement « on obtient 4 » B est un événement élémentaire I est l'événement « on obtient un nombre impair » I est un événement réalisé par les issues 1, 3 et 5. Il n'est pas élémentaire.	R est l'événement « on obtient rouge » R est un événement élémentaire

2 Probabilité d'un événement



Regarder cette vidéo : <https://youtu.be/ithQHSY9Z-E>

définition

Lorsqu'on effectue un **très grand nombre** de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une fréquence théorique appelée **probabilité**.

on note **p(F)** la probabilité que l'événement F se réalise.

Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

définition

Un événement dont la probabilité est nulle est un **événement impossible**.

Un événement dont la probabilité est égale à 1 est un **événement certain**.



Regarder cette vidéo : <https://youtu.be/d6Co0q01QH0>

Exemples

la pièce de monnaie	le dé à 6 faces	l'urne
Si on lançait la pièce un très grand nombre de fois, on obtiendrait face environ une fois sur deux. donc $p(F) = \frac{1}{2} = 0,5$	Si on lançait le dé un très grand nombre de fois, on obtiendrait 4 environ une fois sur six. donc $p(B) = \frac{1}{6}$	Si on tirait une boule de l'urne un très grand nombre de fois, on obtiendrait rouge environ trois fois sur sept. donc $p(R) = \frac{3}{7}$

définition

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

propriété

Dans une expérience aléatoire équiprobable, la probabilité d'un événement E est

$$p(E) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } E}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

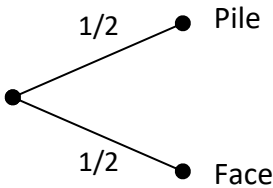
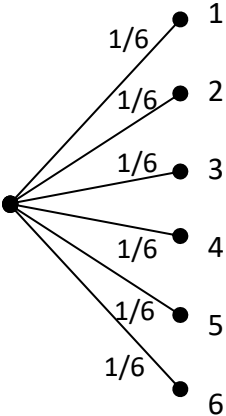
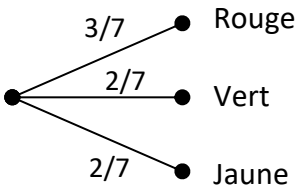
Exemples

la pièce de monnaie	le dé à 6 faces	l'urne
On a autant de chances d'obtenir pile que face, c'est une situation d'équiprobabilité donc $p(F) = \frac{1}{2} = 0,5$	On a autant de chances d'obtenir chaque face du dé, c'est une situation d'équiprobabilité donc $p(B) = \frac{1}{6}$ et $p(I) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	Chaque couleur, n'a pas la même chance d'être tirée ce n'est pas une situation d'équiprobabilité.

Objectif G2**Etudier quelques propriétés des probabilités****1 Arbres de probabilité**

Pour représenter une expérience, on construit un schéma qui s'appelle **un arbre de probabilité** et qui indique chacune des issues de cette expérience.

Quand on indique sur chaque branche la probabilité associée, on obtient un **arbre pondéré** pour cette expérience.

la pièce de monnaie	le dé à 6 faces	l'urne
		
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$	$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{7}{7} = 1$

propriété

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.

2 Événements incompatibles

définition

Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

propriété

Si les événements A et B sont incompatibles, alors la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme des probabilités de ces deux événements.

On a alors $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$

Exemples

la pièce de monnaie	le dé à 6 faces	l'urne
	I est l'événement « on obtient un nombre impair » c'est-à-dire « on obtient 1 ou 3 ou 5 » Les événements « obtenir 1 », « obtenir 3 » et « obtenir 5 » sont incompatibles donc $p(I) = p(1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 5)$ $= p(1) + p(3) + p(5)$ $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	Si P est l'événement « on obtient une boule rouge ou jaune ». « Obtenir une boule rouge » et « obtenir une boule jaune » sont deux événements incompatibles donc $p(P) = p(R \text{ ou } J)$ $= p(R) + p(J) = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

3 Événements contraires

définition

L'événement contraire d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

On le note $\bar{A}$

Exemples

la pièce de monnaie	le dé à 6 faces	l'urne
F est l'événement « on obtient face » $\bar{F}$ est l'événement « on n'obtient pas face » autrement dit « on obtient pile »	B est l'événement « on obtient 4 » $\bar{B}$ est l'événement « on n'obtient pas 4 » donc on obtient 1, 2, 3, 5 ou 6 I est l'événement « on obtient un nombre impair » $\bar{I}$ est l'événement « on obtient un nombre pair » donc on obtient 2, 4 ou 6	R est l'événement « on obtient rouge » $\bar{R}$ est l'événement « on n'obtient pas rouge » donc on obtient jaune ou vert

propriété

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1 \quad \text{donc} \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Exemples

la pièce de monnaie	le dé à 6 faces	l'urne
$p(\bar{F}) = 1 - p(F)$ $= 1 - \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2}$	$p(\bar{B}) = 1 - p(B)$ $= 1 - \frac{1}{6}$ $= \frac{5}{6}$ Autre méthode : on sait que $\bar{B}$ est réalisé par les issues 1, 2, 3, 5, 6 donc $p(\bar{B}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$	$p(\bar{R}) = 1 - p(R)$ $= 1 - \frac{3}{7}$ $= \frac{4}{7}$



Exercice bilan

Un jeu de 52 cartes est composé de quatre « enseignes » : cœur, carreau, pique et trèfle.

Chaque enseigne comprend treize cartes dont trois « figures » (roi, dame et valet) et dix cartes numérotées de 1 à 10. Les cartes de cœur et de carreau sont rouges et les cartes de pique et de trèfle sont noires.

On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

- a.** A : « Obtenir un valet ».
- b.** B : « Obtenir un roi rouge ».
- c.** C : « Obtenir une carte qui n'est pas un roi rouge ».
- d.** D : « Obtenir un valet ou un roi rouge ».
- e.** E : « Obtenir une carte qui n'est ni rouge ni noire ».
- f.** F : « Obtenir une carte rouge ou une carte noire ».

Page suivante

CORRECTION



Exercice bilan

CORRECTION

- a.** Tirer une carte au hasard dans un jeu de cartes est une situation d'équiprobabilité. L'événement A est composé de 4 issues (les valets des 4 enseignes), et il y a 52 issues possibles (52 cartes) donc :

$$p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

- b.** De même, l'événement B est composé de

2 issues (2 rois rouges), d'où : $p(B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$

- c.** L'événement C est l'événement contraire de B, donc $p(C) = p(\bar{B}) = 1 - p(B).$

D'où : $p(C) = 1 - \frac{1}{26} = \frac{25}{26}.$

- d.** L'événement D correspond à l'événement (A ou B). Les événements A et B sont incompatibles,

donc : $p(D) = p(A) + p(B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{26} = \frac{3}{26}.$

- e.** E est un événement impossible, donc : $p(E) = 0.$

- f.** F est un événement certain, donc : $p(F) = 1.$

Les cartes étant tirées au hasard, les 52 issues sont équiprobables.

On peut donc appliquer la formule

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

On pourrait compter le nombre de cartes qui ne sont pas des rois rouges et appliquer la même méthode que précédemment.

Cependant, il est plus rapide d'utiliser la formule : $p(\bar{B}) = 1 - p(B).$

Si des événements sont **incompatibles**, alors la probabilité que l'un des deux se réalise est égale à la somme des probabilités de ces événements.

Les cartes sont soit rouges, soit noires. Donc l'événement E est impossible et l'événement F est certain.



- ☐ Faire les exercices 19 à 24 p 70-71 du cahier de compétences
- ☐ Faire les exercices 28 à 36 p 72-73 du cahier de compétences



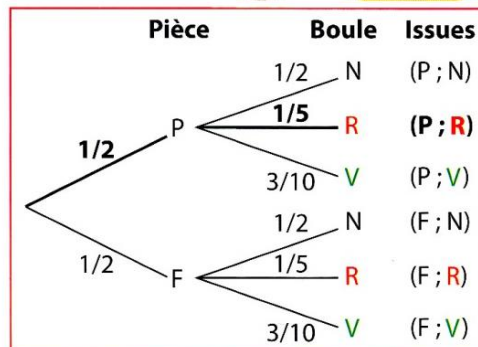
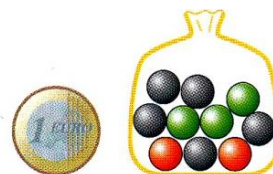
Regarder cette vidéo : <https://youtu.be/CQk-yzdeUzQ>

On réalise l'expérience aléatoire à deux épreuves suivantes :

- on lance une pièce de monnaie équilibrée : on note si elle tombe sur Pile (P) ou sur Face (F) ;
- **ensuite**, on tire au hasard une boule du sac ci-contre et on note sa couleur.

L'issue « La pièce est tombée sur Pile et on a tiré une boule rouge du sac » est notée (P ; **R**).

L'arbre pondéré par les probabilités est donné ci-contre.


définition

Sur l'arbre de probabilité d'une expérience aléatoire à deux épreuves, une succession de deux branches est appelée un **chemin**.

propriété

Sur l'arbre de probabilité d'une expérience aléatoire à deux épreuves, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

La probabilité de l'issue (P ; **R**) est égale au produit :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{10}.$$


Exercice bilan

Deux urnes contiennent des boules indiscernables au toucher. La première contient deux boules rouges et quatre boules vertes. La seconde contient cinq boules rouges et trois boules noires. On extrait, au hasard, une boule de la première urne, puis une boule de la seconde urne.

1. Résumer l'expérience aléatoire par un arbre pondéré.
2. En déduire la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a. A : « la première boule tirée est verte et la seconde est noire » ;
 - b. B : « la première boule tirée est rouge et la seconde est noire » ;
 - c. C : « la deuxième boule est noire » ;
 - d. D : « au moins une des deux boules est rouge ».

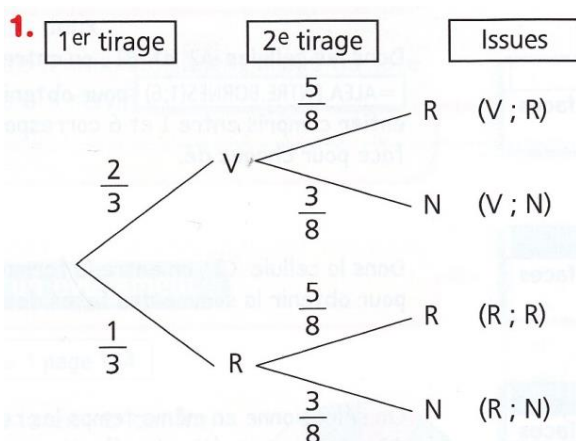
Page suivante

CORRECTION



Exercice bilan

CORRECTION



Dans la première urne il y a deux boules rouges sur un total de six boules.
La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage est donc $\frac{2}{6}$, soit $\frac{1}{3}$.
On détermine de la même manière les autres probabilités.

2. a. $p(A) = p(V ; N) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

b. $p(B) = p(R ; N) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$.

c. On obtient une boule noire après avoir tiré une boule verte ou après avoir tiré une boule rouge.

Les événements A et B sont incompatibles,

donc $p(C) = p(A) + p(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

d. L'événement D est l'événement contraire

de A, donc $p(D) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Sur un arbre pondéré, la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin qui conduit à cette issue.

Si des événements sont incompatibles, alors la probabilité que l'un des deux se réalise est égale à la somme des probabilités de ces événements.

Le seul cas dans lequel aucune boule rouge n'est tirée est le cas où l'on tire une boule verte et une boule noire, d'où : $D = \bar{A}$.
On aurait aussi pu écrire :
 $p(D) = p(R ; R) + p(R ; N) + p(V ; R)$



EXERCICES

☐ Faire les exercices 1 à 7 de la fiche d'exercices probabilités

Probabilités : Résumé en carte mentale

PROBABILITÉS

- **Expérience aléatoire** : expérience liée au hasard.
- **Issue** : résultat possible.
- **Évènement** : peut être réalisé ou non.
- **Probabilité** : calcul de la chance qu'un évènement se produise.

Vocabulaire

- Un **évènement certain** se produit dans tous les cas.
- Un **évènement impossible** ne se produit jamais.
- Deux **évènements incompatibles** ne peuvent se produire en même temps.
- Deux **évènements** sont **contraires** s'il se produit forcément l'un ou l'autre.

Exemples

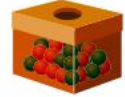
• On lance un **dé** à six faces.



• On tire à **pile ou face**.



• On tire une bille dans une **urne** opaque.



Propriétés

- $0 \leq \text{probabilité} \leq 1$.
- Probabilité d'un **évènement certain** : 1.
- Probabilité d'un **évènement impossible** : 0.
- Somme des probabilités de deux **évènements contraires** : 1.
- Situation d'**équiprobabilité** :

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Fréquence

Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la **probabilité d'un évènement** correspond à la **fréquence** d'apparition de cet évènement.

Exemple

On lance 1 000 fois un dé truqué et on note la fréquence d'apparition de chaque face.



Face obtenue
1
2
3
4
5
6

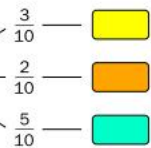
- Probabilité d'obtenir 1 : 3 %
- Probabilité d'obtenir 2 : 11 %
- Probabilité d'obtenir 6 : 52 %

Arbre

Roue de la chance



Arbre de probabilités correspondant



Issues

- La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.
- Si toutes les issues sont équiprobables, la probabilité de chaque issue est égale à :

$$\frac{1}{\text{nombre d'issues}}$$

Probabilité d'un évènement

- Somme des probabilités des issues qui réalisent l'évènement
- En situation d'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'évènement A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Expérience aléatoire

Évènements incompatibles

- A et B sont incompatibles si **ils ne peuvent pas se réaliser en même temps**
- Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$

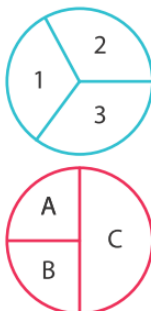
Évènements contraires

- L'évènement contraire de A est l'**évènement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas**.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Issues équiprobables

$$P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}$$

Expérience aléatoire à 2 épreuves



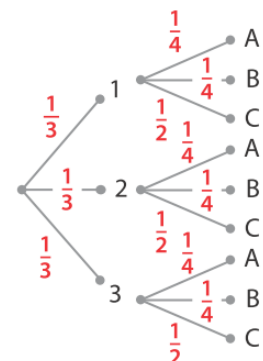
Issues non équiprobables

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

Arbre de probabilités



Probabilité d'obtenir « 3 et B » =

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$