

Le pendule de Foucault

Depuis 1996, au Panthéon à Paris, on peut observer la reconstitution de l'expérience menée par Léon Foucault en 1851. Celle-ci avait permis de confirmer, sans observation du ciel, la rotation de la Terre sur elle-même.

Une sphère en plomb, de 20 cm de diamètre, de masse 47 kg, est suspendue sous le dôme de l'édifice par un fil en acier très fin d'une longueur de 67 m.

Le pendule ainsi constitué oscille librement.

On constate qu'au cours de la journée le plan d'oscillation tourne lentement dans le sens des aiguilles d'une montre autour d'un axe vertical.



La première partie traite des oscillations d'un pendule simple et la seconde du pendule de Foucault.

Dans tout l'exercice, les amplitudes angulaires θ_{max} des oscillations sont inférieures à 10° , soit $0,17 \text{ rad}$. On considère qu'on est dans le cadre des petites oscillations.

Données :

- la valeur g du champ de pesanteur en un point à la surface de la Terre dépend de la latitude λ du lieu, elle ne dépend pas de sa longitude.
- valeur du champ de pesanteur à Paris : $g_{Paris} = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$;
- période de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique : $T_{Terre} = 24 \text{ h}$.

1. Période propre d'un pendule simple

On appelle pendule simple un système constitué d'un fil inextensible de longueur L , dont une extrémité est fixée à un support et l'autre attachée à un objet quasi ponctuel de masse m . La masse du fil est négligeable par rapport à la masse de l'objet.

1.1. Étude dynamique

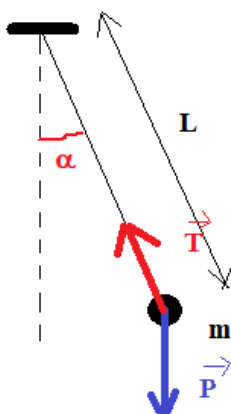
Un pendule simple, constitué d'une petite sphère assimilée à un point B, de masse $m = 50 \text{ g}$ et d'un fil AB de longueur $L = 2,0 \text{ m}$, est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 inférieur à 10° puis lâché sans vitesse initiale (se reporter à LA FIGURE A3 DE L'ANNEXE).

Le plan (O, \vec{i}, \vec{k}) contient la verticale AO passant par le point de suspension A et la position initiale B_0 du point B.

La position du point B peut être repérée par l'abscisse angulaire $\theta = (\overline{AO}, \overline{AB})$ ou par ses coordonnées (x, z) dans le plan (O, \vec{i}, \vec{k}) .

1.1.1. SUR LA FIGURE A3 DE L'ANNEXE, représenter sans souci d'échelle les forces qui s'exercent sur la sphère B pour un angle θ quelconque. Toutes les actions de l'air sont négligées.

J'ai repris le schéma du cours qui précède :



1.1.2. L'application de la deuxième loi de Newton dans le référentiel terrestre, considéré en première approche comme galiléen permet de montrer que le mouvement s'effectue bien dans le plan (xOz).

a. Énoncer la deuxième loi de Newton sous la forme d'une phrase.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur ce système.

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures qui s'exercent sur un système matériel est égale au produit de la masse de ce système par l'accélération de son centre d'inertie.

b. Quels éléments permettent de justifier l'affirmation que le mouvement est plan ?

Toutes les forces qui s'exercent définissent un plan vertical. Il n'y aura donc pas de composante (de coordonnée) d'accélération hors de ce plan et par conséquent (et en résumant) aucun mouvement à attendre hors de ce plan.

1.1.3. Dans l'approximation des petites oscillations, l'application de la deuxième loi de Newton permet d'établir l'expression de $x(t)$ (vous notez bien que l'on choisit de considérer l'abscisse x et non plus l'angle θ : cela ne va pas rendre le problème plus complexe).

On donne trois possibilités pour $x(t)$ dans lesquelles K est une constante positive :

$$(a) : x(t) = K \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right) \quad (b) : x(t) = -K \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right) \quad (c) : x(t) = K \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$

Le pendule étant lâché sans vitesse initiale à $t = 0$ d'un angle correspondant à **LA FIGURE A3 DE L'ANNEXE**, choisir l'expression qui vérifie les conditions initiales.

A $t = 0$, le pendule est lâché du point B_0 , correspondant à $x = x_0 > 0$. Nous avons $x(0) = x_0$ (1)

Par ailleurs, le pendule étant lâché sans vitesse, on peut dire que $v_x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$ (2)

La description (1) suffit à choisir (avec $K > 0$) : expression (c) $x(0) = K$ avec $K = x_0$ (puisque $\cos(0) = 1$)

1.2. Étude de la période

1.2.1. On montre que la période propre du pendule simple a pour expression : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Vérifier l'homogénéité de l'expression par analyse dimensionnelle.

Il s'agit de vérifier que l'unité de l'expression correspondant à T_0 est bien la seconde puisque l'on présente T_0 comme une durée.

2π est un nombre sans unité, il faut simplement travailler sur l'unité de $\sqrt{\frac{L}{g}}$. C'est simple si on n'oublie pas que depuis cette année, nous savons que nous pouvons exprimer g en $m \cdot s^{-2}$ (nos études de chutes libres on toujours mené à $a = g$) plutôt qu'en $N \cdot kg^{-1}$ (c'est dans l'énoncé...)

On présente une expression équivalente avec les unités écrites entre crochets :

$$\sqrt{\frac{L}{g}} \text{ devient : } \sqrt{\frac{[m]}{[m] \times [s]^{-2}}} = \sqrt{[s]^2} = [s] \quad \text{L'unité est bien la seconde.}$$

1.2.2. À partir du XVIII^{ème} siècle, les horloges à balancier furent très utilisées pour mesurer le temps.

a. On considère, à Paris, une horloge dont le balancier a une longueur $L = 1,0$ m. Le balancier d'une telle horloge est un pendule aux oscillations entretenues et de faible amplitude que l'on peut modéliser par un pendule simple. Calculer la période propre du balancier de cette horloge.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \text{ avec } L = 1 \text{ m et } g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} : T_0 = 2,0 \text{ s}$$

b. Pourquoi dit-on que cette horloge « bat la seconde » ?

2 secondes pour l'aller-retour, 1 seconde pour un aller...

c. Que penser des indications données par cette horloge dans un lieu de latitude différente de celle de Paris ?

La valeur de g change selon la latitude, la valeur de la période ne sera plus la même, ce pendule ne pourra plus constituer fidèlement un outil de mesure en secondes.

2. Pendule de Foucault

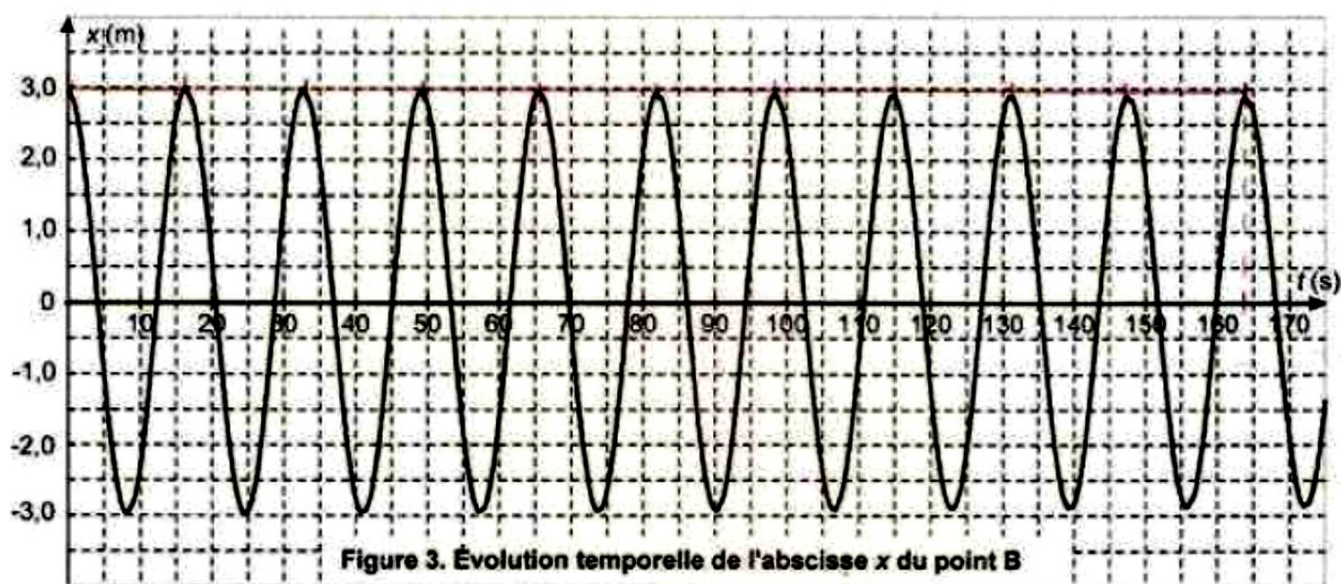
2.1. Période du pendule

Les dimensions précisées dans le texte d'introduction montrent que le pendule de Foucault installé au Panthéon peut être assimilé à un pendule simple.

On filme le mouvement de ce pendule pendant quelques minutes, durée assez courte pour pouvoir négliger la rotation de son plan d'oscillation.

Après traitement de la vidéo par un logiciel de relevés de positions, on trace la courbe représentant l'abscisse x du centre B de la sphère en fonction du temps.

Cette courbe est reproduite sur la figure 3 ci-dessous.



2.1.1. Déterminer graphiquement la valeur de la pseudo-période T des oscillations à 0,1 seconde près.

On mesure $10T = 164 \text{ s}$ à 1 s près (c'est l'incertitude qui semble raisonnable sur le diagramme fourni).

$10T = 164 \pm 1 \text{ s}$

Donc $T = 16,4 \pm 0,1 \text{ s}$

2.1.2. On rappelle que, compte tenu du faible amortissement, la pseudo-période est très voisine de la période propre. À partir de la valeur de la pseudo-période trouvée précédemment, retrouver la longueur du pendule de Foucault décrit dans le texte d'introduction.

A partir de $T = T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, on tire $L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 67 \text{ m}$

2.2. Amortissement

2.2.1. Quelle est l'origine de l'amortissement constaté dans les oscillations ? **Frottements**

2.2.2. Préciser la nature des conversions d'énergies mises en jeu lors des oscillations du pendule.

L'énergie mécanique du pendule se convertit en chaleur dissipée par les forces de frottements

2.2.3. Comment évolue l'énergie mécanique du pendule au cours du temps ?

Puisqu'il y a une force dissipatrice, l'énergie mécanique diminue...

2.3. Rotation du plan d'oscillation

Une observation plusieurs heures montre que le plan d'oscillation tourne lentement, à vitesse constante, autour de l'axe vertical passant par le point de suspension A ; pour le pendule de Foucault installé au Panthéon à Paris, en un jour, soit 24 h, ce plan tourne de 270° dans le sens des aiguilles d'une montre, comme l'illustre la **figure 4** ci-dessous.

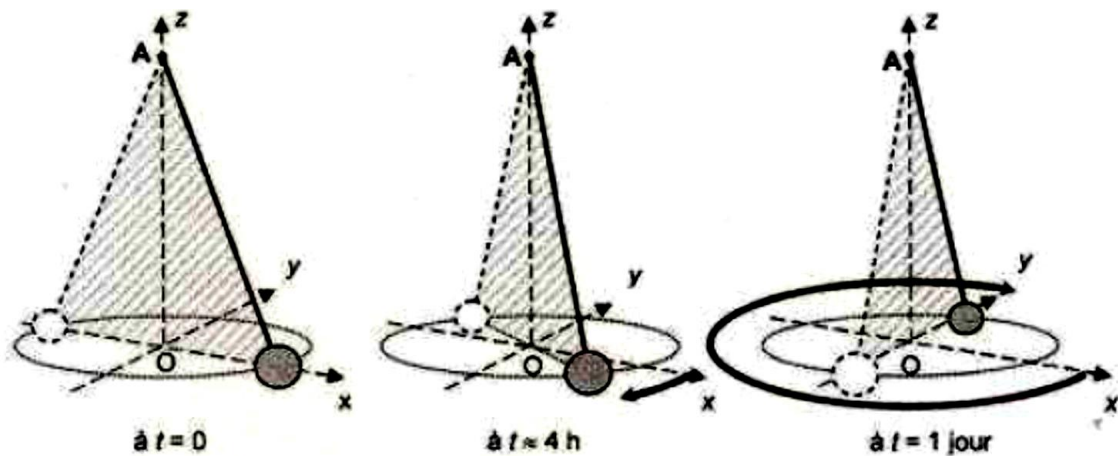


Figure 4. Rotation du plan d'oscillation au cours d'une journée

De nombreux pendules de Foucault ont été réalisés et placés en différents lieux sur la Terre. L'étude de leurs mouvements montre que la période de rotation du plan d'oscillation, notée τ , dépend uniquement de la latitude λ du lieu (voir les documents présentés **AUX FIGURES A4 ET A5 DE L'ANNEXE**).

2.3.1. Pour un observateur fixe dans le référentiel terrestre, le mouvement du pendule n'est pas plan. Cette observation est en désaccord avec l'application de la deuxième loi de Newton évoquée à la question 1.1.2. Que peut-on en conclure quant au référentiel terrestre choisi pour faire l'étude dans la mesure où, ici, l'étude dure plusieurs heures. **On en conclut que dans ces conditions expérimentales, le référentiel terrestre ne peut plus être considéré comme galiléen.**

2.3.2. Calculer, pour le pendule installé au Panthéon, la période de rotation du plan d'oscillation, notée τ . Compléter la case vide du tableau **DE LA FIGURE A4 DE L'ANNEXE**.

Ce sera la durée pour une rotation de 360° comme la rotation se fait à vitesse constante et que l'énoncé nous donne la durée (24h) d'une rotation de 270°, nous pouvons calculer : $\tau = \frac{360}{270} \times 24 = 32$ h

2.3.3. Reporter le point correspondant sur le graphe $\tau = f\left(\frac{1}{|\sin \lambda|}\right)$ **DE LA FIGURE A5 DE L'ANNEXE**.

Nous avons $\tau = 32$ h pour $\lambda = 48,85^\circ$, soit $\frac{1}{|\sin \lambda|} = 1,33$

On place le point... Ils sont tous alignés, nous disposons d'une droite d'étalonnage.

Nous mesurons la valeur de τ avec notre pendule de Foucault, nous reportons sur la droite d'étalonnage et nous remontons à la valeur de λ ...

En déduire une méthode pour déterminer, à l'aide d'un pendule de Foucault, la latitude d'un lieu.

Dans la pratique, on utilise d'autres méthodes pour déterminer la latitude d'un lieu.

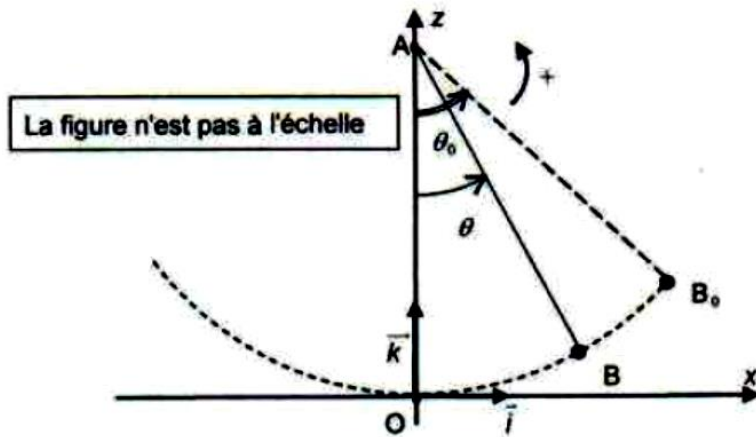


Figure A3. Pendule simple

Lieu	latitude λ	période τ
Pôle nord	90,00°	23 h 56 min
Kirkenes (Norvège)	69,82°	25 h 31 min
Paris	48,85°
Quito (Equateur)	0,22°	6329 h 17 min
Rio De Janeiro (Brésil)	-22,95°	61 h 31 min
Melbourne (Australie)	-37,82°	39 h 02 min

Figure A4. Période de rotation du plan d'oscillation en différents lieux

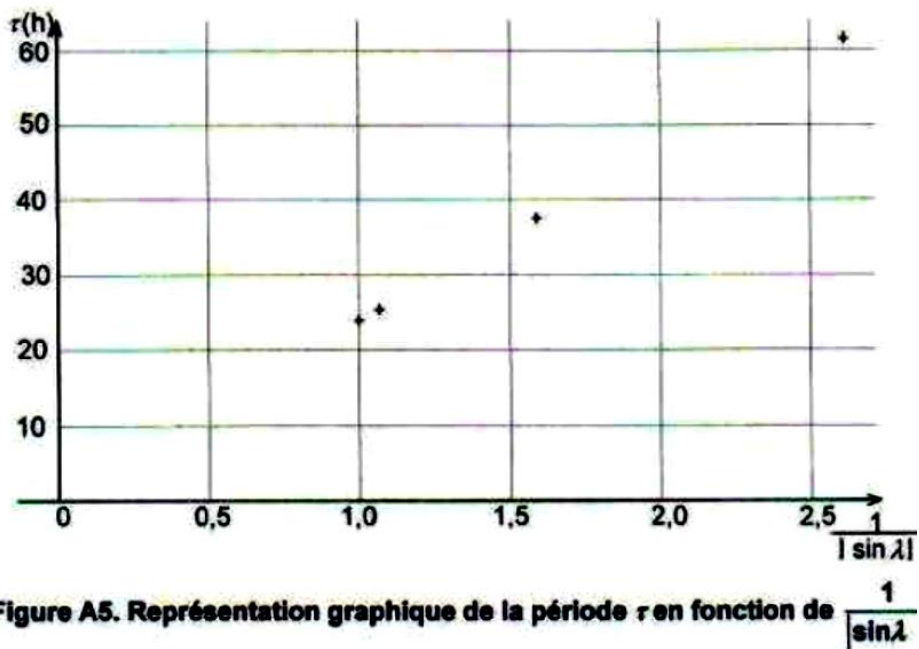


Figure A5. Représentation graphique de la période τ en fonction de $\frac{1}{|\sin \lambda|}$

Les physiciens et les chimistes au service de la mesure du temps

La mesure du temps est une question essentielle depuis... la nuit des temps. Elle a initialement été basée sur l'observation d'un phénomène régulier et répétitif qui permettait de caractériser des durées égales.

1. La mesure du temps par Galilée

Galilée, au XVII^{ème} siècle, a eu l'idée d'utiliser un pendule pour mesurer le temps :

« J'ai pris deux boules, l'une de plomb et l'autre de liège, celle-là au moins cent fois plus lourde que celle-ci, puis j'ai attaché chacune d'elles à deux fils très fins, longs tous les deux de quatre coudées ; les écartant alors de la position perpendiculaire, je les lâchais en même temps ; une bonne centaine d'allées et venues, accomplies par les boules elles-mêmes, m'ont clairement montré qu'entre la période du corps pesant et celle du corps léger, la coïncidence est telle que sur mille vibrations comme sur cent, le premier n'acquiert sur le second aucune avance, fût-ce la plus minime, mais que tous les deux ont un rythme de mouvement rigoureusement identique.

On observe également l'action du milieu qui, en gênant le mouvement, ralentit bien davantage les vibrations du liège que celles du plomb, sans toutefois modifier leur fréquence.

D'après *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*,
publié en 1636

Données :

Une coudée = 0,573 m

Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

La masse du pendule de plomb de Galilée est : $m = 50 \text{ g}$

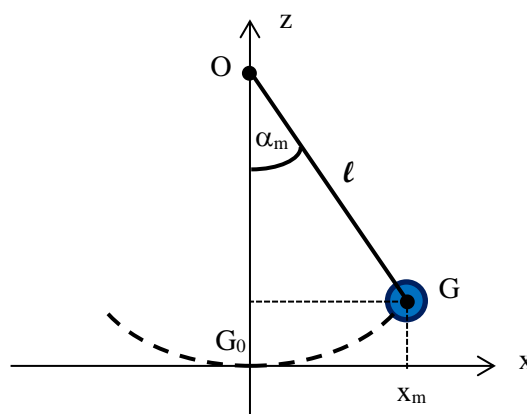
On réalise un pendule en suspendant une bille de plomb de masse $m = 50 \text{ g}$ et de centre d'inertie G, à un fil de longueur ℓ accroché en O comme l'indique la figure du **document 2**.

On choisit la position à l'équilibre G_0 de G comme origine des altitudes z . Pour un amortissement faible, la pseudo-période T du pendule est voisine de sa période propre T_0 . L'expression de la période propre du pendule est l'une des propositions suivantes :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\ell} ; T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} ; T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}} ; T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\ell}}$$

ℓ désigne la longueur du fil et m la masse du pendule.

Un système informatique permet d'obtenir les mesures représentées sur les deux graphes du document 3 de l'annexe.



1.1. À l'aide des documents et de vos connaissances, proposer une réponse argumentée pour montrer que « le pendule réalisé aurait pu être celui de Galilée ! ».

Pour cela :

À l'aide d'une analyse dimensionnelle, choisir l'expression de la période du pendule simple qui convient parmi celles proposées. Comparer de la manière la plus précise possible, la valeur calculée de la période du pendule de Galilée à celle du pendule réalisé expérimentalement, puis conclure.

Pour l'analyse dimensionnelle, voir l'exercice précédent.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pendule de Galilée : $L = 4$ coudées = 2,29 m Calcul de T_0 : $T_0 = 3,04$ s

Mesure de T sur l'enregistrement ci-dessous : $6T = 18$ s, $T = 3$ s

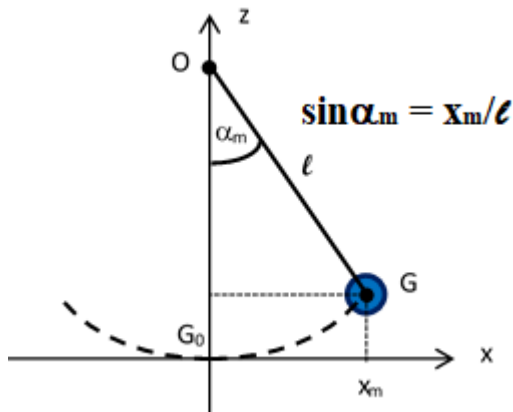
$T = T_0$ (avec un chiffre significatif), notre pendule pourrait être celui de Galilée.

Sans refaire le calcul, nous nous autorisons donc à considérer que la longueur de notre pendule est $l = 2,3$ m

1.2.

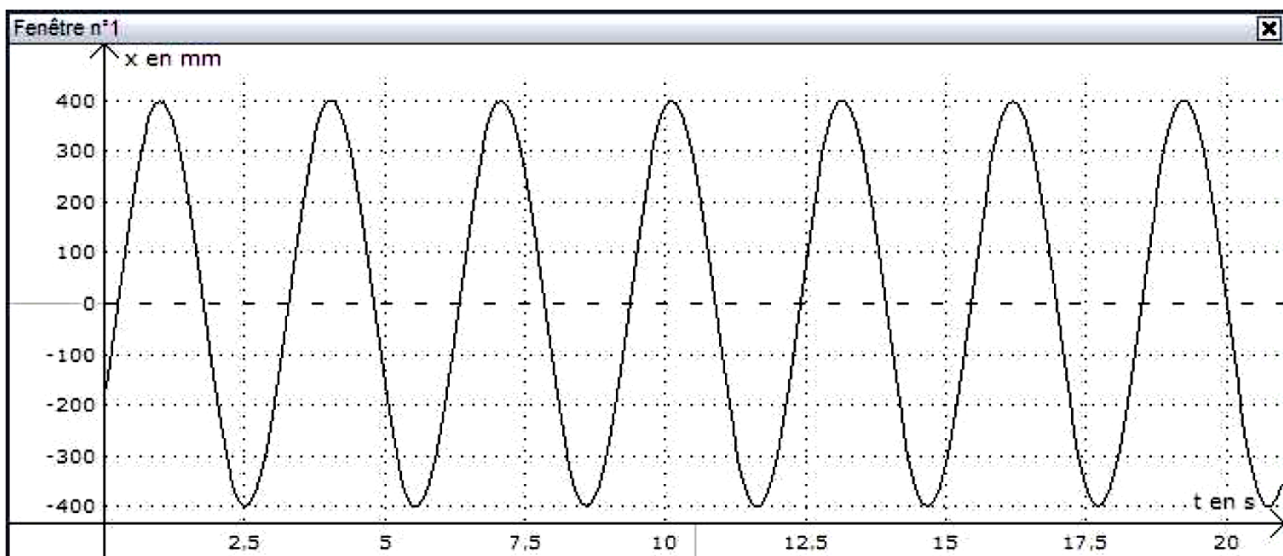
1.2.1. Déterminer à partir du document ci-dessous la valeur de l'abscisse x_m

$x_m = 400$ mm



$$\sin \alpha_m = \frac{0,400}{2,3} = 0,174 \quad \alpha_m = 10^\circ$$

En déduire la valeur de l'angle maximal α_m , en degré, décrit par le pendule.



Évolution de l'abscisse x du centre d'inertie G du système en fonction du temps

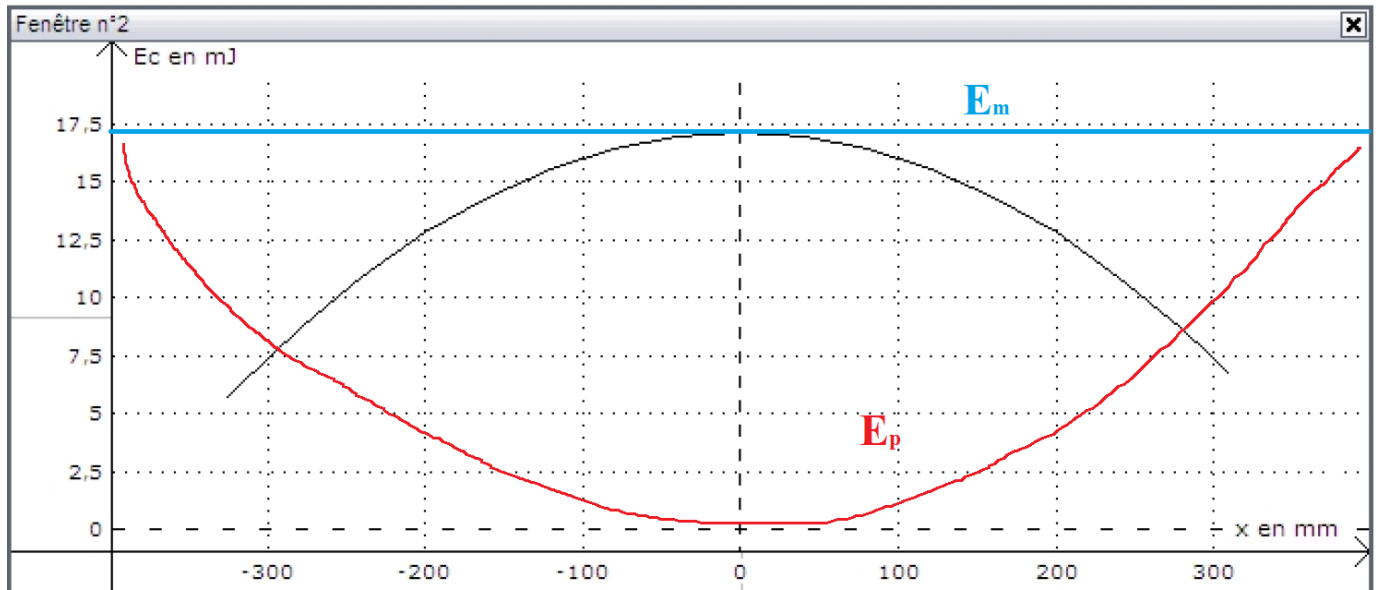
1.2.2. Calculer la vitesse maximale v_m atteinte par le centre d'inertie G .

Je pense que l'on a le droit d'utiliser le diagramme qui suit. Nous lisons la valeur maximale de E_c : 17,25 mJ (en nous appliquant)

La formule est censée être connue : $E_{cm} = \frac{1}{2}mv_m^2$

On en déduit $v_m = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,725 \times 10^{-2}}{0,050}} = 0,83 \text{ m.s}^{-1}$

1.2.3. Tracer sur le document ci-dessous les évolutions de l'énergie mécanique et de l'énergie potentielle de pesanteur, en fonction de l'abscisse x du centre d'inertie G du pendule réalisé.



Variation de l'énergie cinétique du pendule en fonction de l'abscisse x du centre d'inertie G

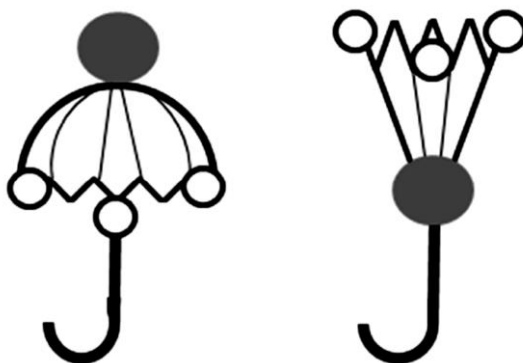
2. La molécule d'ammoniac.

Avec l'horloge atomique – conçue à partir des années 1950/60 – la mesure du temps bascule dans le temps de l'infiniment petit. Ce ne sont plus les oscillations régulières d'un pendule ou d'un ressort spiral qui donnent le rythme à l'horloge. Ici, ce sont les vibrations extrêmement rapides d'une molécule ou d'un atome que l'homme a su mettre au profit de la mesure du temps.

Dans les années 1960, il a été décidé de détacher la mesure du temps de l'astronomie et de redéfinir le temps en fonction des vibrations d'une molécule ou d'un atome.

Une des premières horloges de ce type mettait en jeu les oscillations de la molécule d'ammoniac. (...) Les molécules d'ammoniac ont la forme d'un parapluie, elles peuvent ainsi se retourner de la même façon que cet objet par grand vent (voir schéma ci-dessous) !

En effet, en faisant un aller-retour d'une forme « normale » à une forme « retournée » à un rythme régulier de 24 milliards de fois par seconde (!), ces molécules permettent de concevoir un dispositif horloger d'une stabilité inégalée...



D'après http://www.besancon.fr/gallery_files/site_1/346/353/782/46658/lhorloge_atomique_fiche_professeur.pdf

2.1. Quelle est la période de retournement de la molécule d'ammoniac ?

$$f = 24 \times 10^9 \text{ Hz (24 milliards de fois par seconde)}$$

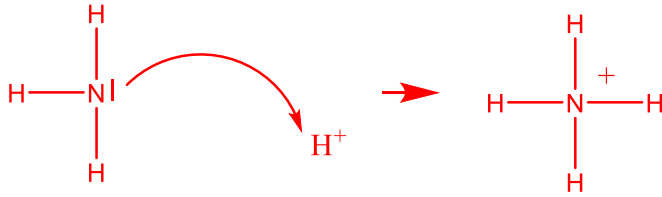
$$T = 1/f = 4,2 \times 10^{-11} \text{ s}$$

2.2. La molécule d'ammoniac est constituée d'un atome d'azote et de trois atomes d'hydrogène. Écrire la formule de Lewis de la molécule d'ammoniac et proposer une représentation de Cram spatiale de la molécule.



Données : N (Z = 7) ; H (Z = 1)

2.3. L'ammoniac est une base, mise en jeu dans l'équilibre suivant : $\bar{N}H_3 + H^+ \rightarrow NH_4^+$
 Recopier l'équation ci-dessus et expliquer la formation de l'ion ammonium NH_4^+ à l'aide d'une flèche courbe de mécanisme.



2.4. *Donnée* : La constante d'acidité de l'ion ammonium NH_4^+ à $25^\circ C$ est $K_A = 5,6 \times 10^{-10}$.

Parmi les 4 propositions suivantes une seule affirmation est vraie. **Justifier que les 3 autres** sont fausses.

- ① Le pK_A de l'ion ammonium est 10,2. **Faux** $pK_A = -\log K_A = 9,3$
- ② La réaction de dissociation de l'ion ammonium dans l'eau s'écrit :

$$NH_4^+_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftharpoons NH_3_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \quad \text{Vrai}$$
- ③ L'ion ammonium est totalement dissocié dans l'eau.
Faux, la pK_A est entre 0 et 14, couple acide/base faible, réaction avec l'eau limitée.
- ④ Dans une solution aqueuse d'ammoniac de pH égal à 8, l'espèce prédominante est NH_3 .
Faux, $pH < pK_A$, l'espèce prédominante du couple sera l'acide, NH_4^+ .