Université Paul Sabatier, L2 Physique, 2016/2017

Contrôle Terminal
Mathématiques pour la Physique

16 Mai 2018, 10h00 - 12h00, année universitaire 2016-2017.
Durée : 2 heures.

Remarques générales : Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. L'usage des téléphones portables est interdit.
Toutes les réponses doivent être clairement justifiées et, lors de la correction, une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction.
Le sujet comporte 3 pages et les exercices sont indépendants.

* * *

1. Questions de cours

a) Soit la série de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$ défini par $u_n = 1/n^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur α la série est-elle convergente? Divergente?

b) Soit f une fonction réelle périodique de période T, de carré intégrable sur l'intervalle $[0, T]$. Ecrire son développement en série de Fourier complexe. On donnera les expressions des coefficients complexes de la série de Fourier.

* * *

2. Déterminant de matrice et diagonalisation

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et la matrice A_n sa représentation matricielle dans la base canonique. $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie de la manière suivante, pour $n \geq 3$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une base de Ker f.

b) En déduire que 0 est valeur propre de A_n et donner la dimension du sous-espace propre associé.

c) Montrer que si λ est valeur propre non nulle de A_n alors λ doit vérifier:

$$\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$$

d) En déduire les valeurs propres non-nulles de A_n et la dimension des sous-espaces propres associés.

e) En déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Une autre manière de montrer que f est diagonalisable est de calculer son polynôme caractéristique et de rechercher ses valeurs et vecteurs propres.

f) Soit $P_n(X) = det(XI_n - A_n)$ le polynôme caractéristique de A_n, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $P_3(X)$.

g) Montrer que:

$$P_n(X) = XP_{n-1}(X) - X^{n-2}$$

h) Montrer par récurrence que:

$$P_n(X) = X^{n-2}\left(X^2 - X - (n-1)\right)$$

i) En déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable.

j) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A_3.

* * *

3. Séries numériques

On considère la série de terme général (pour $n \geq 3$):

$$u_n = \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$$

a) Calculer la décomposition en éléments simples de u_n, c'est à dire trouver les réels a, b et c tels que:

$$u_n = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+2}$$

b) Calculer et simplifier la somme partielle:

$$S_n = \sum_{n=3}^{N} u_n$$

c) En déduire que la série est convergente et calculer sa somme.

$$* * *$$

4. Séries entières

a) Donner le développement en série entière (en précisant le rayon de convergence) de la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

b) En dérivant la fonction précédente, déterminer la somme de la série entière de terme général:

$$u_n(x) = nx^n$$

c) De même, en déduire la somme de la série entière de terme général:

$$v_n(x) = n^2x^n$$

d) En déduire la somme et le rayon de convergence de la série entière de terme général:

$$w_n(x) = (an^2 + bn + c)x^n$$

où a, b et c sont 3 réels quelconques.