Chapitre M3

Algèbre 10

FONCTION DERIVEE
ET ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

Capacités	Connaissances
Utiliser les formules et règles de variation pour déterminer la dérivée d'une fonction.	Fonction dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle *I*. Fonctions dérivées des fonctions de référence. Notation $f'(x)$. Dérivée du produit d'une fonction par une constante, de la somme de deux fonctions.
Etudier, sur un intervalle donné, les variations d'une d'une fonction à partir du calcul et de l'étude du signe de sa dérivée. Dresser son tableau de variation. Déterminer un extremum d'une fonction sur un intervalle donné à partir de son sens de variation.	Théorème liant, sur un intervalle, le signe de la dérivée d'une fonction au sens de variation de cette fonction.

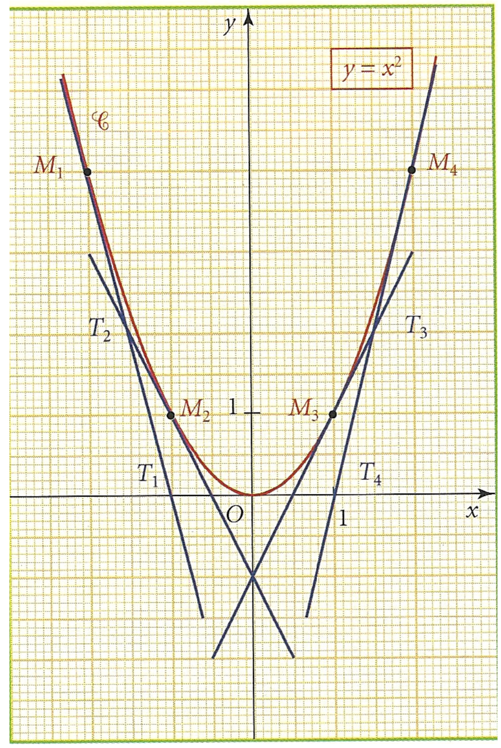
Contenu du dossier :

- ☐ **Cours**
- ☐ **Exercices (Livre Chapitre 4 pages 49-64)**
- ☐ **Corrigé des exercices**
- ☐ **Evaluation EM3**
- ☐ **Corrigé de l'évaluation EM3**

TBP M3

I. Qu'est-ce qu'une fonction dérivée ?

Activité 1



La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction *f* définie sur R par $f(x) = x^2$.
Les points M_1, M_2, M_3, M_4 les points de c d'abscisses -2, -1, 1, 2.
Les droites T_1, T_2, T_3, T_4 sont les tangentes à $\mathscr{C}$ en M_1, M_2, M_3, M_4.

1. Quelle est la tangente en O à $\mathscr{C}$?...

Donner son coefficient directeur. ....

2. **Déterminer** graphiquement les coefficients directement des droites T_1, T_2, T_3, T_4.

T_1 :...
T_2 :...
T_3 :...
T_4 :...

3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe c en son point d'abscisse *a* est le nombre dérivé $f'(a)$ de la fonction *f* en *a*.

3.1.Compléter, en utilisant les résultats précédents, le tableau suivant,

a	-2	-1	0	1	2
f'(a)					

3.2.A partir de l'observation du tableau obtenu, **proposer** une valeur pour $f'(3)$:

....
....

4. On se propose de contrôler la validité de la proposition faite pour $f'(3)$.
Sur l'écran de la calculatrice, **tracer :**
- la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2$
- la droite T d'équation $y = 6x – 9$

Fenêtre :	Xmin = 0 ;	Xmax = 6 ;	pas = 1
(*SHIFT F3*)	Ymin = - 5 ;	Ymax = 40 ;	pas = 5

Constater, avec la fonction trace que *T* est tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 3.
En déduire $f'(3)$.

....
....

5. Si x est un nombre réel donné, quelle est, à votre avis, l'expression de $f'(x)$?

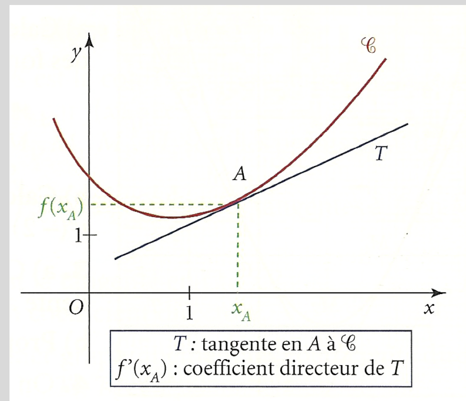
----

f est une fonction définie sur l'intervalle I ; f' est la fonction dérivée de f.

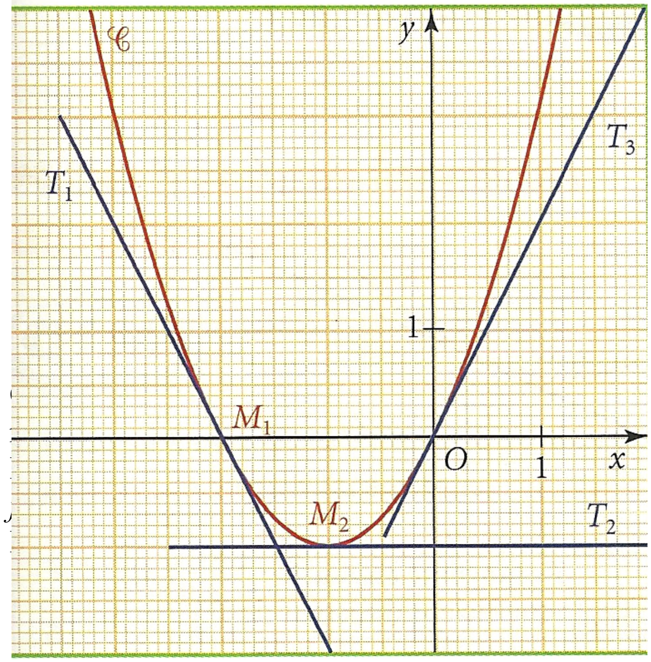
<u>Fonction dérivée</u>

x_A est un nombre de I ; $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.

- **Nombre dérivé**
  Le **nombre dérivé** de f en x_A, noté $f'(x_A)$ est le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ en son point A de coordonnées $(x_A\,;\,f(x_A))$.
- **Fonction dérivée**
  La **fonction dérivée** (ou dérivée) de f est la fonction, qui, à tout nombre x associe le nombre dérivé $f'(x)$; on la note f'.



1. Comment calculer la dérivée d'une somme de fonctions ?



Activité 2

On considère la fonction *f* définie pour tout nombre *x* réel par $f(x) = x^2 + 2x$.

La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de *f*.

Les droites T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathscr{C}$ en M_1, M_2 et O

1. **Déterminer** graphiquement les nombres dérivés $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$.

$f'(-2)$ = ...

$f'(-1)$ = ...

$f'(0)$ = ...

2. On peut écrire $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x)$ = ... et $v(x)$ = ...

2.1. Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$, où u' et v' désignent les dérivées des fonctions u et v, à l'aide de l'encadré ci-contre :

Si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$ Si $f(x) = ax + b$ alors $f'(x) = a$

....

....

....

....

2.2. Calculer les nombres suivants :

$u'(-2) + v'(-2)$ = ...

$u'(-1) + v'(-1)$ = ...

$u'(0) + v'(0)$ = ...

3.

3.1. Comparer les résultats obtenus à la question précédente avec les nombre $f'(-2)$, $f'(-1)$ et $f'(0)$.

....

....

....

....

3.2. Proposer une valeur pour $f'(1)$.

....

....

4. On se propose de contrôler la proposition faite pour $f'(1)$. A la calculatrice, **tracer** :

- la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2 + 2x$
- La droite T d'équation $y = 4x – 1$

Fenêtre :	Xmin = -3 ;	Xmax = 2 ;	pas = 1
(*SHIFT F3*)	Ymin = - 2 ;	Ymax = 6 ;	pas = 1

Constater que T est tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. **En déduire** $f'(1)$.

----

5. Quelle semble être l'expression de $f'(x)$ en fonction de $u'(x)$ et $v'(x)$?

<u>Dérivées des fonctions de référence et règles de dérivation</u>

Si $f(x)$ =	**alors $f'(x)$ =**
ax + b	a
b (constante)	0
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
k$u(x)$ k nombre réel	k$u'(x)$

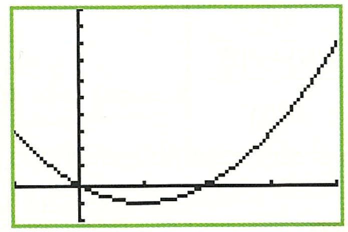
Exercices :

- ☐ 1 p 49 ☐ 2 p 49 ☐ 4 p 50 ☐ 5 p 50 ☐ 6 p 50
- ☐ 7 p 50 ☐ 8 p 50 ☐ 9 p 50 ☐ 10 p 50 ☐ 11 p 50
- ☐ 12 p 50 ☐ 13 p 50 ☐ 14 p 50 ☐ 15 p 50 ☐ 16 p 50
- ☐ 17 p 50 ☐ 18 p 50 ☐ 21 p 50

2. Comment étudier les variations d'une fonction en utilisant sa dérivée ?

Activité 3

A l'écran d'une calculatrice, on a tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [-1 ;4] par $f(x) = x^2 - 2x$



1. A partir de l'observation graphique, **indiquer** sur quel intervalle la fonction f est décroissante et sur quel intervalle elle est croissante.

----

2. **Calculer** l'expression $f'(x)$ de la dérivée de f .

----

3. **Etudier** sur l'intervalle [-1 ;4] le signe de $f'(x)$.

----

4. **Compléter** en utilisant les résultats précédents le tableau suivant.

x	-1 1 4
Signe de $f'(x)$	0
Variation de f	

5.

5.1. Sur [-1 ;1], quel est le signe de $f'(x)$? Quel est le sens de variation de f ?

5.2. Sur [1 ;4], quel est le signe de $f'(x)$? Quel est le sens de variation de f ?

6.

6.1. Graphiquement, **vérifier** que la fonction f admet un minimum pour une valeur x_0 de la variable que l'on précisera. Quel est ce minimum ?

………

……………………………………………………………………………………………

………

……………………………………………………………………………………………

6.2. **Indiquer** la valeur de $f'(x)$.

………

……………………………………………………………………………………………

<u>Dérivée et sens de variation d'une fonction</u>

Si, pour tout nombre x de I, on $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, alors f est **croissante** sur I.
Si, pour tout nombre x de I, on $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, alors f est **décroissante** sur I.

<u>Extrémum d'une fonction</u>

Si, pour la valeur x_0 de I, la dérivée f' **s'annule en changeant de signe**, alors la fonction f admet x_0 un **extremum** (un maximum ou un minimum)

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

La fonction f admet pour $x = x_0$ un **minimum** égal à $f(x_0)$.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

La fonction f admet pour $x = x_0$ un **maximum** égal à $f(x_0)$

Exercices : ☐ **29 p 52** ☐ **33 p 52** ☐ **36 p 52** ☐ **38 p 52** ☐ **43 p 52**
☐ **44 p 53** ☐ **45 p 53** ☐ **47 p 53**

Problèmes : ☐ **55 p 55** ☐ **58 p 56** ☐ **64 p 59**