Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole–Antilles–Guyane–Réunion septembre 2013 Correction

Exercice 1 **9 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x} - \dfrac{2}{x+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminons la limite de f quand x tend vers -1.
$\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \mathrm{e}^{0,5x} - \lim_{x\to-1} \frac{2}{x+1} = \mathrm{e}^{-0,5} - (+\infty) = -\infty$
La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
b. Déterminons la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{0,5x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1} = +\infty - 0 = +\infty$

2. Calculons $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
$f'(x) = 0,5\mathrm{e}^{0,5x} - 2 \times \dfrac{-1}{(x+1)^2} = 0,5\mathrm{e}^{0,5x} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$

3. $f'(x) > 0$ pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$ comme somme, produit et quotient de nombres positifs.

4. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
$f'(x) > 0$ pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variation de f sur $]-1\,;\,+\infty[$.

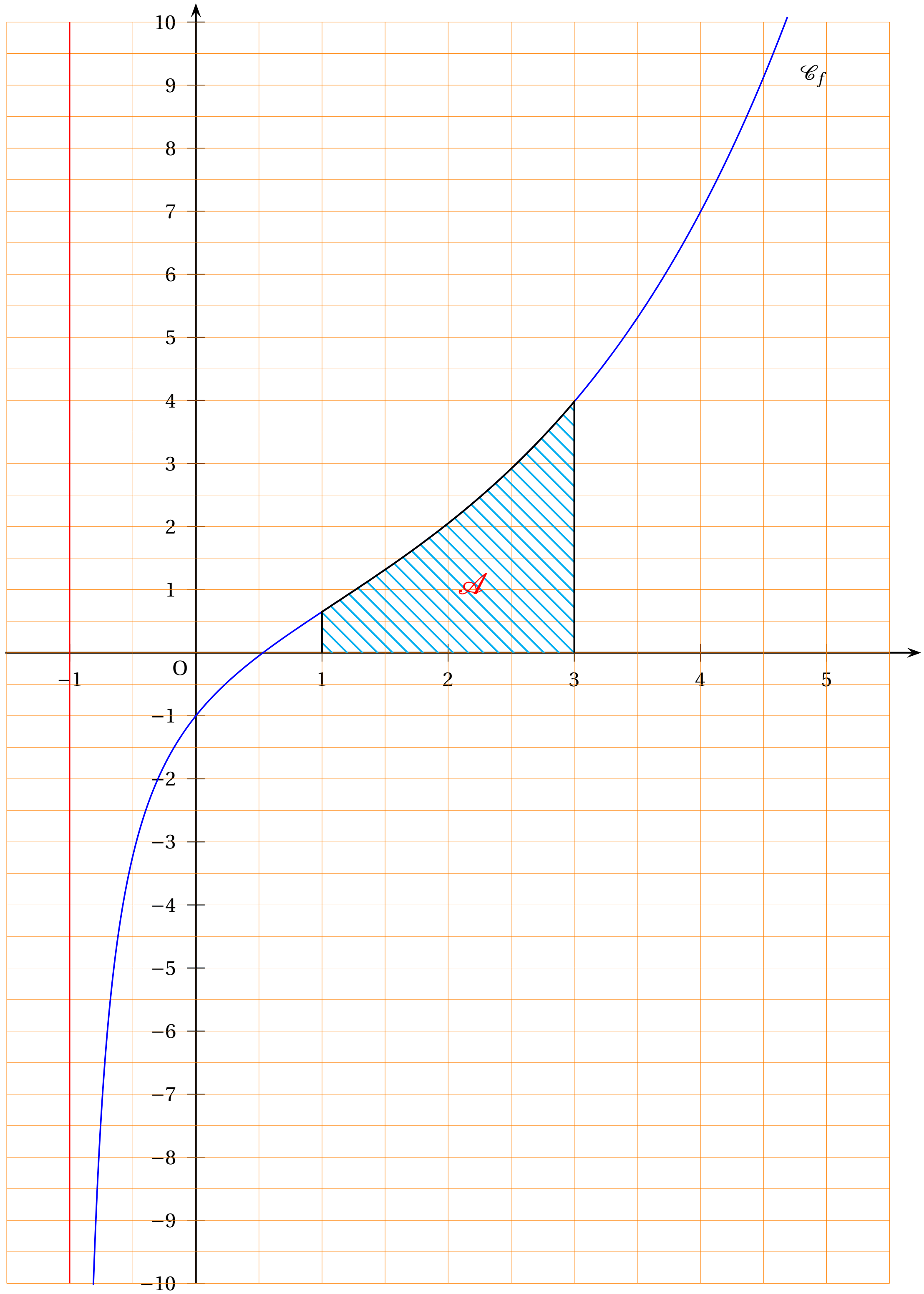
x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Le tableau de valeurs est complété dans celui donné en annexe A (à rendre avec la copie).

6. La courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

7. Soit la fonction F définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $F(x) = 2\mathrm{e}^{0,5x} - 2\ln(x+1)$.
Une fonction F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$. Dérivons F.
$F'(x) = 2 \times (0,5x\mathrm{e}^{0,5x}) - 2 \times \dfrac{1}{x+1} = \mathrm{e}^{0,5x} - \dfrac{2}{x+1} = f(x)$.
La fonction F est une primitive de f sur $]-1\,;\,+\infty[$.

8. Sur l'intervalle $[1\,;\,3]$, $f(x) \geqslant 0$, l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ est $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
$\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[2\mathrm{e}^{0,5x} - 2\ln(x+1)\right]_1^3 = 2\mathrm{e}^{0,5\times3} - 2\ln(3+1) - \left(2\mathrm{e}^{0,5} - 2\ln(2)\right) = 2\mathrm{e}^{1,5} - 4\ln 2 - 2\mathrm{e}^{0,5} + 2\ln(2)$
$\mathscr{A} = 2\mathrm{e}^{1,5} - 2\mathrm{e}^{0,5} - 2\ln(2)$ unités d'aire.
L'unité d'aire vaut 2 cm^2. D'où $\mathscr{A} = 4\left[\mathrm{e}^{1,5} - \mathrm{e}^{0,5} - \ln(2)\right]$ cm^2.
L'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ vaut à 10^{-2} près 8,56 cm^2.



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
−1
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{A}$

Exercice 2 — 4 points

La courbe C donnée dans le **document 1** est la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$. On sait que le point A $(0\ ;\ 1)$ appartient à la courbe C et que la fonction g admet un minimum en $x = 0$. Les droites d'équations respectives $x = -3$ et $y = 4$ sont asymptotes à la courbe C.

Le QCM est donné en annexe A.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie est zéro.

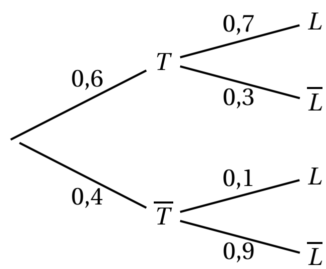
Exercice 3 — 7 points

Un magasin de matériel audiovisuel réalise des promotions sur un modèle de téléviseur et un modèle de lecteur DVD.
Une enquête statistique révèle que :
60 % des clients du magasin achètent ce modèle de téléviseur et parmi eux 70 % achètent aussi ce lecteur de DVD.
Parmi ceux qui n'achètent pas ce modèle de téléviseur, seulement 10 % achètent ce lecteur DVD.

Partie A

Un client se présente au magasin. On appelle :
T l'événement « il achète le téléviseur en promotion » ;
L l'événement « il achète le lecteur DVD en promotion ».

1. Traduisons la situation à l'aide d'un arbre en indiquant les probabilités sur chaque branche.



2. La probabilité de l'événement « le client achète les deux appareils » est notée $p(T \cap L)$.

   $p(T \cap L) = p(T) \times p_t(L) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42.$

3. Démontrons que la probabilité de l'événement « le client achète le lecteur DVD »est 0, 46.

   $p(L) = p(T) \times P_T(L) + p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(L) = 0{,}42 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}42 + 0{,}04 = 0{,}46.$

   La probabilité que le client achète le lecteur DVD est bien celle attendue.

4. Sachant que le client a acheté le lecteur de DVD, la probabilité qu'il ait aussi acheté le téléviseur est notée $p_L(T)$.

   $p_L(T) = \dfrac{p(T \cap L)}{p(L)} = \dfrac{0{,}42}{0{,}42} \approx 0{,}913\,0.$

   À 10^{-4} près la probabilité que le client ait acheté un téléviseur, sachant qu'il a acheté un lecteur de DVD est 0,913 0.

Partie B

Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 € et le lecteur DVD 200 €.
Lors des promotions, le magasin effectue une remise de 15 % pour l'achat d'un seul appareil et de 25 % pour l'achat des deux appareils.

1. La dépense engagée pour l'achat des deux appareils en promotion s'élève à 525 €. En effet sans réduction, il aurait payé 700 €. Bénéficiant d'une réduction de 25 %, le prix est par conséquent multiplié par 0,75,or $700 \times 0{,}75 = 525$.

Soit X la variable aléatoire associée à la dépense éventuelle du client en tenant compte de cette promotion.

2. Déterminons les autres valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ainsi que leur probabilité.

La probabilité que le client n'ait acheté ni téléviseur ni lecteur de DVD est :

$p(\overline{T} \cap \overline{L}) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

La dépense engagée pour l'achat :

- d'un lecteur de DVD est 170€ ; $200 \times 0,85 = 170$.
  La probabilité de n'acheter que le lecteur DVD est $p(\overline{T} \cap L) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$
- d'un téléviseur est 425€ ; $500 \times 0,85 = 425$.
  La probabilité de n'acheter que le téléviseur est
  $p(T \cap \overline{L}) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$

Complétons le tableau donné en **annexe A**.

3. Calculons l'espérance mathématique de X.

$E(X) = 0 \times 0,36 + 170 \times 0,04 + 425 \times 0,18 + 525 \times 0,42 = 303,8$.

DOCUMENT 1

EXERCICE 2
Représentation graphique de la fonction *g*

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 1 :

x	$-0,75$	$-0,5$	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)$	$-7{,}31$	$-3{,}22$	-1	$-0{,}05$	0,65	2,05	3,98	6,98

Les résultats sont arrondis à 10^{-2} *près.*

EXERCICE 2 :

1. La limite de la fonction g en $+\infty$ est :

☐ $+\infty$ ☐ -3 ☑ 4

2. On note g' la fonction dérivée de g sur $]-3\,;\,+\infty[$.

☐ $g'(0) = 1$ ☐ $g'(1) = 0$ ☑ $g'(0) = 0$

3. Une équation de la tangente à C au point A est :

☑ $y = 1$ ☐ $y = x$ ☐ $y = 0$

4. Sur $]-3\,;\,+\infty[$, l'équation $g(x) = x$:

☐ n'a aucune solution, ☐ a une seule solution $x = 0$, ☑ a une seule solution dans l'intervalle $]1\,;\,2[$.

EXERCICE 3 :

x	0	170	440	525
$P(X = x)$	0,36	0,04	0,18	0,42