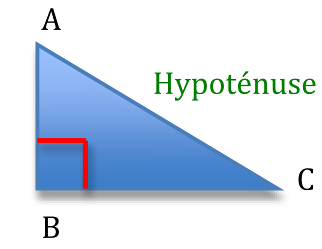
Théorème de Pythagore

Le théorème le plus célèbre des mathématiques tient son nom de Pythagore de Samos (580 av. JC – 495 av. JC). Il permet en effectuant certaines opérations de calculer les longueurs des côtés dans un triangle rectangle. Sa réciproque permet de vérifier si un triangle est rectangle ou non.

I Triangle rectangle

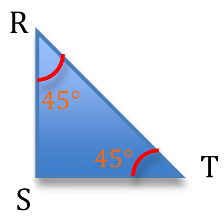
. Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit (90°).



En rouge, c'est ainsi que l'on note un angle droit dans toute figure géométrique.

Le côté AC est le plus long côté du triangle rectangle, on l'appelle l'hypoténuse.

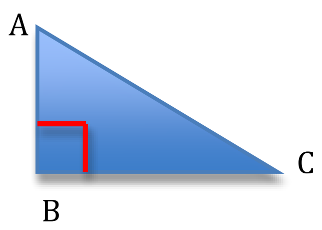
. On peut aussi avoir un triangle isocèle rectangle, qui est un triangle possédant un angle droit et deux côtés égaux.



Dans le cas d'un triangle isocèle rectangle, les angles $\widehat{SRT}$ et $\widehat{STR}$ valent tous les deux 45°.

II Enoncé du Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.



Considérons ce triangle ABC rectangle en B. L'énoncé littéral du Théorème de Pythagore écrit ci-dessus se traduit comme ceci :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

C'est à dire AC*AC = AB*AB + BC*BC

. Le carré d'un nombre est le résultat du produit de ce nombre par lui-même.

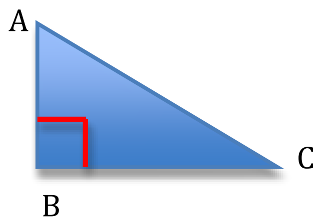
Exemples :

$KJ^2 = KJ*KJ$

$a^2 = a*a$

$5^2 = 5*5 = 25$

III Calculer la longueur de l'hypoténuse



Soit ABC un triangle rectangle en B.

AB = 5cm   AC = 12 cm

Calculons AC.

Le triangle est rectangle donc on peut utiliser le Théorème de Pythagore.

$AC^2 = BC^2 + AB2$

$AC^2 = 12^2 + 5^2$

$AC^2 = 144 + 25$

$AC^2 = 169$

Une fois que nous sommes arrivés là, AC ne vaut pas 169 ! C'est le carré de AC qui vaut 169. Pour trouver la longueur de AC, il faut appliquer à 169 l'opération inverse du carré, c'est à dire la racine carrée.

$AC^2 = 169$

$AC = \sqrt{169}$

AC = 13cm

Remarques :

- La racine carrée est toujours positive
- La racine carrée d'un nombre est le nombre qui a pour carré lui-même

Exemples

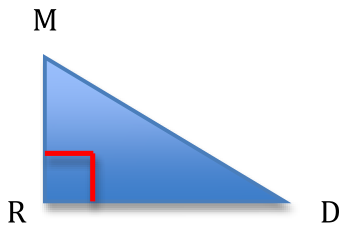
- $\sqrt{25} = 5$ la racine carrée de 25 vaut 5 car le carré de 5 vaut 25
- $\sqrt{100} = 10$ car $10*10 = 100$

Pour plus de détails, se référer au chapitre sur les racines carrées.

IV Calcul d'un côté qui n'est pas l'hypoténuse

Je traiterai ce cas de 2 façons différentes. En réalité il s'agit d'une équation. Or au moment de voir ce chapitre je sais que tout le monde n'a pas vu les équations. Pourtant il est beaucoup plus simple de comprendre cette partie une fois que les équations sont maitrisées. Il y aura donc une partie où j'expliquerai ce cas avec les équations et une autre où ce sera plus méthodologique.

A Mise en équation du problème

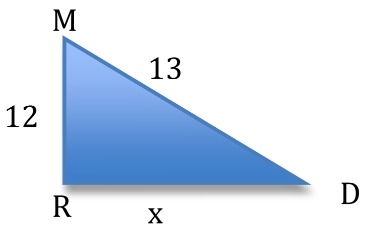


D'après le Théorème de Pythagore

$MD^2 = MR^2 + RD^2$

Donc on a $RD^2 = MD^2 - MR^2$

Et $MR^2 = MD^2 - RD^2$



Notons x la longueur que l'on cherche à calculer.

$MD = 13$ $MR = 12$ $RD = x$

Le triangle est rectangle, appliquons le Théorème de Pythagore.

$MD^2 = MR^2 + RD^2$

Remplaçons les distances par les valeurs numériques pour plus de lisibilité.

$13^2 = 12^2 + x^2$

$13^2 - 12^2 = x^2$

On met les x d'un coté et les nombres de l'autre comme dans une équation normale.

$x^2 = 13^2 - 12^2$

Ensuite on met x à gauche pour lire plus facilement.

$x^2 = 169 - 144$

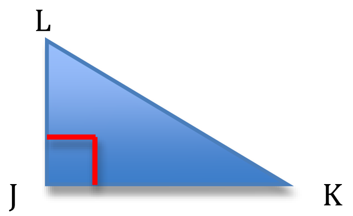
$x^2 = 25$

$x = \sqrt{25}$

$x = 5$

B Méthodologie quand on n'a pas vu les équations

Le problème lorsqu'on n'a pas vu les équations, c'est qu'il faut appliquer sans comprendre. Ici je vais donner une méthode « visuelle » mais qui n'est pas suffisante pour comprendre. Il est vraiment préférable de savoir résoudre une équation pour traiter cette partie du Théorème de Pythagore.



D'après le Théorème de Pythagore

$KL^2 = JL^2 + KJ^2$

LK est l'hypoténuse donc

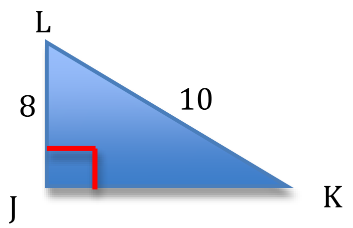
$JL^2 = KL^2 - KJ^2$

$JK^2 = KL^2 - LJ^2$

L'hypoténuse est toujours devant le « moins ».

On ne soustrait JAMAIS l'hypoténuse dans ce calcul, car c'est le côté le plus grand. JL^2 et JK^2 doivent toujours être positifs. On ne peut pas trouver de longueur négative. Si tu trouves une longueur négative c'est qu'il y a une erreur.

Exemple



D'après le Théorème de Pythagore

$KL^2 = JL^2 + KJ^2$

$JL^2 + KJ^2 = KL^2$

$KJ^2 + 8^2 = 10^2$

$KJ^2 = 10^2 - 8^2$

$KJ^2 = 100 - 64$

Ici il faut bien effectuer une soustraction. Si l'on fait une addition, KJ devient le côté le plus grand ce qui n'est pas possible. Le côté le plus grand est TOUJOURS l'hypoténuse.

$KJ^2 = 36$

$KJ = \sqrt{36}$

$KJ = 6$

Quel que soit le calcul :

- il est impossible d'avoir un résultat négatif
- l'hypoténuse est toujours le côté opposé à l'angle droit et donc le plus long. Si dans ton calcul un des deux côtés devient plus grand que l'hypoténuse alors c'est qu'il y a une erreur

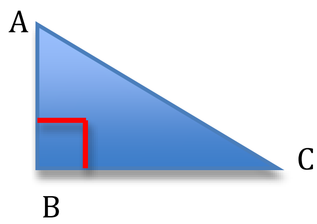
V Réciproque du Théorème de Pythagore

La réciproque d'un énoncé consiste d'une certaine façon d'inverser le « si » et le « alors ». Voici l'énoncé du Théorème de Pythagore :

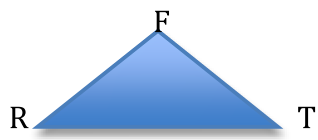
Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Réciproque

Si dans un triangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.



Si dans ce triangle $AB^2 + BC^2 = AC^2$ alors ABC est rectangle en B.

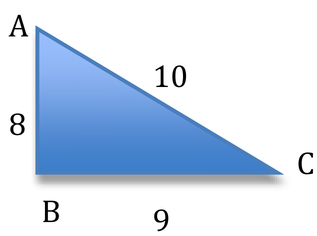


Dans ce triangle, RT est le côté le plus long.

Si dans ce triangle $FR^2 + FT^2 \neq RT^2$ alors ce triangle n'est pas rectangle.

$\neq$ signifie « est différent de »

Exemples



NB : le dessin n'est pas à l'échelle, les longueurs écrites ne correspondent pas aux longueurs du dessin.

Nous allons vérifier si $AC^2 = BC^2 + AB^2$

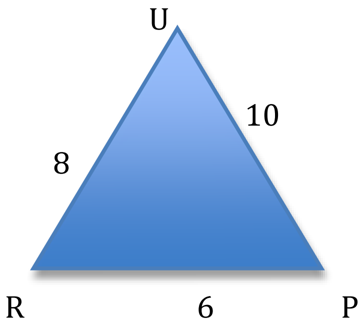
On calcule d'abord AC^2

$AC^2 = 10^2 = 100$

On calcule ensuite $BC^2 + AB^2$

$BC^2 + AB^2 = 9^2 + 8^2 = 81 + 72 = 153$

$AC^2 \neq BC^2 + AB^2$ Donc le triangle ABC n'est pas rectangle, même si il semble l'être sur le dessin.



UP est le côté le plus long de ce triangle.

Vérifions si $UP^2 = RP^2 + UR^2$

$UP^2 = 10^2 = 100$

$RP^2 + UR^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Donc $UP^2 = RP^2 + UR^2$

Le triangle PUR est donc rectangle en R

Notez bien que dans le premier exemple, le triangle semble rectangle à cause du dessin, mais par le calcul on prouve qu'il ne l'est pas. Dans le deuxième exemple, le triangle ne semble pas rectangle à cause du dessin mais on prouve par le calcul qu'il l'est. C'est fait exprès, car il est tout à fait possible que votre professeur vous présente un exercice de ce type. Ce qui est important, ce sont les longueurs données. C'est uniquement à partir de ces données et en faisant des calculs que vous déterminerez si le triangle est rectangle ou non.

Remarques sur le chapitre

- une réciproque n'est pas toujours vraie
- l'angle droit est toujours « en face » de l'hypoténuse
- l'hypoténuse est le plus long côté d'un triangle rectangle, dans les autres triangles le plus long côté n'a pas de nom particulier, mais comme dans tous les triangles, le côté le plus long est celui qui est opposé à l'angle le plus grand