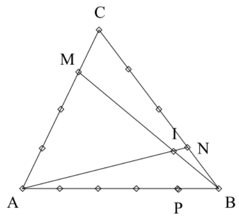
Exercice 1
Soient A et B deux points distincts. Dans chacun des cas suivants ; écrire C comme barycentre des points A et B

a) $\overrightarrow{AB} = -5\overrightarrow{AC}$ b) $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$

c) $4\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{BA}$

Exercice 2
a) Dans la figure ci-dessus, écrire :



⇨ M comme barycentre des points A et C ;

⇨ N comme barycentre des points B et C ;

⇨ P comme barycentre des points A et B ;

⇨ I comme barycentre des points A, B et C

⇨ b) La droite (CP) coupe la droite (MB) en J, écrire J comme barycentre des points A, B et C

Exercice 3
Soit ABCD un parallélogramme, réduire les sommes des vecteurs suivantes :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$$

Exercice 4
Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2+3i ; 3-4i et -5 +2i

a) Déterminer les affixes des barycentres des systèmes suivants :

a) (A, 3) et (B, -2) b) (A,-3) et (C,4)

c) (A, 2) ; (B, 4) et (C, 6) d) (A, 1) ; (B, 1) et (C, 1)

Exercice 5
On considére dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points A(1 ; 3 ; 5) , B(-1 ; 3 ; -4) et C(2 ; -3 ; 3).

a) Calculer les coordonnées du point I barycentre de (A ,-2) et (B , 3)

b) Calculer les coordonnées du point J barycentre de (A ,-2) , (B , 3) et (C , 1)

c) Quel est le milieu de[CI] ?

Exercice 6
Soit ABC un triangle donné. Construire, en utilisant deux méthodes différentes, le barycentres G des points pondérés (A , 1) ; (B , -2) et (C , 3).

Exercice 7
Soit ABCD un parallélogramme, P est le point tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et Q le symétrique du milieu de [AD] par rapport à A. Démontrer que les points P, Q et C sont alignés.

Exercice 8
Soit ABCD un tétraèdre, P, Q, R et S les points définis par :

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD]. Démontrer que les droites (PS) , (QR) et (IJ) sont concourantes.

Exercice 9
Soit ABC un triangle isocèle tel que AB = AC = 7 et BC = 4. On désigne par I le milieu de [BC] et G le centre de gravité de ABC.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\right\| = 12$

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan .tels que $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 38$

3. a) Calculer AG et BG

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 65$

Exercice 10:
ABCD est un quadrilatère, I ,J,K ,L les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; J milieu de $[BC]$; $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et L le milieu de $[AD]$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que (JL) passe par le milieu Ω de $[IK]$

1. Ecrire I comme barycentre de A et B, K comme barycentre de C et D et évaluer $\overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{\Omega K}$

2. Exprimer $\overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{\Omega K}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega B}$, $\overrightarrow{\Omega C}$ et $\overrightarrow{\Omega D}$, puis en fonction de $\overrightarrow{\Omega J}$ et $\overrightarrow{\Omega L}$

3. Conclure.

Exercice 11 :
1. On considère un triangle ABC et un point M n'appartenant à aucun des trois côtés du triangle ni à aucune des trois droites passant par un sommet et parallèle au côté opposé. Les droites (AM) et (BC) se coupent alors en A' distinct de B et C, (BM) et (CA) en B' distinct de A et C , (CM) et (AB) en C' distinct de A et B.

a) Soit α, β, γ trois réels tels que M soit le barycentre du système (A, α), (B, β) et (C, γ). Démontrer que $\beta + \gamma \neq 0$

b) Soit A_1le barycentre des points (B, β) et (C, γ). Démontrer que les points A_1et A' sont confondus et en déduire que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\gamma}{\beta}$$

c) Exprimer de même les quotients $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ et $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ en fonction de α, β, γ . En déduire le Théorème de Ceva

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

Exercice 12 :
Soit ABCD un quadrilatère, I, J, K, L les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et soit U et V les milieux de $[AC]$ et $[BD]$. Montrer que les segments $[IK]$, $[JL]$ et $[UV]$ ont même milieu

Exercice 13:
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. On considère A' le milieu du segment $[BC]$ et celui de $[AA']$.

1. Soit J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Calculer AJ

2. Calculer l'aire du triangle ABJ ? En déduire la valeur de $\sin\left(\widehat{BAJ}\right)$.

Exercice 14 :
Soit ABCDEFGH un cube de côté 1. On choisit le repère orthonormal $(A ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$. On appelle I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [BC], [CD], [DH], [HE], [EF] et [FB].

Déterminer les coordonnées des points I, K et M.

Montrer que les six points I, J, K, L, M et N sont coplanaires dans un plan que l'on notera P. On donnera une équation du plan P dans le repère choisi.

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan P.

Montrer que les projetés orthogonaux des points I, J, K, L, M et N sur la droite (AG) sont confondus en un même point. On appellera T ce point.
Montrer que IJKLMN est un hexagone inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon et montrer que tous ses côtés ont même longueur.

Exercice 15:
On construit un triangle ABC et Δ Une droite quelconque passant par A. Les sommets B et C se projettent orthogonalement en B’ et C’ sur Δ. La perpendiculaire à (AC) en B’ et la perpendiculaire à (AB) en C’ se coupent en I. Montrer que (AI) est une hauteur du triangle.
Retrouver par un choix convenable de Δ que les hauteurs d’un triangle sont concourantes.

Exercice 16:
ABCD un carré I,J ,K,L les milieux des côtés $[AB],[BC],[CD]$ et $[DA]$. (AJ) coupe (DI) en P et (BK) en Q. (CL) coupe (DI) en S et (BK) en R.
On se propose de montrer que PQRS est un carré.
1° Montrer que $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI}=0$, après avoir exprimé $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{DI}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$.
2° Établir que : $\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{AD}$.
3° En déduire l’expression de PS en fonction du côté a du carré ABCD
4° Conclure et répondre à la question : « Exprimer l’aire du carré PQRS en fonction de l’aire du carré ABCD »

Exercice 17:
Soit ABCD un tétraèdre quelconque, on désigne par G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravités respectifs des triangles ABC, ABD, ACD et BCD. On note I,J,K,L,M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[CD]$. Soit G l’isobarycentre des sommets du tétraèdre
Déterminer les coordonnées de tous les points définis, dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})$. En déduire que

$$\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG_1}$$

Déterminer trois autres égalités vectorielles analogues.
Démontrer que le point G est le milieu des segments $[IN]$, $[JM]$ et $[KL]$.

Exercice 18: Représenter les ensembles des points M du plan dans les cas suivants :
1° $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=0$
2° $\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$
3° $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

Exercice 19 :
Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB=AC=3$ et $BC=2$.
On appelle H le projeté orthogonal de B sur (AC) . Calculer la valeur de $\cos\left(B\hat{A}C\right)$. En déduire les distances AH et BH

Exercice 20:
Soit un carré ABCD. On construit un rectangle APQR tel que : P et R sont sur les côtés [AB] et [AD] du carré AP = DR.
Le problème a pour objet de montrer que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.
1. Justifier que : $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{CQ}\cdot\left(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}\right)$
2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaire.

Exercice 21:
Soit ABC un triangle, la bissectrice intérieure issue de A coupe le côté $[BC]$ au point I. Les segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ ont pour longueur respectives a, b et c.
Démontrer que $\frac{IB}{IC}=\frac{c}{b}$. En déduire que le point I est le barycentre des points B et C affectés des coefficients que l’on déterminera
Prouver que le centre O du cercle inscrit au triangle ABC est le barycentre des points (A ; a), (B ; b) et (C ; c)

Exercice 22:
Soit ABCDE un pentagone tel que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}$. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AE]$. Les diagonales (BD) et (CE) se coupent en L. Soit K le barycentre de (A ; 2), (B ; 1), (C ; 1), (D ; 1) et (E ; 1)
a. Démontrer que A,K et L sont alignés
b. Démontrer que $\overrightarrow{LK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{LA}$
c. En Déduire que K est le centre de gravité des triangles ABD et ACE. Que vient-on de démontrer à propos des droites (AL), (CJ) et (DI) ?

Exercice 23:
Soit A, B, C et D les points de coordonnées respectives (1 ;1), (6 ;1), (3 ;4) et (6 ;5)
Déterminer les coordonnées du barycentre G du système {(A ; 1), (B ; 2), (C ; 1), (D ;1)}
Déterminer les coordonnées du centre de gravité G_1 du triangle ABC et celles du milieu J de $[BD]$. Démontrer que G_1, G et J sont alignés
Déterminer les coordonnées du centre de gravité G_2 du triangle BCD et celles du milieu I de $[AB]$. Démontrer que G_2, G et I sont alignés
Placer les points A, B, C, D, I , J, G_1 et G_2. En utilisant les alignements précédents construire le point G
Prouver que (G_1G_2) et (IJ) sont parallèles
Soit K le milieu du segment $[IJ]$. Démontrer que C, G et K sont alignés.

Exercice 24 : ABCD un tétraèdre
1°- Démontrer que (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si : $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ (1)
2° Démontrer que : si dans un tétraèdre les arêtes (AB) et (CD) d’une part , les arêtes (BC) et (AD) d’autre part sont orthogonales
3° Dans cette question on suppose réaliser les conditions de la question 2°. Soit A’ le projeté orthogonal de A sur la face BCD, démontrer que A’ est l’orthocentre du triangle BCD
Soit B’, C’, D’ les projetés orthogonaux respectifs des points B, C, D sur les faces opposées du tétraèdre.
Démontrer que les droites (AA’), (BB’), (CC’) et (DD’) sont concourantes.