Chapitre 1 : Nombres entiers et rationnels

I. Division euclidienne

1. Rappel

a	b
	q
r	

a : dividende
b : diviseur
q : quotient
r : reste

On a toujours : a = bq + r
avec $0 \le r < b$

Exemple :

233	5
33	46
3	

233 = 5 x 46 + 3
$0 \le 3 < 5$

2. Diviseurs d'un entier

Définition 1 :
a et b sont deux entiers.
On dit que b est un diviseur de a (ou que a est divisible par b) si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Exemple :

125	5
25	25
0	

5 est un diviseur de 125 (et de 25 aussi)

Exemple : Chercher tous les diviseurs de 100
100 = 1 x 100
= 2 x 50 (100 divisible par 2 car son chiffre des unités est pair)
= 4 x 25 (100 divisible par 4 car le nombre constitué par ses deux derniers chiffres est divisible par 4)
= 5 x 20 (100 divisible par 5 car son chiffre des unités est 0 ou 5)
= 10 x 10 (100 divisible par 10 car son dernier chiffre est un 0)

Les diviseurs de 100 sont : 1,2, 4, 5, 10, 25, 50, 100.

Chercher les diviseurs de 1035.
1035 = 1 x 1035
= 3 x 345 (1035 divisible par 3 car la somme de ses chiffres est divisible par 3)
= 5 x 207
= 9 x 115 (1035 divisible par 3 car la somme de ses chiffres est divisible par 9)
= 15 x 69
= 45 x 23

Les diviseurs de 1035 sont : 1, 3, 5, 9, 15, 23, 45, 69, 115, 207, 345,1035.

Définition 2 :
Un entier est premier lorsqu'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui même.
Exemple :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sont les nombres premiers plus petit que 20.

3. Nombres premiers entre eux

Définition :
Deux nombres entiers sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Attention : il ne faut pas confondre nombres entiers et nombres premiers entre eux.
Exemple 1 :
15 et 14 sont-ils premiers ?
15 n'est pas premier car 15 = 3 x 5
14 n'est pas premier car 14 = 2 x 7

Méthode pour déterminer si deux nombres sont premiers entre eux.
Liste des diviseurs de 14 : 1, 2, 7,14
Liste des diviseurs de 15 : 1, 3, 5, 15

1 est le seul diviseur commun donc 14 et 15 sont premiers entre eux.

Exemple 2 : 6 et 8 sont-ils premiers ? Sont-ils premiers entre eux ?
6 n'est pas un nombre premier car 6 = 2x3
8 n'est pas un nombre premier car 8 = 2x4

liste des diviseurs de 6 : 1, 2, 3, 6
liste des diviseurs de 8 : 1, 2, 4, 8

1 n'est pas le seul diviseur commun donc 6 et 8 ne sont pas premiers entre eux.

Exemple 3 :   17 et 97 sont-ils premiers ? Sont-ils premiers entre eux ?
17 est un nombre premier car 17 = 1x17
97 est un nombre premier car 97 = 1x97

liste des diviseurs de 17 : 1, 17
liste des diviseurs de 97 : 1, 17

17 et 97 sont premiers entre eux.

II. PGCD et algorithme d'Eucilde

1. Définition du PGCD

On appelle PGCD de 2 nombres entiers, le Plus Grand Commun Diviseur de ces 2 nombres.

Exemple : Chercher le PGCD de 8 et de 12
Diviseurs de 8 : 1, 2, 4, 8
Diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12

PGCD(8,12)= 4

Remarque : Lorsque le PGCD de 2 nombres est 1, o n peut dire que ces 2 nombres sont premiers entre eux.

2. Recherche du PGCD de 2 grands nombres par l'algorithme des soustractions successives

Définition :
Un algorithme est une succession d'étapes élémentaires qui conduit toujours au résultat.

Propriété 1 :
Si a et b sont deux nombres entiers positifs avec a > b, alors PGCD(a ; b) = PGCD (a-b ; b)

Exemple : Calculer le PGCD de 252 et 84.
252 – 84 = 168 donc PGCD (252 ; 84) = PGCD (168 ; 84)
168 – 84 = 84 donc PGCD (168 ; 84) = PGCD(84 ;84) = 84

3. Recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide

Propriété :
Si a et b sont deux nombres entiers positifs avec a > b, alors PGCD(a ; b) = PGCD (b ; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.
Le PGCD sera le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide.

Exemple : Calculer le PGCD de 117 et 91.
117 = 91x1 + 26 donc PGCD (117 ; 91) = PGCD (91 ; 26)
91 = 26x3 + **13** donc PGCD (91 ; 26) = PGCD(26 ;13)
26 = 13 x 2 + 0 donc 1 est un diviseur de 26. D'où PGCD(26 ; 13) = 13

donc PGCD (117 ; 91) = 13

le plus grand nombre

a	b	r
117	91	26
91	26	13
26	13	0

PGCD

Remarque : - la touche : R de la calculatrice donne le quotient et le reste de la division euclidienne.