Didactique des mathématiques

Les **théorèmes-élèves** ou « théorèmes en acte » sont des représentations erronées des élèves.

Le calcul à l'école

La résolution de problèmes au CP :

- Comprendre l'énoncé

- Souligner, repérer les mots-clés, les informations utiles.

- Favoriser les représentations.

Les règles de la numération :

- **La commutativité de l'addition et de la multiplication** (Dans une addition ou une multiplication, on peut changer l'ordre des termes).

- **L'associativité de l'addition et de la multiplication** (Dans une addition et une multiplication, on peut regrouper les termes comme on veut). Ex : 7+3 = 2+8 car : (2+5) + 3 = 2+ (5+3).

24x5 = 12x10 car (12x2) x 5 = 10x5.

- **La distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction** (quand on multiplie une somme de deux nombres, cela revient à multiplier chacun de ses termes).

8x13 = (8x10) + (8x3) = 104.

Les procédures de calculs réfléchis :

0.3+0.3+0.3+0.3+0.3+0.3+0.3+0.3+0.3+0.3=10x0.3=3

Calculer le quotient et le reste euclidiens : 215/7

215=210+5=7x30+5

123456x1428 : Dépasse la capacité des calculatrices donc nécessite une décomposition en :

123 000x1428 + 456x1428

La présence de nombres amis comme 16 et 4 permet d'utiliser les propriétés de commutativité et d'associativité : 16+31+4=20+31=51.

La présence de nombres entiers de centaines ou de dizaines qu'on associe :

100+20+200+40+6+30= 300+90+6= 396

Mais l'élève peut penser qu'une retenue est toujours égale à 1.

Les symboles + et – sont introduits au CP. La bande numérique, introduite en maternelle, donne un ordre spatial et la comptine numérique donne un ordre temporel. On parle de « demi-droite graduée » quand elle ne comporte que des nombres positifs. Elle permet d'encadrer un nombre, de comparer deux nombrer ou de calculer des sommes et des écarts (différences).

Les procédures (cycle 1) :

- Par reconnaissance visuelle (subitizing).

- à l'aide de la comptine ou de la bande numérique.

- à l'aide des décompositions additives déjà mémorisées.

Procédure pour fabriquer une collection de cardinal connu : Retenir le nombre demandé, effectuer les correspondances terme à terme entre un mot-nombre et un objet extrait de la collection initiale, s'arrêter quand il entend le nombre visé.

Procédure pour comparer : par reconnaissance globale, par correspondance terme à terme, à l'aide de la comptine ou de la bande numérique ou à l'aide des décompositions additives.

Procédure pour calculer : Par vision globale, la comptine ou décomposition additive.

Les difficultés de la comptine numérique : Sauts de mots-nombres, numération orale difficile, récitation qui reprend en boucle, mauvaise mise en mémoire du nombre qu'il faut trouver.

Difficultés dans le dénombrement : technique non-appropriée, mauvaise connaissance de la comptine, difficulté spatiale à trouver un ordre de dénombrement, non compréhension du fait que le dernier nombre énoncé correspond au cardinal de la collection.

Difficulté dans les comparaisons : Repérer les nombres sur la bande numérique, interpréter ces nombres comme les cardinaux de deux collections.

Les procédures (cycle 2) :

Au CP, on apprend à calculer avec de petites quantités (<10).

- le **surcomptage** (on commence à 7 et on ajoute oralement ou mentalement les 4 chiffres suivants).

- Le **recomptage** : la construction de deux collections (comme au monopoly, on compte deux fois ce qui est affiché sur les deux dés).

- Le calcul par **technique opératoire** (ligne ou colonne).

- Le calcul **réfléchit** (travail mental et écriture avec une stratégie personnelle).

- Le complément à 10.

- **L'écart constant** (permet de trouver la même différence avec un calcul plus simple).

Exemple : 53-27 (ajout de 3) : 56-30 = 26. Pour matérialiser le théorème des écarts constants à des élèves, on peut utiliser une demi-droite numérique.

Pour les décimaux : 18.85 + 21.35 = 18 + 21 + 0.85 + 0.35 = 40.2.

Pour les fractions, on se sert d'une droite graduée pour les comparer. Au CM1, elles ont le même dénominateur.

Dénombrer nécessite d'avoir des prérequis :

- Connaître la suite orale.

- A chaque élément correspond un nombre et un seul.

- La dernière désignation se réfère à l'ensemble, c'est le nombre d'éléments de la collection.

- Tous les éléments, peu importe leur taille, leur disposition, … peuvent être comptés ensemble.

- L'ordre dans lequel les éléments sont pointés n'ont aucune importance.

Les compétences nécessaires à la construction du nombre :

- être capable de désigner et de coder (écriture chiffrée).

- être capable de trier et de classer.

- être capable de sérier et ranger.

- être capable d'énumérer (s'organiser spatialement).

Trier, c'est choisir des objets selon une propriété donnée.

Classer, c'est regrouper tous les objets qui ont une caractéristique commune.

Ranger, c'est organiser des objets selon une relation d'ordre.

Le tableau de numération n'est mobilisé que pour mémoriser l'ordre des unités de numération car il n'est pas porteur de sens. Le « un » de mille ou de cent n'est pas oralisé, on devrait dire « un cent » ; « deux cents » au lieu de dire « cent ».

Activité : Ecrire en chiffres 5 milliers, 12 centaines, 26 dizaines et 31 unités.

6 000 + 400 + 90 + 1 = 5 000 + 1 200 + 260 + 31 = 6 491.

Les fractions et les décimaux :

Il faut que les élèves renoncent aux règles dont le domaine de validité se limite aux entiers. Il y a les fractions partage (3/5) où on partage en 5 et on prend 3 parts. Les élèves doivent penser aux conversions : 0.8 = 80 centièmes et 0.14 = 14 centièmes donc 0.8>0.14. On écrit chaque nombre sous le même format.

124.58
041.56

Théorème-élèves 1 : « Un nombre décimal est un nombre à virgule ».

Théorème-élèves 2 : « Un nombre décimal est un entier avec une virgule ».

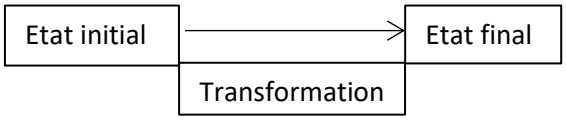
Confusion entre les dizaines et les dixièmes, et entre les centaines et les centièmes. Les élèves nomment les chiffres symétriquement par rapport à la virgule. Ils confondent aussi la barre de fraction avec la virgule.

On peut introduire les fractions à l'aide du tableau de numération.

Partie entière												Partie décimale		
Classe des milliards			Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités simples			$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	dixièmes	centièmes	millièmes

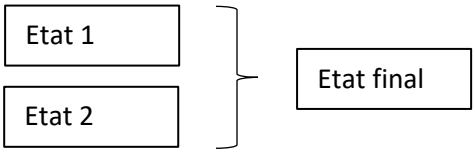
<u>Les 4 structures additives de l'école primaire :</u>

a. Les problèmes de transformation d'état



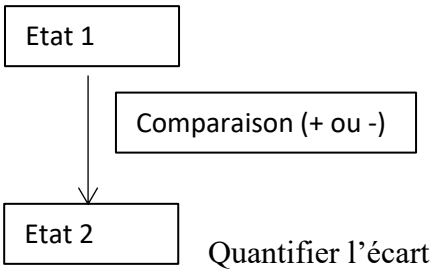
Recherche de l'état final, de la transformation ou de l'état initial.

b. Les problèmes de composition d'état



Deux états sont combinés pour en trouver un troisième. Recherche d'une partie ou du tout final.

c. Les problèmes de comparaison d'état



Quantifier l'écart entre deux états : le référent et le référé.

d. Les problèmes de composition de transformation

On cherche la transformation composée ou l'une des deux transformations.

Ex : J'ai perdu 9 billes puis j'en ai gagné 15. Quel est mon nombre de billes ? Ici, recherche de la transformation finale.

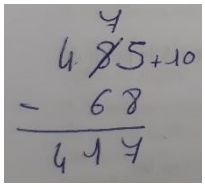
<u>Procédures de l'addition :</u>

P1 - L'arbre de calcul : fait apparaître les calculs intermédiaires d'une addition en ligne.

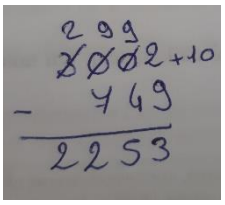
P2 – L'addition posée en colonne (prérequis : connaissance de la numération décimale et des tables de l'addition avec recours au matériel de numération pour illustrer la technique). Le calcul posé n'est intéressant que quand le calcul en ligne est trop complexe pour être résolu mentalement. Il faut faire travailler en même temps les additions avec et sans retenue et faire anticiper aux élèves un ordre de grandeur avant.

<u>Procédures de la soustraction :</u>

P1 - Par « cassage », par « emprunt » où on déconstruit une dizaine pour l'échanger contre 10 unités.

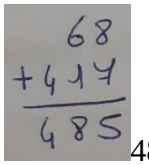


<u>Prérequis</u> : connaissance de la numération décimale. Cette procédure est compliquée quand le plus grand nombre comporte des 0. Dans l'exemple, il faut alors transformer 3 unités de mille en 2 unités de mille et 10 centaines et, enfin, les 10 dizaines en 9 dizaines et 10 unités.



P2 – Par « recherche du complément »

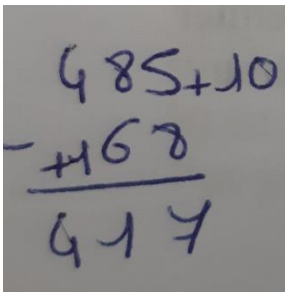
Ici, on se sert de l'équivalence entre la soustraction et l'addition à trou.

485-68 ? → 68 + … = 485. 

485 – 68 = 417.

<u>Prérequis</u> : Connaître la technique de l'addition, comprendre l'équivalence de résultat entre un calcul de différence et un calcul de complément.

P3 – Technique par « conservation des écarts » (ajout simultané d'un même nombre aux deux termes de la différence).



<u>Prérequis</u> : Connaître la conservation des écarts.

<u>Erreurs</u> : Certains soustraient le plus petit chiffre au plus grand sans se préoccuper du positionnement du nombre.

<u>La multiplication :</u>

<u>Définition</u> : Le nombre d'éléments d'une collection organisée en groupements équipotents. Le produit est alors la somme de plusieurs nombres « a » égale au nombre « b » dans a x b.

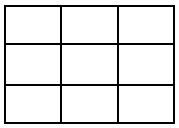
Multiplicande : Le nombre qu'on additionne.

Multiplicateur : Le nombre de fois qu'on l'additionne.

L'élève observe qu'on obtient la même chose en faisant 3x4 que 3+3+3+3 ou 4+4+4.

Autre définition : a x b est le nombre d'éléments d'une collection organisée en quadrillage rectangulaire de a lignes et ayant b cases.

Ex : pour 3x3

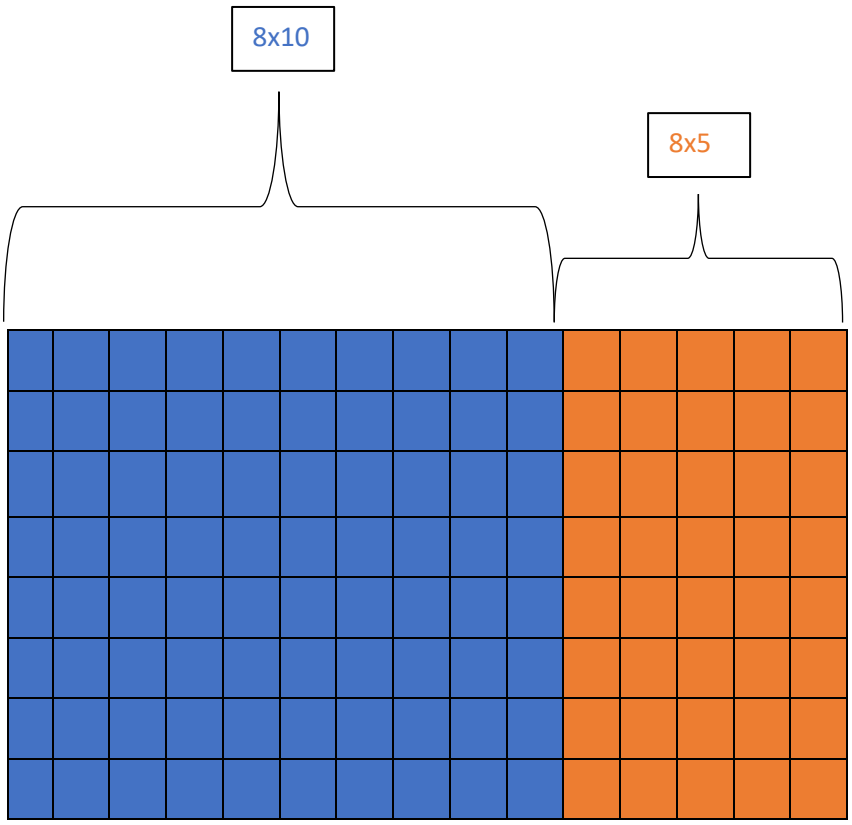


On a ici 3 lignes (a) et 3 colonnes (b).

Cette méthode permet l'explication de la commutativité puisqu'il y a le même nombre de cases dans le quadrillage.

On a aussi la démonstration de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Ex : 8x15 = 8x10 +8x5



Il ne faut cependant pas que les élèves pensent le produit de deux entiers comme étant une disposition géométrique.

La division :

Définition : Pour tous réels a et b, avec b non nul, il existe un unique réel k tel que kxb = a. On le note a/b.

La division euclidienne : Pour a et b, deux entiers naturels non nul, il existe un unique couple (q ; r) tel que a = bxq + r, avec 0 < r < b.

Il existe deux types de divisions :

- Les partages (recherche de la valeur d'une part) : **division-partition.**

- Les groupements (recherche du nombre de parts) : **division-quotition.**

Les problèmes :

A. Problèmes de proportion simple avec présence de l'unité

« Un livre coûte 3 euros, combien doit-on payer si on achète 7 exemplaires de ce livre ? »

« Un livre coûte 3 euros. On achète plusieurs exemplaires de ce même livre pour un total de 21 euros. Combien a-t-on acheté de livres ? »

Il y a des valeurs dans les problèmes de grandeurs sembla les ou différentes, ce qui change la difficulté de résolution.

Ex : « J’ai acheté 7 exemplaires d’un même livre pour un total de 21 euros, combien coûté un exemplaire de ce livre ? ».

B. <u>Problèmes de proportion simple sans présence de l’unité</u>

- Problèmes de recherche de « quatrième proportionnelle » (plusieurs grandeurs).

- Problèmes de comparaison multiplicative « fois plus » ou « fois moins » (une seule grandeur).

Recherche de la comparaison, de l’état comparé ou de l’état de référence.

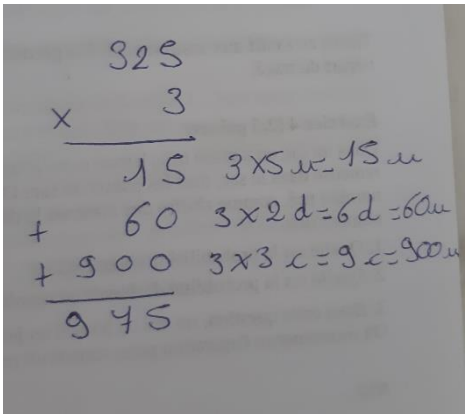
C. <u>Problèmes relevant de la proportionnalité multiple</u>

Ce sont des problèmes de produits de grandeurs. Ex : « Quelle est l’aire d’un rectangle de côté 5cm et 12cm ? ». Il y a une proportion double car l’aire est proportionnelle soit à la longueur (si la largeur est fixée), soit à la largeur (si la longueur est fixée).

<u>Procédures de la multiplication :</u>

- En ligne : s’appuyer sur la numération : 4x60 c’est 4x6 dizaines, donc 24 dizaines, et 24 dizaines c’est 240.

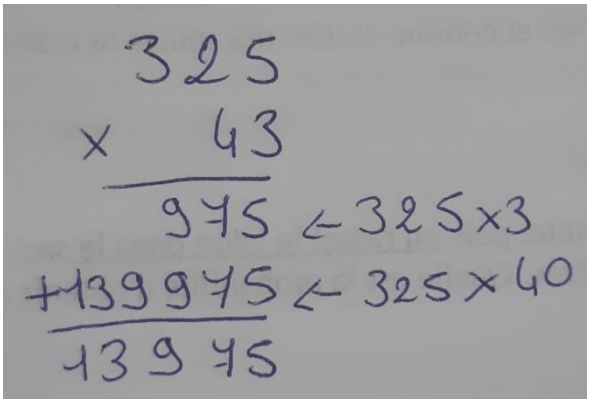
- Posé : On part de la stratégie du calcul en ligne pour introduire la disposition en colonne. Cette méthode permet aux élèves de ne pas gérer les retenues. Puis on apprendra la méthode classique qui mêle multiplication et addition.



Décomposition : 325x43 = 325x3 + 325x40 (distributivité de la multiplication).

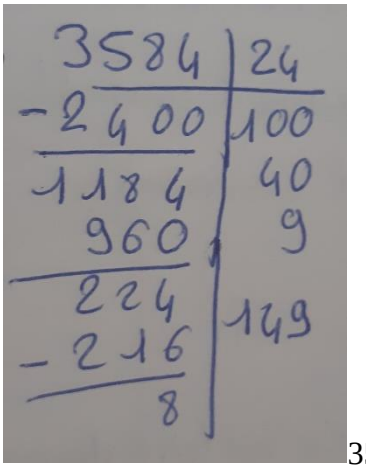
325x40 = (325x4) x10 (associativité de la multiplication).

<u>Prérequis</u> : Connaître le critère de multiplication par une puissance de 10.



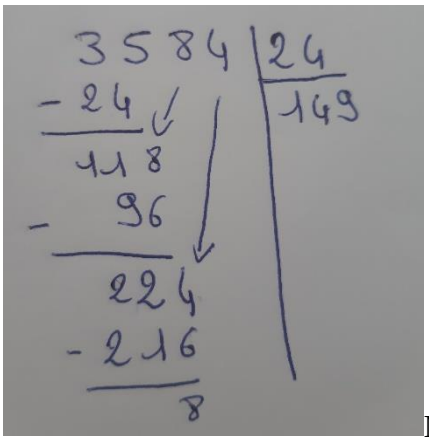
Procédures de la division :

P1 – On cherche le plus grand nombre n de groupements de 24 qui peut être enlevé à 3584.



3584 = 24x149 + 8 (On oralise la méthode).

P2 – La démarche mentale (partages successifs en 24 parts égales des milliers, des centaines, puis des dizaines et des unités.



Même technique pour la division décimale.

P3 – Procédure experte avec tous les calculs intermédiaires réalisés mentalement. Ce n'est pas un objectif de l'école primaire.

Les variables : la table du diviseur est-elle connue des élèves ?

Difficultés : Cette opération nécessite trois sortes d'opérations. Parfois les élèves s'arrêtent sans que le reste soit inférieur au diviseur ou ils oublient les 0 dans le quotient.

La multiplication de décimaux :

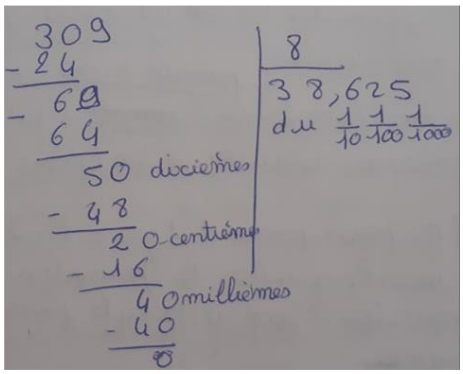
On commence par le produit d'un nombre décimal non entier par un entier au CM2 en expliquant que c'est une addition itérée. On s'appuie sur l'associativité de la multiplication et les propriétés de la numération.

P1 – On multiplie par 100 puis on divise par 100

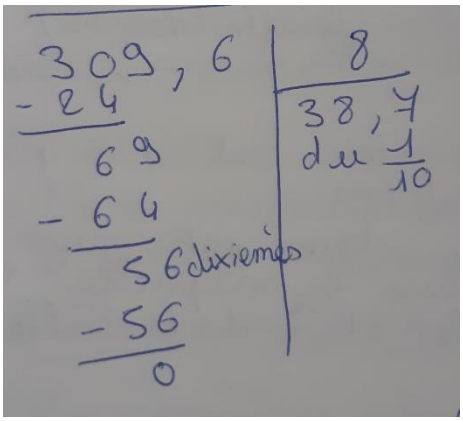
Ex : 100 x (6.25x445) = (100x6.25) x 45 = 625x45 = 28125/100 = 281.25 (On remplace donc le décimal par un entier).

La division de décimaux :

On commence par la division d'un entier par un entier puis on échange le reste (qui est en unité) contre des dixièmes.



La division d'un décimal par un entier :



On divise d'abord 309 par 8. Il reste 5 unités qui sont équivalentes à 50 dixièmes auxquels on ajoute les 6 dixièmes du nombre initial. On partage alors 56 dixièmes en 8.

<u>La géométrie à l'école</u>

A l'école, sont développées des connaissances spatiales qui mettent en interaction le sujet et l'espace sensible et qui reposent sur un besoin vital dans la vie quotidienne. Il y a aussi des connaissances géométriques qui mettent en relation le sujet avec un espace conceptualisé (mathématique). Elles permettent de résoudre des problèmes, de reconnaître et de reproduire ou construire des objets de géométrie. Elles portent sur des relations géométriques (alignement, parallélisme, …) et sur des objets géométriques (surfaces, polyèdres, …).

<u>Il existe trois temps dans l'appréhension des objets :</u>

1 – La géométrie perceptive : c'est un carré car je le reconnais comme tel.

2 – La géométrie instrumentée : C'est un carré, je le vérifie grâce à des instruments adaptés.

3 – La géométrie mathématisée (passage au collège) : C'est un carré car, grâce aux informations données ou déduites, j'en énonce les propriétés.

Le PE, pour passer d'une géométrie à une autre, peut proposer des figures pour lesquelles la perception ne permet pas d'identifier leurs propriétés : « Un rectangle presque carré » : on passe de la perceptive à l'instrumentée.

Il existe trois types d'espaces :

1 – Le micro-espace : L'observateur est extérieur (feuille blanche).

2 – Le méso-espace : L'observateur fait partie de l'espace, c'est son espace de déplacement.

3 – Le macro-espace : L'observateur a accès à cet espace que par des vues partielles ou des représentations.

En maternelle, pour favoriser les aller-retours entre micro et méso-espace on pourra faire construire la maquette d'un parcours (micro) réalisé par les élèves dans la salle de motricité (méso). Dans une séquence sur l'alignement, aligner des points sur une feuille puis dans la cour.

La manipulation a un rôle de déclencheur de réflexion et un rôle de validation d'une réflexion. Si le PE donne du matériel pour un exercice, c'est qu'il vise la construction de concepts géométriques par la médiation du matériel. Sinon, le travail est une tâche d'anticipation où le matériel sert juste à valider.

Le vocabulaire de l'espace orienté est complexe car il dépend du référent choisi.

Les tâches :

- Le classement : Retrouver un critère de classement d'une collection (nombre d'arêtes des polyèdres) ou classer en fonction d'un critère donné ou choisi.

Pour faire travailler la reconnaissance perceptive ou instrumentée des figures :

- Décrire en fournissant des renseignements géométriques qui permettent d'identifier l'objet, de le représenter, … ou de se déplacer dans un espace (écrit à partir du cycle 2).

- Réaliser un programme de construction.

- Reproduire sur pâte à modeler, papier blanc, … avec divers matériels (gabarit, ciseaux, …) Ça peut être une isométrie (reproduire à l'identique) ou un agrandissement/réduction.

- Construire une figure (nécessite que l'objet ne soit pas présent).

- Représenter un objet ou un déplacement.

Il faut faire attention aux figures qui sont en position prototypique (dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille). Il ne faut pas introduire les signes graphiques trop tôt. Les élèves ont du mal à décomposer une figure complexe en sous-figures.

La géométrie plane à l'école :

Les trapèzes et les parallélogrammes ne sont pas au programme de l'école primaire mais on peut les utiliser sans les nommer. Notations nouvelles : [AB] ou [AB) qu'il faut toujours précéder du nom de l'objet qu'elles désignent : le segment [AB].

Les concepts :

On passe des angles droits d'une figures à des droits perpendiculaires. Les angles prennent le statut de grandeur au cycle 3 (aigu, obtus). Confusion entre les droites perpendiculaires et les droites verticales et confusion entre droite parallèle et droite horizontale où les élèves ne reconnaissent ces concepts que dans une seule configuration. Difficulté à tracer une perpendiculaire avec une équerre. Le parallélisme a différentes images mentales comme les lignes d'un cahier ou les écarts constants.

Procédures pour savoir si deux droites sont parallèles :

P1 – Prolonger les droites le plus possible pour voir si elles se coupent.

P2 – Construire la parallèle à l'une de droites et voir si elle coïncide avec l'autre.

P3 – Tracer plusieurs perpendiculaires puis mesurer les distances entre les points d'intersection de cette perpendiculaire avec chacune des deux droites pour voir si les distances sont les mêmes.

P4 – Trouver un parallélogramme pour lequel les droits sont des supports des côtés opposés.

Les élèves doivent comprendre qu'une droite est infinie et qu'elle ne peut donc pas être représentée en entier sur une feuille.

La symétrie axiale à l'école

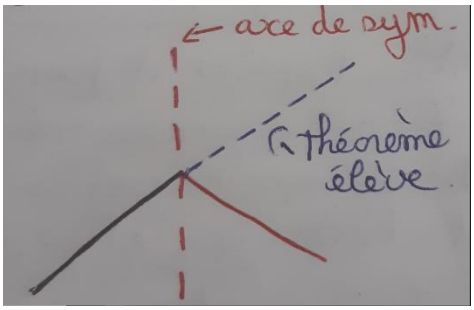
Au cycle 2 : Reconnaître si une figure a un axe de symétrie et compléter une figure pour qu'elle soit symétrique par rapport à un axe donné.

Au cycle 3 : Compléter ou construire le symétrique d'une figure par rapport à l'axe donné.

Les erreurs :

- Faire une translation.

- Tracer un segment symétrique en « prolongeant » la droite du segment :



Pour la symétrie, on peut utiliser un calque ou un géo-miroir, représenter mentalement le résultat ou plier la feuille afin de repérer l'axe de symétrie.

Les variables : Le support, l'orientation de l'axe de symétrie par rapport à la feuille, place de la figure par rapport à l'axe de symétrie, position de l'axe par rapport à la feuille (à égale distance des bords ou non), la nature de la figure à compléter et les outils disponibles.

La géométrie des solides à l'école

Au cycle 1 : Utilisation des solides dans des jeux de construction, d'encastrement, …

Au cycle 2 : En CP, description du cube et du pavé droit avec les termes « faces » et « sommets ». En CE1, ils apprennent à nommer les solides et à les décrire en utilisant un vocabulaire adapté (faces, sommets, arêtes). En CE2, approche de la notion de patron du cube.

Au cycle 3 : Les élèves utilisent des représentations planes des solides (patrons, perspectives, …).

Procédures pour construire un patron :

P1 – Faire basculer le solide d'une face à l'autre et tracer le contour de chaque face.

P2 – Imaginer mentalement le développement du solide à partir d'une des faces.

P3 – Faire la liste du nombre et des types de faces et analyser leur agencement les unes par rapport aux autres.

Les difficultés sont liées à la spatialisation, à la création d'images mentales, au passage à un point de vue différent, à la reconnaissance des figures qui composent le solide.

Pour passer de l'espace au plan, on peut réaliser, en trempant des solides dans de la peinture, une empreinte du solide qui montre que chaque solide est composé de polygones. On peut aussi réaliser la maquette d'un solide pour analyser la relation entre les faces. Il est aussi important, autour à l'oral qu'à l'écrit, que les élèves décrivent les solides (programmes de construction par exemple).

Pour les patrons, on commence par des solides démontables (boîtes d'emballage). Les premiers solides seront un pavé droit ou un cube.

Définition du patron à l'école : Figure plane permettant de construire le solide. Les élèves comprennent progressivement qu'il existe plusieurs patrons pour un seul et même solide.

Procédures pour agrandir ou réduire une figure :

P1 – Utilisation de la proportionnalité et propriété de conservation des angles.

P2 – Propriété de conservation de l'alignement, des angles, du parallélisme, de l'égalité des longueurs et des milieux.

Les difficultés viennent de la tentation du modèle additif et de repérer les relations entre les différents éléments.

Grandeurs et mesure à l'école

L'introduction de la mesure doit être motivée quand on ne peut pas mettre en œuvre des procédures dans le cadre de la grandeur. Il faut réaliser au moins une fois une mesure matérielle afin que les élèves comprennent qu'il est nécessaire de choisir une unité adaptée et qu'on peut reporter plusieurs fois cette mesure. Au CP, les élèves commencent à se constituer un répertoire de mesures de certaines grandeurs.

- Propriétés fondamentales de conversion (proportionnalité).

- Exprimer les grandeurs avec des expressions complexes (1m 15cm).

- Les conversions sont travaillées en lien avec la numération et le calcul mental (par 10, 100, 1000, …). On introduit la technique suivante : 3m = 3x1m = 3x100cm = 300cm.

Le tableau de conversion n'est introduit qu'au CM1 car au cycle 2, les conversions s'appuient sur les relations connues, avec des unités intermédiaires. Le tableau est peu porteur de sens et nécessite l'appropriation d'une technique pour le remplir. Il est à construire avec les élèves comme une synthèse des relations entre les unités rencontrées depuis le CE1.

Il faut faire figurer les unités dans les calculs : 25cl + 330ml = 250ml + 330ml = 580ml.

Au cycle 3, elles sont mises en relation avec la géométrie, avec la consolidation de la notion de périmètre et de la distance entre deux points. Le compas permet de reporter des longueurs à partir du CE2 et de comprendre la définition du cercle au cycle 3. La formule de la longueur du cercle se fait en 6ème et seules les contenances sont vues à l'école primaire.

Les tâches :

1 – Comparer, classer des objets selon une de leurs grandeurs. (Procédures : de façon perceptive, expérimentale, ou recours à un objet intermédiaire).

2 – Construire des objets de grandeur égale, double, … d'un objet donné. (Procédure : Reporter des gabarits de longueur, d'aire, …).

3 – Mesurer ou estimer une grandeur, l'unité étant donnée ou non.

Procédures pour mesurer une grandeur :

P1 – Reporter l'étalon (représente l'unité) et dénombrer les reports.

P2 – Dénombrer les représentations de l'unité après leur construction éventuelle.

P3 – Lire directement le nombre-mesure sur un instrument de mesure.

P4 – Calculer la mesure à partir d'autres mesures avec, éventuellement, une formule.

4 – Effectuer des conversions.

Prérequis : Travail sur les oppositions (lourd/léger), la comparaison (plus grand que, …), la connaissance des nombres et des opérations et le rapport entre les grandeurs. Acquisition du vocabulaire de la comparaison et du vocabulaire spécifique à chaque grandeur.

Les difficultés :

- Gérer plusieurs tâches dans le report de l'étalon.

- Décomposer l'objet en sous-objet afin de calculer plus facilement.

- Erreur dans le choix de l'unité.

- Estimer un ordre de grandeur.

Les erreurs de conversion viennent du fait que les élèves ne connaissent que la méthode du tableau de conversion et qu'ils se trompent en l'utilisant pour des durées et des aires. Les tableaux de conversion ne sont pas cités dans le BO18. Ils comparent sans tenir compte de l'unité.

Théorème-élèves 1 : « La longueur de 2 stylos est plus petite que celle de 4 trombones car 2<4 » (Ici, non compréhension des unités).

Théorème-élèves 2 : « 2m>330cm car 1m>1cm ».

Théorème-élèves 3 : « C'est le plus lourd car c'est le plus gros ».

Théorème-élèves 4 : « Le périmètre est plus petit car l'aire est plus petite ».

Les formules ne doivent pas être introduites précocement mais avoir du sens pour les élèves.

Les variables : Le nombre de grandeurs associables à l'objet et la prédominance visuelle d'une grandeur sur les autres. Par exemple, la contenance pour un verre est la première

mesure à laquelle on pense mais on peut aussi mesurer sa hauteur. Difficulté à prendre en compte l'ordre de grandeur de l'objet à mesurer par rapport à l'unité.

La proportionnalité à l'école

1 – La proportionnalité simple :

- Les problèmes de quatrième proportionnelle.

- Les problèmes de comparaison de proportion.

Les tâches :

- Dire si c'est une situation de proportionnalité.

- Déterminer une quatrième proportionnelle.

- Calculer un coefficient de proportionnalité.

- Déterminer une proportion sous forme de pourcentage (si 15 élèves sur 20 élèves mangent à la cantine, 75% des élèves y mangent).

- Déterminer l'effectif d'une partie, connaissant le pourcentage et l'effectif total (50% des 126 élèves).

La proportionnalité est un objet d'enseignement à partir du CM1. Parfois, les élèves n'ont pas les connaissances nécessaires pour reconnaître une situation de proportionnalité, comme le prix de la viande par rapport au poids.

Les prérequis :

- Connaissance des quatre opérations sur entiers puis sur décimaux.

- Connaître les expressions « deux fois plus », « moitié moins », … 'enseigné au CE).

- Compétences en calcul mental.

- Connaître les propriétés des opérations (implicite).

Les tableaux de proportionnalité sont introduits dans des situations qui comportent beaucoup de données mais peuvent amener à une perte de sens liée à l'automatisation des procédures. Un élève qui sait remplir un tableau de proportionnalité n'a pas forcément compris les relations proportionnelles. Dans la recherche d'une quatrième proportionnelle, il n'est pas nécessaire, ou alors il doit avoir au moins 6 cases pour que les lignes correspondent à une grandeur. Les élèves doivent savoir ce qu'ils calculent.

Procédures pour trouver une quatrième proportionnelle :

Problème : Calculer le prix de 20 roses sachant que 4 roses coûtent 12 euros ».

P1 – Utiliser la propriété de la linéarité

« 20 roses c'est 5x4 roses, donc 20 roses coûtent 5 fois plus cher, soit 12x5 = 60 euros ».

P2 – Utiliser le passage à l'unité

« 4 roses coûtent 12 euros, donc 1 rose coûte 4 fois moins cher, soit 3 euros. Donc 20 roses coûtent 20x3 = 60 euros ». (Au final, on applique deux fois la linéarité multiplicative).

P3 – Utiliser le coefficient de proportionnalité

« 4 roses coûtent 12 euros, donc on obtient le prix en euros en multipliant le nombre de rose par 3, donc 20 roses coûtent 3x20euros = 60 euros ».

P4 – Utiliser le produit en croix (pas pour les élèves)

Si un élève utilise le produit en croix, on l'accepte si c'est bien réalisé, mais on ne met pas cette procédure en avant lors de la mise en commun car ce n'est pas porteur de sens.

Trouver si une situation est proportionnelle : Quand on met en correspondance deux grandeurs, si lorsqu'on multiplie une valeur de la première grandeur par un nombre, la seconde est multipliée par le même nombre, alors les grandeurs sont proportionnelles.

Situation de non-proportionnalité : S'il existe une valeur de la première grandeur pour laquelle la multiplication par un nombre ne fait pas correspondre la deuxième grandeur multiplier par ce nombre, alors la situation n'est pas proportionnelle.

<u>Procédure pour déterminer l'effectif d'une partie :</u>

« Sur 350 élèves, 40% mangent à la cantine. Combien sont-ils ? »

On représente la tâche dans un tableau qui ressemble à celui de la proportionnalité puisqu'on calcule la quatrième proportionnelle. « Sur 100 élèves, 40 mangent à la cantine (40%). Donc sur 300 élèves, 120 mangent à la cantine et sur 50 élèves, 20 y mangent. Donc sur 350 élèves, 140 élèves mangent à la cantine » (Linéarité multiplicative puis additive).

ou :

Effectif sous ensemble	Effectif total
T = Le nombre d'élève	100
?	Pourcentage (ici 40)

<u>Procédure pour comparer des proportions :</u>

<u>Problème</u> : « Dans la bouteille A, je mets 4 verres d'eau et 2 morceaux de sucre. Dans la bouteille B, je mets 12 verres d'eau et 10 morceaux de sucre. Quelle est la bouteille la plus sucrée ? »

P1 – Calculer pour chaque situation de proportionnalité, une quatrième proportionnelle, l'une des données étant la même pour chaque situation.

P2 – Comparer les coefficients de proportionnalité (éventuellement sous forme de pourcentage).

<u>Les difficultés :</u>

- Difficulté à reconnaître une situation de proportionnalité.

- Identifier les grandeurs qui sont en relation.

- Modèle additif qui conduit l'élève à ajouter une même valeur aux deux grandeurs.

- La nature du coefficient de proportionnalité entre deux grandeurs de nature différente. Par exemple, la vitesse est une grandeur et elle est le coefficient de proportionnalité entre une durée et une longueur.

Les procédures les plus simples pour les élèves sont celles utilisant les propriétés de la linéarité. Les coefficients de proportionnalité ne sont pas toujours à la portée des élèves, il est introduit en fin de cycle 3. Il faut que les élèves varient leurs procédures.

Les variables : La situation de proportionnalité explicite ou non, les grandeurs de même nature ou non, la nature du coefficient de proportionnalité (entier, non rationnel, …) et sa visibilité dans les tables.

Les tableaux et graphiques à l'école :

Les listes sont la mise en mémoire de données.

Les classements permettent de trouver un objet d'une famille ou un intrus.

Les tableaux à double entrée sont lus lors de jeux puis construits à partir du cycle 3. Ne pas associer tableau et proportionnalité. Le tableau de conversion est un outil du cycle 4. Il faut présenter les grandeurs en ligne mais aussi en colonne. On peut repérer soit les cases, soit les nœuds dans un tableau.

Au cycle 2 ; Exploiter des données numériques : organiser des mesures sous forme de tableaux.

Au cycle 3 : Prélever des données numériques à partir de supports variés.

Les prérequis : Classements et tris au cycle 1, compétences spatiales pour se repérer dans un tableau, travail sur la demi-droite numérique qui prépare la lecture des représentations graphiques. Les diagrammes en bâtons sont liés à la proportionnalité.

L'utilisation des TICE à l'école

TICE : Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement.

Nécessité d'une fiche technique remplie au fur et à mesure par les élèves.

Les logiciels de géométrie dynamique sont des logiciels de dessin de droites, points, … qui intègrent les relations géométriques. Si on déplace un point, tous les objets liés à ce point par des relations s'adaptent à ce déplacement.

Initiation à la programmation dès le CE1. Les TICE permettent une auto-évaluation et de décharger les élèves des tâches fastidieuses et chronophages. L'enseignant limite ou étend les fonctionnalités de ces outils afin d'orienter les procédures des élèves. C'est un outil de remédiation pour les élèves qui sont peu soigneux ou en difficulté avec les instruments de géométrie, on peut donc imprimer leurs productions.

Il faut utiliser un vocabulaire précis en affichant les programmes de construction.