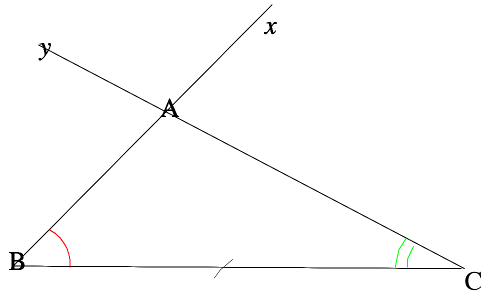
GÉOMÉTRIE

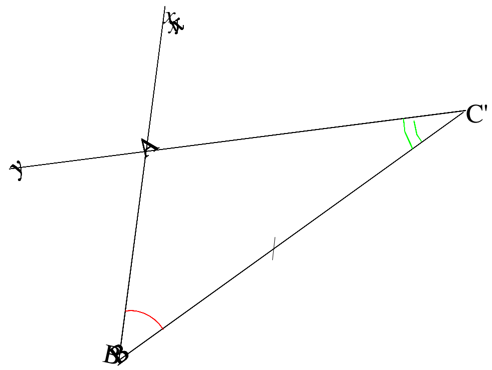
Première leçon

I. LES DEUX PREMIERS CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES QUELCONQUES

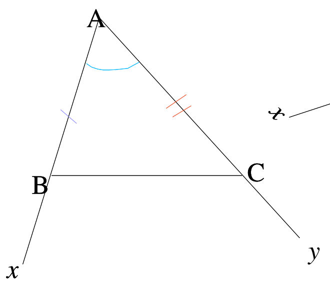
I. Premier cas. Lorsque deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, ils sont égaux.

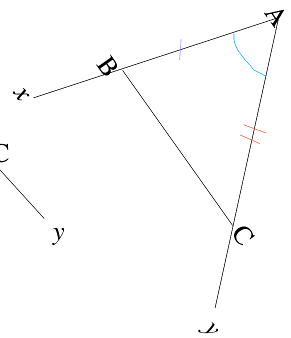
Transportons le calque du triangle A'B'C' et faisons coïncider B'C' avec son égal BC en amenant B' en B, C' en C et A' du même côté de BC que le point A L'angle C'B'x' coïncide alors avec son égal CBx et de même B'C'y' avec son égal BCy. Le point A' se place donc à la fois sur Bx et Cy, soit au point A. Les deux triangles coïncident.





2. Deuxième cas. Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, ils sont égaux.





Faisons coïncider l'angle x'A'y' avec son égal xAy en mettant A'x' sur Ax et A'y' sur Ay. Comme A'B' = AB et A'C' = AC, le point B' se place en B et C' en C. Les deux triangles coïncident.

3. Remarque. Lorsqu'on indique l'égalité de deux triangles, il faut énoncer les sommets correspondants dans le même ordre. Ces sommets sont des homologues. Si les triangles ABC et DEF sont égaux, on peut ainsi écrire, sans figure, les six relations :

$$\widehat{A} = \widehat{D} \;;\; \widehat{B} = \widehat{E} \;;\; \widehat{C} = \widehat{F}$$

BC = EF ; CA = FD ; AB = DE

Il est commode d'écrire l'un sous l'autre

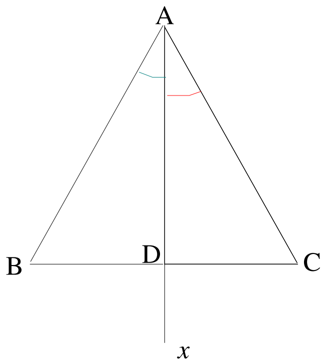
$$\begin{array}{|l}ABC\\DEF\end{array}$$

les angles égaux et les côtés égaux se correspondent ainsi verticalement. D'autre part : A deux angles égaux sont opposés deux côtés égaux, et à deux côtés égaux sont opposés deux angles égaux.

II. TRIANGLE ISOCÈLE

4. Propriété des angles à la base. Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

Menons dans le triangle isocèle ABC la bissectrice Ax de l'angle au sommet. Elle coupe la base BC au point D. Les deux triangles ABD et ACD ont : AB = AC ; AD commun, et $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$; ils sont donc égaux (2e cas), et les angles B et C sont égaux.



5. Corollaire. L'égalité des deux triangles ABD et ACD permet en outre d'écrire que :

BD = CD : D est milieu de BC, et AD est médiane ;

$\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ = 1 D car ces deux angles sont égaux et supplémentaires ; AD est donc hauteur et médiatrice ;

si on plie le triangle ABC suivant AD, les deux parties coïncident, AD est donc un axe de symétrie du triangle.

Dans tout triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est en même temps médiane, hauteur, médiatrice et axe de symétrie.

De plus, cette droite partage le triangle isocèle en deux triangles rectangles égaux.

6. Réciproque. Lorsqu'un triangle a deux angles égaux, il est isocèle.

Calquons le triangle ABC et retournons le calque A'B'C'. On peut faire coïncider par glissement les deux triangles en mettant C' en B, et B' en C. A'C', calque de AC, coïncide alors avec AB. Donc, AB = AC.

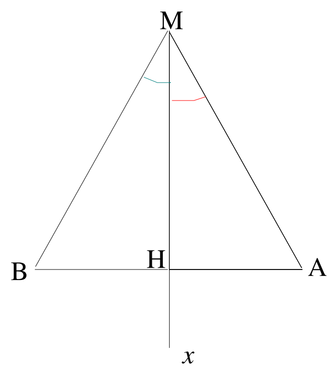
III. APPLICATIONS

7. Condition nécessaire et suffisante. Nous avons démontré que :
1° Si un triangle est isocèle, il a deux angles égaux.
2° Si un triangle a deux angles égaux, il est isocèle.
On énonce simultanément ces deux propriétés en disant :
Pour qu'un triangle soit isocèle, il faut et il suffit qu'il ait deux angles égaux.
Cette forme d'énoncé permet de remplacer, sous forme plus condensée, l'énoncé d'un théorème et celui de sa réciproque. L'expression "il faut" correspond au théorème direct (condition nécessaire), et l'expression "il suffit" correspond au théorème réciproque (condition suffisante).

8. Propriété caractéristique d'une figure. Pour démontrer qu'un triangle est isocèle, nous pouvons indifféremment démontrer :
1° que ce triangle a deux côtés égaux,
2° que ce triangle a deux angles égaux.
L'égalité de deux angles permet donc, aussi bien que l'égalité de deux côtés, de caractériser un triangle isocèle. C'est pourquoi nous disons que : l'égalité de deux angles est une propriété caractéristique du triangle isocèle.
En général, on appelle propriété caractéristique d'une figure toute propriété qui équivaut à la définition.

9. Triangle équilatéral. Pour qu'un triangle soit équilatéral, il faut et il suffit qu'il ait ses trois angles égaux.
L'application au triangle équilatéral ABC de la propriété caractéristique des angles à la base d'un triangle isocèle montre :
1° qu'un triangle équilatéral a ses trois angles égaux,
2° qu'un triangle ayant ses trois angles égaux est équilatéral.
L'égalité des trois angles est donc une propriété caractéristique du triangle équilatéral.

10. Médiatrice d'un segment. Pour qu'un point soit situé sur la médiatrice d'un segment, il faut et il suffit qu'il soit équidistant des extrémités de ce segment.



1° Soit M un point de la médiatrice de AB ; celle-ci est perpendiculaire à AB en son milieu H. Les deux triangles MAH et MBH ont MHA = MHB = 1 D, MH en commun, et HA = HB, ils sont donc égaux (2e cas), et MA = MB.

2° Si M est équidistant de A et B, le triangle MAB est isocèle, et la médiatrice de AB passe par le sommet M du triangle isocèle.

Autrement dit : Les points de la médiatrice d'un segment ont pour propriété caractéristique d'être équidistants des extrémités du segment.

EXERCICES

1. Soit un triangle isocèle ABC de sommet A. On prolonge BA d'une longueur AD = BA.

1° Démontrer que le triangle ACD est isocèle.

2° Montrer que l'un des angles du triangle BCD est égal à la somme des deux autres.

2. Dans un triangle ABC, la bissectrice extérieure de l'angle A rencontre en D le prolongement de BC. On prolonge BA d'une longueur AE = AC.

1° Que représente DA pour le triangle BCE ?

2° Que représente DA pour le triangle BDE ?

3. On prolonge, dans le même sens de parcours, les trois côtés d'un triangle équilatéral ABC d'une même longueur ; on obtient les points D sur BC, E sur CA et F sur AB.

1° Comparer entre eux les triangles tels que AEF.

2° Montrer que DEF est un triangle équilatéral.

4. Soit un quadrilatère convexe ABCD dans lequel AB = BC et $\hat{A} = \hat{C}$.

1° Montrer que CD = DA.

2° Que représente BD pour le segment AC et les angles $\hat{B}$ et $\hat{D}$?

5. Soit un angle $\widehat{xOy}$. On porte sur les côtés deux longueurs égales OA et OB. Soit M un point de la bissectrice de cet angle.

1° Comparer les triangles AOM et BOM. Conséquences ?

2° Que représente OM pour l'angle $\widehat{AMB}$ et pour le segment AB ?

6. Soit un angle $\widehat{xOy}$. Un cercle de centre O coupe Ox en A et Oy en C et un second cercle de même centre coupe Ox en B et Oy en D. AD et BC se coupent en I.

1° Comparer les triangles OAD et OBC. Conséquences ?

2° Comparer les triangles IAB et ICD, ainsi que les segments IA et IC.

3° Comparer les triangles OAI et OCI. Que représente la droite OI pour l'angle $\widehat{xOy}$?

7. Démontrer que si dans un triangle ABC l'une des conditions suivantes est remplie, le triangle est isocèle :

- la bissectrice AD est en même temps hauteur,
- la hauteur AH est en même temps médiane,
- le triangle admet un axe de symétrie.

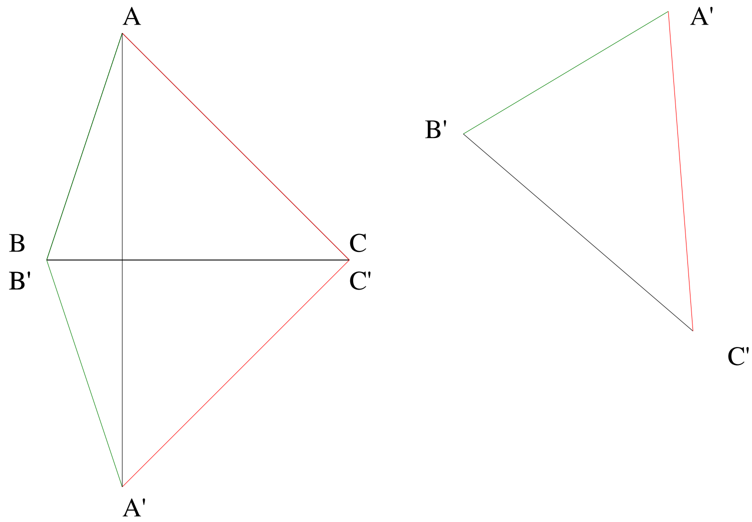
8. Soit un triangle ABC dans lequel la médiane AM est en même temps bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. On prolonge AM d'une longueur MD = AM.

1° Comparer les triangles AMB et DMC. Conséquences ?

2° Montrer que le triangle ACD est isocèle. Comparer AB et AC.
3° En déduire le théorème relatif à un triangle dans lequel une bissectrice est en même temps médiane.
9. Dans un triangle isocèle ABC de base BC on mène les médianes BM et CN. Soit G leur point de rencontre.
1° Comparer les triangles BCM et CBN et les longueurs des deux médianes.
2° Montrer que les triangles GBC et GMN sont isocèles et que G est sur la médiane relative à BC.
10. On considère un triangle isocèle ABC de sommet A. Soient BD et CE les bissectrices intérieures relatives aux sommets B et C. Elles se coupent en I.
1° Comparer les deux triangles BCD et CBE et les longueurs des deux bissectrices.
2° Montrer que les triangles IDE et ADE sont isocèles.

I. LE TROISIÈME CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

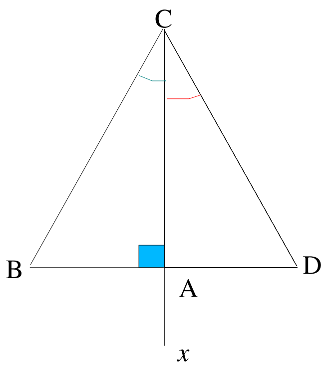
11. Théorème. Lorsque deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, ils sont égaux.



Transportons le calque du triangle A'B'C' en amenant B' en B, C' en C, et A' du côté opposé à A par rapport à la droite BC. Le point B est alors équidistant de A et A', et le point C également. Les points B et C sont donc sur la médiatrice de AA', cette médiatrice est la droite BC, axe de symétrie de chacun des triangles isocèles ABA' et ACA'. En pliant la figure suivant BC, A' vient en A et les deux triangles ABC et A'BC (ou A'B'C') coïncident.

II. ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES

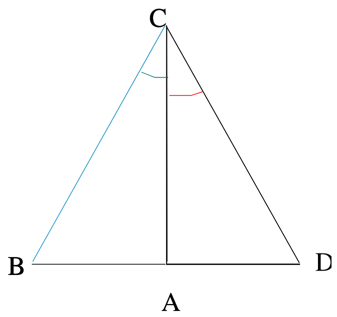
12. Triangle rectangle et triangle isocèle. Tout triangle rectangle peut être, de deux façons différentes, considéré comme la moitié d'un triangle isocèle.

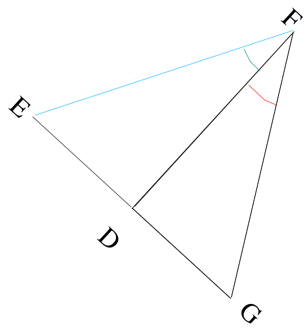


Prolongeons le côté de l'angle droit BA du triangle rectangle ABC d'une longueur AD = BA. Le côté CA est la médiatrice de BD et par suite CB = CD. Le triangle BCD est isocèle et la hauteur CA

le partage en deux triangles rectangles égaux.
On obtiendrait de même un second triangle isocèle en prolongeant le côté CA d'une longueur égale à lui-même.
Or, l'angle $\widehat{BCA}$ est la moitié de l'angle saillant $\widehat{BCD}$. Cet angle étant inférieur à deux droits, sa moitié est inférieure à un angle droit.
Dans un triangle rectangle, les angles autres que l'angle droit sont des angles aigus.
Il en résulte que les deux angles égaux d'un triangle isocèle sont aigus.

13. Premier cas d'égalité des triangles rectangles.
Lorsque deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, ils sont égaux.
Soient ABC et DEF deux triangles rectangles tels que BC = EF et $\widehat{C} = \widehat{F}$





Complétons les triangles isocèles BCD et EFG ainsi que précédemment. Ces deux triangles ont :
BC = EF = CD = FG ; $\widehat{BCD} = \widehat{EFG}$. Ils sont donc égaux d'après le 2e cas d'égalité des triangles quelconques. Leur superposition entraîne celle de leurs moitiés ABC et DEF.

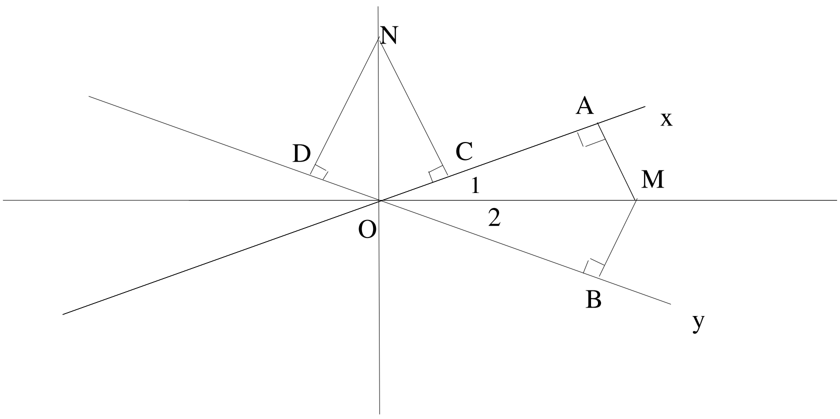
14. Deuxième cas d'égalité des triangles rectangles.
Lorsque deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, ils sont égaux.
Soient ABC et DEF deux triangles rectangles tels que BC = EF et AB = DE. La même construction que précédemment nous donne deux triangles isocèles BCD et EFG qui ont BC = EF = CD = FG et BD = EG. Ils sont égaux d'après le troisième cas d'égalité des triangles quelconques. leur superposition entraîne celle de leurs moitiés ABC et DEF.

III. APPLICATIONS

15. Utilisation des cas d'égalité des triangles.
1° Les deux théorèmes précédents permettent de démontrer l'égalité de deux triangles rectangles. Il ne faut pas oublier que l'on peut utiliser à cet effet les cas d'égalité des triangles quelconques.
2° Pour démontrer l'égalité de deux segments, ou de deux angles, il est souvent commode de rechercher deux triangles dont les segment ou les angles soient des éléments, et essayer de prouver l'égalité de ces triangles.
3° Lorsqu'on effectue les mêmes constructions sur deux figures égales, les éléments homologues

ainsi construits sont égaux.
En effet, tout se passe comme si ces constructions avaient été faites simultanément sur la figure unique obtenue par superposition des figures. Ainsi :
Lorsque deux triangles sont égaux, les médianes, les hauteurs, les bissectrices homologues sont égales. Il est d'ailleurs possible dans chaque cas d'en faire la démonstration en utilisant les cas d'égalité.

16. Bissectrice d'un angle.
Pour qu'un point soit situé sur la bissectrice d'un angle, il faut et il suffit qu'il soit équidistant des côtés de cet angle.



Soient un angle $\widehat{xOy}$ et M un point situé à l'intérieur de cet angle.
1° Si le point M est situé sur la bissectrice de l'angle, les deux triangles rectangles MAO et MBO ont l'hypoténuse MO commune et les angles aigus O1 et O2 égaux. Ils sont égaux (n° 13) et il en résulte que MA = MB.
2° Si un point M est tel que MA = MB, les deux triangles rectangles MAO et MBO ont l'hypoténuse MO commune et les côtés de l'angle droit MA et MB égaux, Ils sont donc égaux (n° 14) et O1 = O2, M est sur la bissectrice de $\widehat{xOy}$.

17. Corollaire. Pour qu'un point soit équidistant de deux droites concourantes, il faut et il suffit qu'il soit situé sur l'une ou l'autre des deux droites perpendiculaires, bissectrices des angles définis par ces deux droites.
Rappelons en effet que les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires forment un angle droit, et que par suite les bissectrices des quatre angles formés par deux droites concourantes déterminent deux droites perpendiculaires.

EXERCICES

11. Dans un triangle ABC, on prolonge la médiane AM d'une longueur MD = AM.
1° Comparer les triangles BMD et CMA. Evaluer les côtés du triangle ABD par rapport à AB, AC et AM.

2° Que peut-on dire de deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun ainsi que la médiane relative au troisième ?

12. Par le milieu O d'un segment AB, on mène une droite quelconque xy. Puis on mène à cette droite les perpendiculaires AC et BD.

1° Comparer les triangles OAC et OBD.

2° Que peut-on dire des distances de A et B à xy ?

13. Soit un triangle isocèle OAB de base AB. On mène les hauteurs AA' et BB' qui se coupent en H.

1° Comparer les triangles ABA' et BAB', puis les segments AA' et BB'.

2° Montrer que le triangle BHA est isocèle. Que représente OH pour le segment AB ?

3° Que peut-on dire, réciproquement, d'un triangle qui a deux hauteurs égales ?

14. On considère un triangle isocèle ABC dans lequel la médiatrice coupe le prolongement de la base BC au point D. On joint DA que l'on prolonge d'une longueur AE = BD.

1° Montrer que le triangle DAC est isocèle. Conséquences ?

2° Que peut-on dire du triangle CDE ?

15. On prend sur les côtés d'un angle $\widehat{xAy}$ deux points B et C (AB ≠ AC). La bissectrice de $\widehat{xAy}$ et la médiatrice de BC se coupent en D.

1° Comparer DB et DC puis les distances DE et DF aux côtés de $\widehat{xAy}$.

2° Comparer les triangles DBE et DCF puis les angles $\widehat{BDC}$ et $\widehat{EDF}$.

3° Montrer que BE et FC sont égaux à la demi-différence de AB et AC.

16. Deux triangles ABC et A'B'C' ont un côté égal BC = B'C' ainsi que les hauteurs AH et A'H', et les médianes AM et A'M'.

1° Comparer les triangles AMH et A'M'H'.

2° On superpose ces deux triangles. En déduire l'égalité des triangles ABC et A'B'C'.

17. Soit un triangle isocèle ABC, dans lequel la base BC est inférieure aux côtés égaux AB et AC. . On prolonge AB et BC de longueurs BD et CE égales à la différence AB - BC.

1° Montrer que BE = AC.

2° Comparer les triangles ACE et EBD.

3° Montrer que $\widehat{ADE} = \frac{1}{2}(\widehat{AED} + \widehat{BAC})$.

18. Soient deux points A et B équidistants d'une même droite xy. On désigne par M et N les pieds des perpendiculaires menées de A et B sur xy et par O le milieu de MN.

1° Comparer les triangles OAM et OBN. Conséquences ?

2° On suppose que A et B sont de part et d'autre de xy ; montrer que O milieu de MN est le milieu de AB.

3° On suppose maintenant que A et B sont du même côté de xy ; Montrer que la médiatrice de AB est la médiatrice de MN.

19. Dans un triangle rectangle ABC, l'angle aigu B est le double de l'angle C.

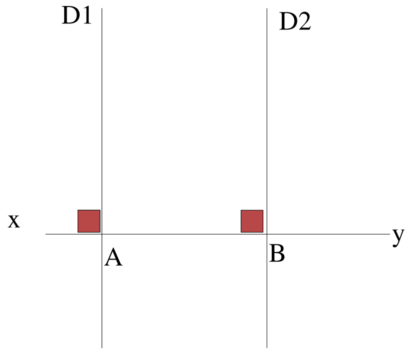
1° Montrer que ce triangle est la moitié d'un triangle équilatéral.

2° Comparer le côté AB et l'hypoténuse BC. Enoncer la réciproque.

PARALLÈLES

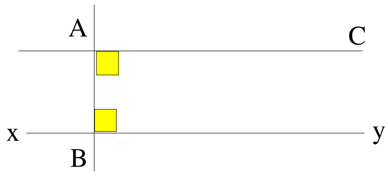
18. Définition. Rappelons que deux droites distinctes d'un plan ont au plus un point commun. Dans ce cas elles sont dites sécantes ou concourantes.
On appelle droites parallèles deux droites d'un même plan qui n'ont pas de point commun.

19. Théorème. Lorsque deux droites distinctes sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles.



En effet, si les droites D1 et D2 perpendiculaires à xy étaient concourantes, on pourrait par leur point commun mener deux perpendiculaires à la même droite. Cela est impossible et par suite D1 et D2 n'ont pas de point commun.
On écrit en abrégé D1 || D2.

20. Par un point extérieur à une droite on peut mener une parallèle à cette droite.
Soit à mener par A la parallèle à xy.

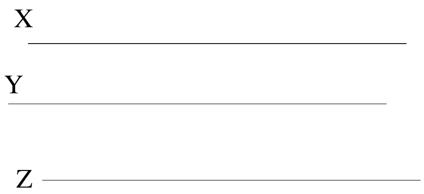


Traçons AB perpendiculaire à xy, puis AC perpendiculaire à AB. AC et xy étant perpendiculaires à AB, sont parallèles.

21. Postulat d'Euclide. Il est impossible de démontrer que la parallèle ainsi construite est la seule passant par le point A. Cette propriété, uniquement vérifiée par l'expérience, constitue un *postulat*, mis en évidence pour la première fois par Euclide (géomètre grec, IIIe siècle av. JC).
Par un point extérieur à une droite on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite.

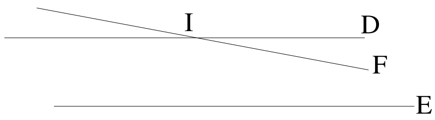
22. Corollaire 1. Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.
Soient X et Y deux droites parallèles à Z. Si X et Y étaient concourantes, on pourrait par leur point

d'intersection mener deux parallèles à Z, ce qui est impossible.



23. Corollaire 2. Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une, coupe l'autre.

Soient D et E deux droites parallèles, et F une droite qui coupe D en I. D étant la seule parallèle à E



passant par I, la droite F n'est pas parallèle à E, et par suite elle la coupe.

24. Corollaire 3. Lorsque deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. (fig. du n° 19).

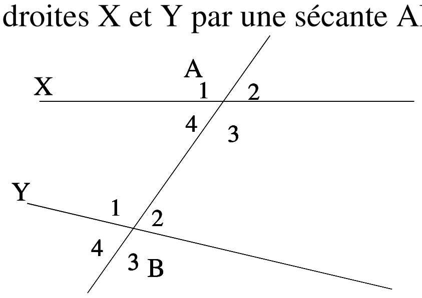
Soit D1 et D2 deux parallèles et xy une perpendiculaire à D1 en A. La droite xy coupe donc D2 en un point B. La perpendiculaire en B à xy est parallèle à D1, et par suite elle est confondue avec D2.

25. Définitions.

1° Direction d'une droite. On exprime que plusieurs droites sont parallèles en disant qu'elles ont même direction.
2° Segments, demi-droites parallèles. Deux segments ou deux demi-droites sont parallèles lorsque les droites illimitées qui les contiennent sont parallèles.
3° Notion de bande. On appelle bande la portion de plan comprise entre deux parallèles. Les deux parallèles sont les bords de la bande.

26. Angles formés par deux droites et une sécante.

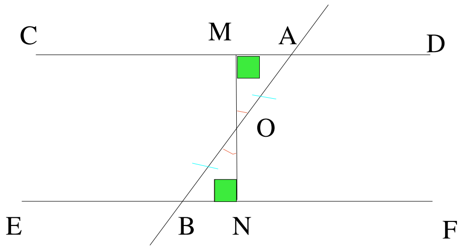
Lorsqu'on coupe deux droites X et Y par une sécante AB on forme huit angles. On appelle :



1° Angles alternes internes : deux angles non adjacents, situés de part et d'autre de la sécante et entre les deux droites : A3 et B1 sont alternes internes.
2° Angles correspondants : deux angles non adjacents, situés d'un même côté de la sécante, l'un entre les deux droites, l'autre à l'extérieur : A1 et B1 sont correspondants.
3° Angles intérieurs d'un même côté : deux angles situés entre les deux droites, d'un même côté de la sécante. A4 et B1 sont intérieurs d'un même côté.

27. Propriétés angulaires caractéristiques des parallèles.

Pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles forment avec une sécante :
- soit deux angles alternes internes égaux,
- soit deux angles correspondants égaux,
- soit deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires.

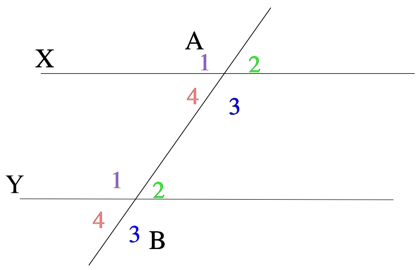


1° Soient CD et EF deux droites coupées par la sécante AB. Par le milieu O de AB, menons la perpendiculaire MN à CD :

a) Si nous supposons CD et EF parallèles, MN est aussi perpendiculaire à EF. Les deux triangles rectangles OAM et OBN ont l'hypoténuse égale, OA = OB, et un angle aigu égal, en O, opposés par le sommet. Ils sont donc égaux, et nous avons $\widehat{OAC} = \widehat{OBF}$. Par suite $\widehat{OAD} = \widehat{OBE}$ comme suppléments des précédents : deux angles alternes internes sont égaux.

b) Si nous supposons égaux deux angles alternes internes, les deux triangles OAM et OBN ont OA = OB ; $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ et $\widehat{OAM} = \widehat{OBN}$. Ils sont donc égaux (1er cas) et $\widehat{ONB} = \widehat{OMA}$ = 1 D. Les deux droites CD et EF sont donc parallèles comme étant toutes deux perpendiculaires à MN.

2°



Les angles A1 et A3 sont égaux comme opposés par le sommet. Pour que les angles alternes internes A3 et B1 soient égaux, il faut et il suffit que les angles correspondants le soient.

3° Les angles A3 et A4 sont supplémentaires ; pour que les angles alternes internes A3 et B1 soient égaux il faut et il suffit que les angles intérieurs du même côté A4 et B1 soient supplémentaires.

EXERCICES

20. Démontrer que pour que deux droites soient concourantes, il suffit :

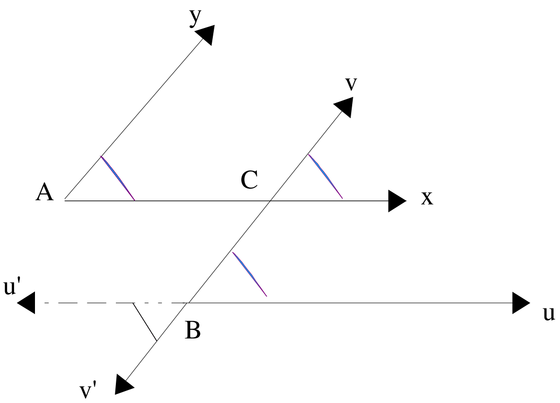
1° que l'une soit perpendiculaire et l'autre oblique par rapport à une troisième,

2° qu'elles soient perpendiculaires aux côtés d'un angle saillant,
3° qu'elles forment avec une sécante des angles intérieurs d'un même côté non supplémentaires.
21. Etant données deux parallèles coupées par une sécante, montrer que :
1° les bissectrices de deux angles alternes internes ou correspondants sont parallèles,
2° les bissectrices de deux angles intérieurs du même côté sont perpendiculaires.
Enoncer les réciproques de ces propriétés.
22. Sur les côtés d'un angle de sommet O on porte deux longueurs égales OA = OB. Puis extérieurement à cet angle on construit deux angles égaux $\widehat{OAx}$ et $\widehat{OBy}$ et on porte sur Ax et By deux longueurs égales AC = BD.
1° Comparer les triangles OAC et OBD.
2° Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ ont même bissectrice.
3° Comparer les directions de AB et CD.
23. On considère deux angles adjacents supplémentaires $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ et leurs bissectrices Ox et Oy. Par le point B on mène la parallèle à AC qui coupe Ox en M et Oy en N.
1° Comparer MB et OB, puis NB et OB.
2° Que représente le point B pour le segment MN ?
24. Par le point de rencontre I des bissectrices intérieures des angles B et C du triangle ABC, on mène la parallèle à BC qui coupe AB en D et AC en E.
1° Comparer DB et DI puis EC et EI.
2° Montrer que DE = BD + CE.
25. Soit un triangle ABC rectangle en A. Sur la perpendiculaire en C à AC, on porte des segments CD et CE égaux à BC.
1° Comparer les directions de AB et DE.
2° Que représentent BD et BE pour l'angle $\widehat{B}$?
26. Soit un triangle ABC. On mène les bissectrices intérieures des angles B et C qui coupent en D et E la parallèle menée par A à BC.
1° Comparer AD et AB, puis de même AE et AC.
2° Montrer que DE = AB + AC.
3° Reprendre le problème avec les bissectrices extérieures des angles B et C.
27. Soit un triangle ABC. On mène par le milieu D de BC la perpendiculaire à la bissectrice intérieure de l'angle A. Cette perpendiculaire coupe AB en E et AC en F. EF coupe la parallèle menée par B à AC en G.
1° Montrer que les triangles AEF et BEG sont isocèles.
2° Comparer les triangles DBG et DCF.
3° Démontrer l'égalité des segments BE et CF.

I. ANGLES À CÔTÉS PARALLÈLES OU PERPENDICULAIRES

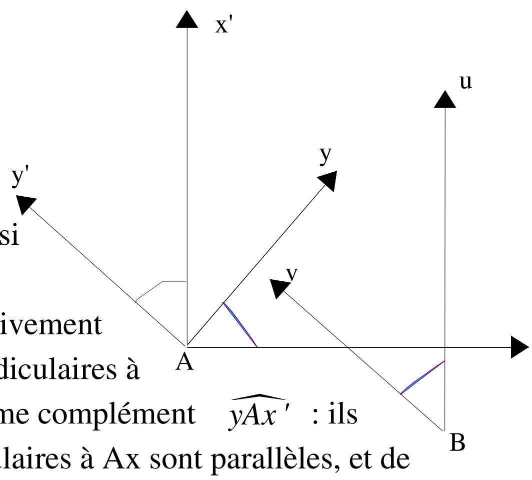
28. Définition. Deux demi-droites ou deux segments parallèles AM et BN sont de même sens s'ils sont situés d'un même côté de la droite AB. Ils sont de sens contraires s'ils sont situés de part et d'autre de AB.

29. Théorème. 1° Lorsque deux angles ont leurs côtés parallèles et de même sens, ils sont égaux.
2° Lorsque deux angles ont leurs côtés parallèles et de sens contraire, ils sont égaux.
3° Lorsque deux angles ont deux côtés parallèles et de même sens et les deux autres de sens contraires, ils sont supplémentaires.
Par le point B, menons les parallèles u'u et v'v aux côtés de l'angle $\widehat{xAy}$. Les demi-droites Ax et Bv ou leurs prolongements se coupent en C.
1° Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{uBv}$ à côtés parallèles et de même sens sont séparément égaux à $\widehat{xCv}$



comme correspondants, ils sont donc égaux.
2° Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{u'Bv'}$ à côtés parallèles et de sens contraires sont aussi égaux car $\widehat{u'Bv'}$ et $\widehat{uBv}$ sont opposés par le sommet.
3° Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{u'Bv}$ ont deux côtés parallèles et de même sens et deux parallèles et de sens contraires. Ils sont supplémentaires car $\widehat{u'Bv}$ étant le supplément de $\widehat{uBv}$ l'est aussi de $\widehat{xAy}$.

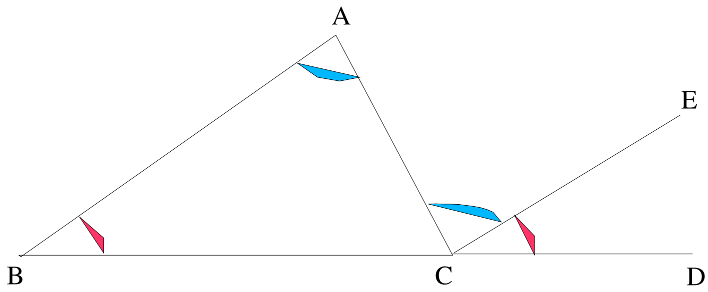
30. Théorème. Lorsque deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, ils sont égaux ou supplémentaires. Ils sont égaux s'ils sont tous deux aigus ou tous deux obtus ; ils sont supplémentaires si l'un est aigu et l'autre obtus.
Soient $\widehat{xAy}$ et $\widehat{uBv}$ deux angles à côtés respectivement perpendiculaires. Par le point A menons les perpendiculaires à Ax et Ay. Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'Ay'}$ ont le même complément $\widehat{yAx'}$: ils sont donc égaux. D'autre part, Ax' et Bu perpendiculaires à Ax sont parallèles, et de



même Ay' et Bv. Les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{uBv}$ sont donc égaux ou supplémentaires et par suite il en est de même de $\widehat{xAy}$ et $\widehat{uBv}$.
La deuxième partie du théorème résulte du fait que deux angles aigus (ou obtus) ne peuvent être que égaux, tandis qu'un angle aigu et un angle obtus ne peuvent être que supplémentaires.

II. Somme des angles d'un triangle

31. Théorème. La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux droits.



Soit un triangle ABC. Prolongeons BC de CD et menons CE parallèle et de même sens que BA.
L'angle intérieur A et l'angle $\widehat{ACE}$ sont égaux comme alternes internes. L'angle intérieur B et l'angle $\widehat{DCE}$ sont égaux comme correspondants. La somme des trois angles du triangle ABC est donc égale à la somme des trois angles formés en C, soit à deux droits :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\,\mathrm{D}$$

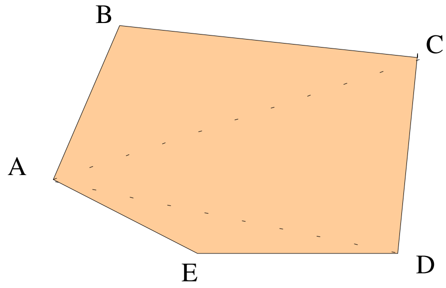
32. Corollaire. Un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents à cet angle.
Il résulte de ce qui précède que $\widehat{ACD} = \hat{A} + \hat{B}$.

33. Applications.
1° Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires. En particulier, les angles aigus d'un triangle rectangle isocèle valent chacun 45°.
2° Les angles d'un triangle équilatéral valent chacun 60° :

3° Lorsque deux triangles ont deux angles respectivement égaux, ils ont leurs trois angles égaux.
4° Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ou d'un angle obtus, sinon la somme dépasserait deux droits.

III. Somme des angles d'un polygone convexe

34. Théorème. La somme des angles d'un polygone convexe est égale à autant d'angles plats que ce polygone a de côtés moins deux.

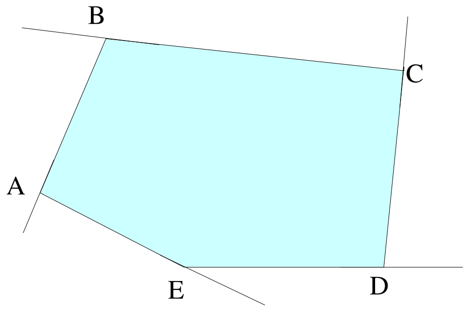


Soit un polygone ABCDE, et désignons par n le nombre de ses côtés. En menant les diagonales issues de A, nous décomposons le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés autres que AB et AE, soit donc en (n - 2) triangles. La somme S des angles du polygone est égale à celle des angles de tous ces triangles et par suite à (n - 2) angles plats :

$$\boxed{S = 2\,D \times (n - 2) = 2n\,D - 4\,D}$$

35. La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère convexe est égale à 4 droits. On le voit en faisant n = 4 ou directement en décomposant en deux triangles.[1]

36. Corollaire. La somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est égale à quatre droits.



La somme de l'angle intérieur et de l'angle extérieur relatifs à chacun des n sommets est 2 D. La somme des angles intérieurs et extérieurs est donc égale à 2n D. Cette somme surpasse de 4 D la somme des angles intérieurs (égale à 2n D - 4 D). La somme des angles extérieurs est donc dans tous les cas égale à 4 D.

EXERCICES

28. Soient deux triangles ABC et A'B'C' ayant leurs côtés respectivement parallèles. B'C' coupe les droites AB et AC en D et E.
1° Comparer les angles des triangles ABC et ADE, puis ceux des triangles ADE et A'B'C'.
2° Enoncer la propriété qui en résulte pour deux triangles qui ont leurs côtés parallèles.

1 La présente éditrice fait remarquer que ce résultat est vrai aussi pour un quadrilatère concave, aisément décomposable en deux triangles.

29. Soient deux demi-droites Ax et By situées d'un même côté de la droite AB, et Ax' et By' les demi-droites opposées. On suppose $\widehat{BAx} + \widehat{ABy} < 2$ D.
1° Montrer que les droites x'x et y'y sont concourantes et que les demi-droites Ax' et By' n'ont pas de point commun.
2° En déduire que Ax et By se coupent en un point C et énoncer la condition pour que deux demi-droites aient un point commun.
30. Soit un triangle ABC. On désigne par a, b, c les valeurs des angles du triangle.
1° Evaluer en fonction de b et c l'angle de la hauteur AA' et de la bissectrice intérieure AD.
2° Evaluer en fonction de a l'angle $\widehat{BIC}$ des bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
3° Evaluer en fonction de a l'angle $\widehat{BHC}$ des hauteurs issues de B et C. Application numérique : b = 57° et c = 75°.
31. Soit un triangle ABC dans lequel AC > AB. On mène la bissectrice de l'angle A qui coupe BC en D, puis la perpendiculaire BE à AD. Evaluer en fonction des angles B et C du triangle :
1° Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ADC}$.
2° Les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{EBD}$.
Application numérique : B = 68°, C = 54°.
32. Dans un triangle ABC la bissectrice de l'angle B coupe en I la hauteur issue de A et en D la perpendiculaire en A à AB.
1° Evaluer en fonction de l'angle B du triangle les angles $\widehat{IAB}$, $\widehat{AID}$ et $\widehat{ADI}$.
2° Comparer les segments AI et AD.
33. Montrer que si l'un des angles aigus d'un triangle rectangle est égal à 30°, le côté opposé à cet angle est égal à la moitié de l'hypoténuse. Enoncer et démontrer la réciproque.
34. On considère un cercle O et un diamètre xy de ce cercle. D'un point M du cercle tel que $\widehat{yOM} < 45°$, on mène MH perpendiculaire à xy et on construit le point A de xy tel que HA = OH. La droite AM recoupe le cercle en B.
1° Montrer que les triangles MOA et OMB sont isocèles.
2° Calculer $\widehat{OBM}$ et $\widehat{BOx}$ en fonction de $\widehat{OAB}$.
35. Soit un triangle ABC rectangle en A. On prolonge CB d'une longueur BD = BA et sur la perpendiculaire en C à BC, on porte du côté de A une longueur CE = CA.
1° Calculer en fonction de $\widehat{B}$ les angles $\widehat{BAD}$, $\widehat{ACE}$ et $\widehat{CAE}$.
2° Evaluer l'angle $\widehat{DAE}$ et montrer que D, A, E sont alignés.
36. Soit un triangle rectangle isocèle ABC. Par le sommet A de l'angle droit, on mène, extérieurement au triangle, une droite xy puis les perpendiculaires BM et CN à xy, ainsi que la hauteur AH du triangle ABC.
1° Montrer que HA = HB = HC.
2° Comparer les triangles AMB et CNA. Que représente MN pour HM et CN ?
3° Comparer les triangles HBM et HAN et montrer que le triangle MHN est rectangle isocèle.
37. On mène la hauteur AH issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, puis les bissectrices intérieures des angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{CAH}$ qui coupent l'hypoténuse en D et E.
1° Evaluer la valeur de l'angle $\widehat{DAE}$.
2° Montre que les triangles BAE et CAD sont isocèles.

3° Comparer DE à la longueur AB + AC - BC.

38. Soit un triangle ABC. On prolonge BC de deux longueurs BD = BA et CE = CA.

1° Que représente DE pour le triangle ABC ?

2° Calculer les angles D et E du triangle ADE en fonction des angles B et C.

3° Comparer deux triangles ayant leurs angles respectivement égaux et même périmètre.

39. Dans un triangle ABC l'angle aigu B est le double de l'angle C. La médiatrice de AC coupe BC en D.

1° Montrer que AD partage ABC en deux triangles isocèles.

2° Comparer l'angle extérieur A à l'angle C dans le triangle ABC.

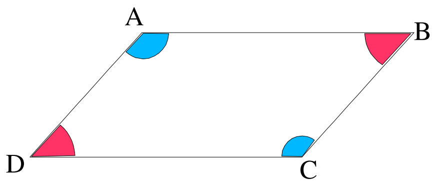
40. Dans un triangle ABC, l'angle B est le triple de l'angle C. La médiatrice de BC coupe coupe CA en D.

1° Montrer que BD partage ABC en deux triangles isocèles.

2° Comparer l'angle extérieur A à l'angle C dans le triangle ABC.

PARALLÉLOGRAMME

37. Définition. Le parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.



On obtient un parallélogramme en coupant deux parallèles par deux sécantes parallèles entre elles. Le quadrilatère ABCD est convexe, car il est tout entier situé du même côté de chacune des quatre droites précédentes.

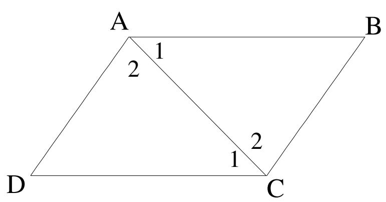
Propriétés des angles.

38. Théorème. Dans tout parallélogramme :
deux angles consécutifs sont supplémentaires ;
deux angles opposés sont égaux.
Dans le parallélogramme ABCD, les deux angles consécutifs A et B occupent la position d'intérieurs du même côté de la sécante AB pour les parallèles AD et BC. Ils sont donc supplémentaires.
Les deux angles opposés A et C ont le même supplément B, donc ils sont égaux.

39. Réciproque. Lorsqu'un quadrilatère convexe a ses angles opposés égaux deux à deux, c'est un parallélogramme.
Si dans le quadrilatère ABCD nous avons $\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B} = \widehat{D}$, la somme $\widehat{A} + \widehat{B}$ vaut la moitié de la somme des quatre angles. Cette somme étant égale à 4 D, nous avons $\widehat{A} + \widehat{B} = 2$ D. Ces angles occupant la position d'intérieurs du même côté de la sécante AB pour les droites AD et BC, ces droites sont donc parallèles. Il en va de même pour les deux autres, le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

Propriétés des côtés.

40. Théorème. Dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux deux à deux.



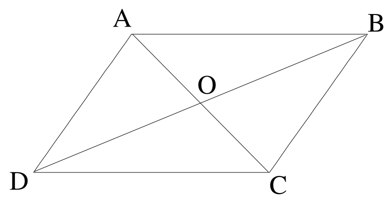
Soit un parallélogramme ABCD. Menons la diagonale AC et comparons les triangles ABC et CDA. Ils ont le côté AC en commun, les angles A1 et C1 égaux comme alternes internes et de même C2 = A2. Ils sont donc égaux (1er cas) et par suite : AB = CD et AD = BC.

41. Réciproque 1. Lorsqu'un quadrilatère convexe a deux côtés à la fois égaux et parallèles, c'est un parallélogramme.
Supposons que le quadrilatère ABCD ait les côtés AB et CD égaux et parallèles. Les deux triangles ABC et CDA ont le côté AC commun, AB = CD (hypothèse), et A1 = C1 comme alternes internes, ils sont donc égaux (2e cas). Les angles alternes internes A2 et C2 sont par suite égaux, et les côtés AD et BC sont donc parallèles. Le quadrilatère est un parallélogramme.
Cette réciproque permet de construire facilement un parallélogramme sur du papier quadrillé.

42. Réciproque 2. Lorsqu'un quadrilatère convexe a ses côtés opposés égaux deux à deux, c'est un parallélogramme.
Supposons que le quadrilatère ABCD ait AB = CD, et AD = BC. Le quadrilatère étant convexe, la diagonale AC est intérieure. Les triangles ABC et CDA ont deux côtés égaux et le troisième commun, ils sont donc égaux (3e cas). Les angles alternes internes A1 et C1 sont par suite égaux, et AB et CD sont parallèles. De même C2 = A2, et par suite AD et BC sont parallèles. Le quadrilatère est donc un parallélogramme.

Propriété des diagonales.

43. Théorème. Dans tout parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu.



Soit O le point de rencontre des diagonales. AB étant parallèle et égal à CD, les triangles OAB et OCD ont AB = CD, $\hat{A} = \hat{C}$ comme alternes internes et de même $\hat{B} = \hat{D}$. Ils sont donc égaux et par suite OA = OC et OB = OD. Le point O est le milieu de chacune des diagonales.

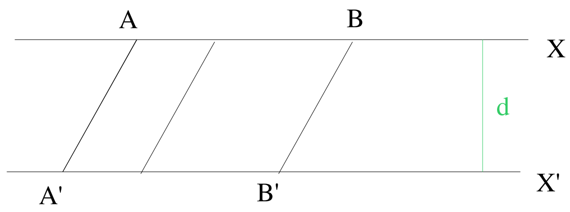
44. Réciproque. Lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme.
Supposons que le quadrilatère ABCD ait été obtenu en portant sur deux droites sécantes en O, des segments OA = OC sur l'une et OB = OD sur l'autre. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont égaux comme opposés par le sommet, les triangles OAB et OCD sont égaux (2e cas). Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OCD}$ sont donc égaux et par suite les côtés AB et CD sont à la fois égaux et parallèles. Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

45. Centre d'un parallélogramme. Il résulte du théorème précédent que le point de concours des diagonales est un centre de symétrie du parallélogramme. Ce point est appelé le centre du parallélogramme.

Applications

46. Reconnaître un parallélogramme.
L'étude précédente montre qu'un quadrilatère convexe est un parallélogramme s'il possède l'une quelconque des propriétés caractéristiques suivantes :
1° Ses côtés sont parallèles deux à deux,
2° Ses angles opposés sont égaux deux à deux,
3° Deux de ses côtés sont à la fois égaux et parallèles,
4° Ses côtés opposés sont égaux deux à deux,
5° Ses diagonales se coupent en leur milieu.

47. Généralisation. Les portions de parallèles comprises entre deux parallèles sont égales.



Les segments parallèles AA', BB', etc compris entre les parallèles X et X' sont égaux comme côtés opposés des parallélogrammes tels que ABB'A'.

48. Distance de deux parallèles. En particulier si les segments égaux sont perpendiculaires aux deux parallèles X et X', on voit que tous les points de l'une sont à la même distance de l'autre. D'où la définition :
On appelle distance de deux parallèles la longueur du segment qu'elles découpent sur une perpendiculaire commune quelconque. Cette distance est la largeur de la bande (X,X') définie par les parallèles X et X'.

EXERCICES

41. Soit un parallélogramme ABCD. Par le sommet A on mène la parallèle à la diagonale BD qui coupe en E et F les prolongements de CB et CD.
1° Comparer les côtés et les angles du triangle CEF à ceux du triangle ABD.
2° Que représentent A, B, et D pour les segments EF, EC et FC ?
42. On mène deux segments AB et CD parallèles, égaux et de même sens, puis de même deux autres segments AE et CF parallèles, égaux et de même sens.
1° Comparer les segments BD et EF en grandeur et en direction.
2° Comparer de même les segments BE et DF.
43. On mène deux segments AB et CD parallèles, égaux et de sens contraires, puis les segments AE et CF de même.
1° Montrer que les segments BD et EF ont même milieu.

2° Comparer les segments BE et DF en grandeur et en direction.

44. Soient M et N les milieux des côtés AD et BC du parallélogramme ABCD de centre O.

1° Montrer que MN est parallèle et égal à AB et CD.

2° Montrer que le centre O est le milieu de MN.

3° Que peut-on dire des distances de M et N aux côtés AB et CD ?

45. Dans un triangle ABC on mène par un point E de AC les parallèles à AB et BC qui coupent BC en D et AB en F. On suppose que AE = BF.

1° Quelle est la nature du triangle AED ?

2° Que représente AD pour le triangle ABC ? En déduire la construction du point E.

46. Soit un triangle ABC. Les hauteurs issues de B et de C se coupent en H. On mène les perpendiculaires en B à AB et en C à AC : elles se coupent en D.

1° Quelle est la nature du quadrilatère BHCD ?

2° Que représente pour HD le milieu M de BC ?

47. D'un point D de la base BC d'un triangle ABC, on mène les parallèles aux côtés AB et AC. Elles coupent respectivement en E et F la parallèle à BC menée par le point A.

1° Comparer les triangles ABC et DEF.

2° Comparer les segments CE et BF en grandeur et en direction.

3° La figure obtenue admet-elle un centre de symétrie ?

48. D'un point M de la base BC d'un triangle isocèle ABC, on mène les parallèles aux côtés AB et AC. Elles coupent ces côtés en N et P.

1° Comparer la somme MN + MP au côté AB.

2° Que peut-on dire du périmètre du quadrilatère APMN lorsque M décrit le segment BC ?

3° Si M est sur le prolongement de BC, que représente AB pour MN et MP ?

49. Soit un triangle isocèle ABC. D'un point M de la base on mène les perpendiculaires MH et MK aux côtés AB et AC. MK rencontre en I la parallèle à AC menée par B.

1° Comparer les triangles MIB et MHB. Conséquences ?

2° Montrer que la somme MH + MK est indépendante du point M. Comparer sa valeur à la hauteur BD du triangle.

3° Comment modifier le 2° si le point M est sur le prolongement de BC ?

50. Par un point M intérieur à un triangle équilatéral ABC, on mène les parallèles DE à BC, FG à CA et HI à AB.

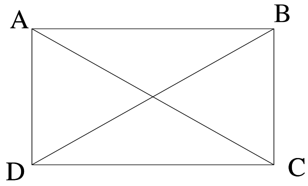
1° Comparer les segments déterminés sur les trois côtés du triangle.

2° Comparer la somme DE + FG + HI à l'un des trois côtés du triangle.

3° Comparer la somme des distances du point M aux trois côtés du triangle à la hauteur de ce triangle.

I. RECTANGLE

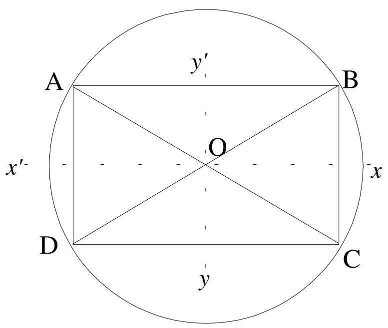
49. Définition. Un rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit. Il en résulte que :
Les quatre angles sont droits.
Réciproquement : Un quadrilatère qui a ses angles droits est un rectangle, car deux côtés opposés sont alors respectivement perpendiculaires aux deux autres, et par suite parallèles.
Comme dans tout parallélogramme, les côtés opposés d'un rectangle sont égaux et les diagonales se coupent en leur milieu.



50. Théorème. Les diagonales d'un rectangle sont égales. Les deux triangles ABC et BAD ont $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$ = 1 D, le côté AB commun, et BC = AD, côtés opposés du rectangle. Ils sont égaux (2e cas), et par suite AC = BD.

51. Réciproque. Lorsqu'un parallélogramme a ses diagonales égales, c'est un rectangle.
Les deux triangles ABC et BAD ont alors AB commun, BC = AD et AC = BD par hypothèse. Ils sont égaux (3e cas). les angles A et B du parallélogramme sont donc égaux ; comme ils sont aussi supplémentaires, chacun d'eux est droit.

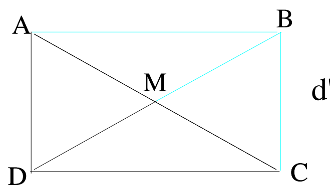
52. Cercle circonscrit, axes de symétrie du rectangle.



Les diagonales d'un rectangle étant égales, le milieu O de ces diagonales est équidistant des quatre sommets, et par suite il est centre d'un cercle passant par les quatre sommets : c'est le cercle circonscrit au rectangle.
Les quatre triangles tels que AOD sont isocèles. La droite x'x bissectrice de $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$ est donc médiatrice de AD et BC. De même y'y est médiatrice de AB et CD. Il en résulte que x'x et y'y sont deux axes de symétrie du rectangle.

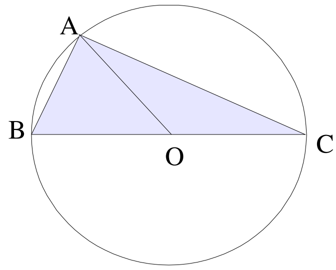
II. PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU TRIANGLE RECTANGLE

53. Théorème. Dans tout triangle rectangle la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse.



Soit un triangle ADC rectangle en D. Prolongeons la médiane DM d'une longueur égale MB. Le quadrilatère ADCB est un parallélogramme car ses diagonales ont même milieu, et un rectangle puisque $\widehat{ADC}$ = 1 D. La demi-diagonale DM est donc la moitié de AC.

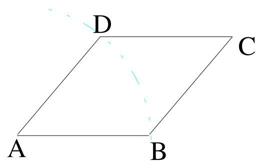
54. Réciproque. Lorsqu'une médiane d'un triangle est égale à la moitié du côté correspondant, ce triangle est rectangle.
La construction précédente donne un parallélogramme qui a des diagonales égales, c'est-à-dire un rectangle.



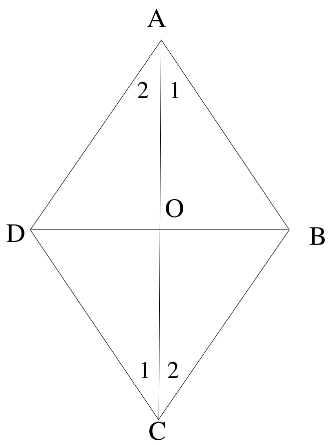
55. Cercle circonscrit à un triangle rectangle. Il en résulte que :
Le cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle passe par le sommet de l'angle droit.
Et réciproquement : Lorsqu'on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, on obtient un angle droit.

III. LOSANGE

56. Définition. Un losange est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux.



Les côtés opposés d'un parallélogramme étant égaux deux à deux, il en résulte que les quatre côtés d'un losange sont égaux.
Réciproquement, un quadrilatère qui a ses quatre côtés égaux est un losange, car, ses côtés opposés étant égaux, c'est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux.
Comme dans tout parallélogramme, les angles opposés d'un losange sont égaux et les diagonales se coupent en leur milieu.



57. Théorème. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et bissectrices des angles du losange.
Soit un losange ABCD de centre O. Dans le triangle isocèle DAB, la médiane AO est en même temps hauteur et bissectrice de l'angle A. Donc AC est perpendiculaire à BD et bissectrice des angles A et C du losange.

58. Réciproque 1. Lorsqu'un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, c'est un losange. Les diagonales du parallélogramme ABCD se coupant en leur milieu, sont alors médiatrices l'une de l'autre. a est équidistant de B et D, et par suite AB = AD.

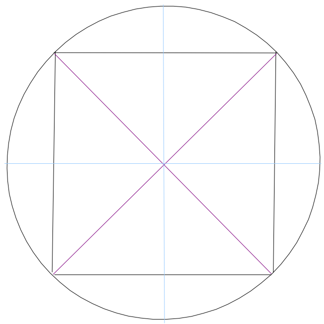
59. Réciproque 2. Lorsqu'une diagonale d'un parallélogramme est bissectrice d'un de ses angles, ce parallélogramme est un losange.
Si dans le parallélogramme ABCD la diagonale AC est bissectrice de l'angle A, nous avons A1 = A2. or, A2 = C2 comme alternes-internes et par suite A1 = C2. le triangle ABC ayant deux angles égaux est isocèle et AB = BC.

60. Axes de symétrie du losange. Les diagonales d'un losange sont des axes de symétrie du losange. En effet, les diagonales du losange ABCD sont médiatrices l'une de l'autre. En pliant le losange suivant la diagonale BD par exemple, les deux parties ABD et CBD coïncident.

IV. CARRÉ

61. Définition. Le carré est un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux, ou un losange qui a un angle droit.
Le carré possède donc toutes les propriétés du rectangle et du losange :

62. Dans un carré, les quatre côtés sont égaux, les quatre angles sont droits, et les diagonales sont égales, perpendiculaires et bissectrices des angles du carré.
L'angle formé par un des côtés et une diagonale est donc égal à 45°, et le centre du carré est le centre du cercle circonscrit au carré.
Le carré possède quatre axes de symétrie : les médiatrices des côtés et les diagonales.



EXERCICES

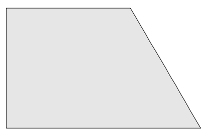
51. Deux cercles inégaux de centres O et O' passent par deux points A et B. On mène les diamètres AOC et AO'D.
1° Evaluer les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABD}$.
2° Comment sont disposés les points B, C, D ?
52. Soit un triangle ABC. On mène la hauteur AH et on joint les milieux M et N des côtés AB et AC.
1° Comparer les triangles AMN et HMN et montrer que MN est médiatrice de AH.
2° On mène les hauteurs MI et NJ des triangles MBH et NCH. Quelle est la nature du quadrilatère MNJI ?
3° Comparer MN et BC en grandeur et en direction.
53. Deux droites parallèles x'x et y'y sont coupées en A et B par une sécante. Les bissectrices des angles intérieurs formés en A et B se coupent en M et N.
1° Quelle est la nature du quadrilatère AMBN ? Comparer AB et MN.
2° Montrer que MN est parallèle à x'x et y'y et équidistant de ces deux droites.
54. On mène les bissectrices intérieures des angles A et B d'un parallélogramme ABCD tel que AB < AD. Ces bissectrices coupent BC et AD en E et F et se coupent en M.

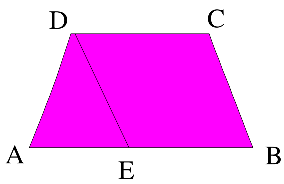
1° Quelle est la nature du quadrilatère ABEF ? Comparer BC à la différence AD - AB.
2° Les bissectrices des angles C et D se coupent en N. Comparer les triangles EMF et CND.
3° Comparer MN, en grandeur et en direction, aux côtés du parallélogramme.
55. Avec un même rayon on trace des arcs de cercles de centres A et B se coupant en I. Puis on trace le cercle de centre I passant par A et B, et les diamètres AE et BF de ce cercle. AF et BE coupent respectivement en D et C les deux premiers arcs.
1° Montrer que les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{BAF}$ sont droits.
2° Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
3° Comment faut-il choisir le rayon initial pour obtenir un carré ?
56. Soit un cercle de diamètre BC et un point A de ce cercle. On désigne par I et J les intersections du demi-cercle BAC avec les médiatrices de AC et AB.
1° Comparer les directions de ces médiatrices et des côtés de l'angle A.
2° Que représentent BI et CJ pour le triangle ABC ?
3° I' et J' étant diamétralement opposés à I et J, que représentent de même BI' et CJ' ?
57. Soit un triangle ABC rectangle en A. On mène la médiane AM et la hauteur AH (on supposera H entre B et M).
1° Comparer les angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{ACB}$ à l'angle $\widehat{ABC}$. Conséquences ?
2° Comparer ensuite les angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{CAM}$ et montrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{HAM}$ ont même bissectrice.
58. Un triangle ABC a ses sommets sur le cercle de diamètre BC. Soit D l'intersection du demi-cercle qui ne contient pas A avec la médiatrice de BC. On mène DE et DF perpendiculaires à AB et AC.
1° Comparer les segments DB et DC et les angles $\widehat{BDE}$ et $\widehat{CDF}$.
2° Comparer les triangles BDE et CDF. Conséquences pour DE et DF ?
3° Quelle est la nature du quadrilatère AEDF ? Montrer que AD est bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
59. Dans un triangle ABC rectangle en A, la médiatrice de BC coupe AC en D. Soit E le point symétrique de D par rapport à A.
1° Comparer les angles E et C du triangle EBC.
2° La médiane AM du triangle ABC coupe BE en F. Comparer EF et EA.
3° Comparer les segments BF et AC.

I. TRAPÈZE

63. Définition. Un trapèze est un quadrilatère convexe qui a deux côtés parallèles.
Ces deux côtés sont les bases, et les deux autres les côtés obliques.
Si le trapèze n'est pas un parallélogramme, les bases sont inégales et les côtés obliques ne sont pas parallèles. Il résulte de la définition que :
deux angles adjacents à un même côté oblique sont supplémentaires ; cette condition est suffisante pour qu'un quadrilatère soit un trapèze.

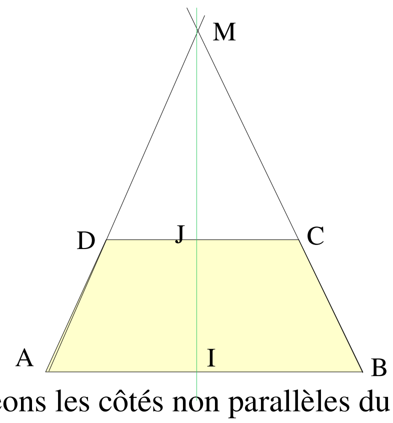
64. Trapèzes particuliers.
Un trapèze rectangle a un côté perpendiculaire aux bases, il a donc deux angles droits.
Un trapèze isocèle a des côtés non parallèles égaux.

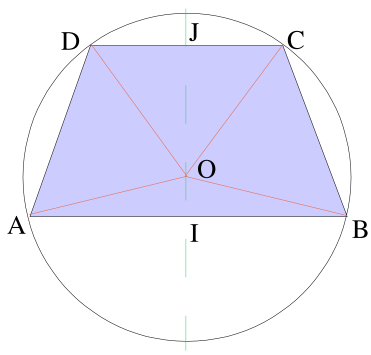




65. Théorème. Pour qu'un trapèze soit isocèle, il faut et il suffit que les angles adjacents à une même base soient égaux.
Dans le trapèze ABCD, terminons le parallélogramme BCDE. Nous avons BC = ED et $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$ comme correspondants.
1° L'égalité des côtés BC et AD entraîne celle de AD et ED. Le triangle DAE est isocèle et par suite $\widehat{BAD} = \widehat{AED} = \widehat{ABC}$. Les angles A et B du trapèze sont donc égaux. Il en est de même de leurs suppléments $\hat{C}$ et $\hat{D}$.
2° L'égalité des angles $\hat{C}$ et $\hat{D}$ (ou $\hat{A}$ et $\hat{B}$) du trapèze entraîne celle de $\widehat{DAE}$ et $\widehat{DEA}$. Le triangle DAE est donc isocèle, le côté AD est égal à ED et par suite à BC.

66. Axe de symétrie ; cercle circonscrit au trapèze isocèle.



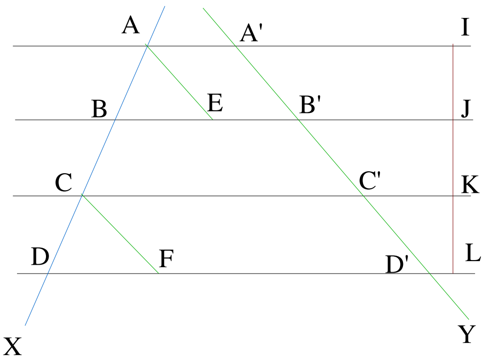


Prolongeons les côtés non parallèles du trapèze ABCD jusqu'en M. Les triangles MAB et MCD ont

des angles à la base égaux : ils sont isocèles. La bissectrice de l'angle M est médiatrice de AB et CD et par suite axe de symétrie du trapèze isocèle.
La médiatrice du côté oblique BC coupe cet axe en un point O. Donc OA = OB = OC, et OC = OD, le point O est équidistant des quatre sommets. C'est le centre du cercle circonscrit au trapèze isocèle.

II. PARALLÈLES ÉQUIDISTANTES.

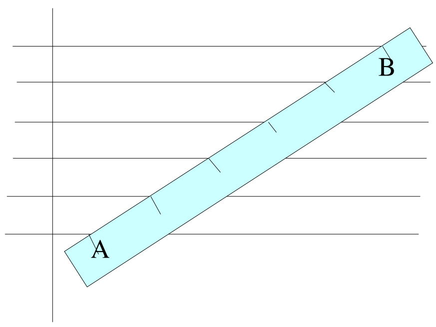
67. Théorème. Lorsque des parallèles déterminent des segments égaux sur une première sécante, elles déterminent des segments correspondants égaux sur toute autre sécante.



Soient deux segments égaux AB et CD déterminés par des parallèles sur la sécante X. Pour comparer les segments correspondants A'B' et C'D' déterminés sur Y, remplaçons-les par les segments parallèles AE et CF. Nous avons AE = A'B' et CF = C'D' comme côtés opposés de parallélogrammes. Les deux triangles ABE et CDF ont AB = CD, les angles A et C égaux comme correspondants et de même B = D. Ils sont donc égaux (1er cas). AE et CF sont, par suite, égaux, et par conséquent A'B' = C'D'.

68. Parallèles équidistantes.
Si tous les segments consécutifs déterminés sur la première sécante sont égaux, il en est de même des segments déterminés sur une sécante perpendiculaire à ces parallèles, qui sont donc équidistantes. Il en est ainsi des lignes d'une feuille de papier réglé ou de celles d'un guide-lignes.
Remarque. La propriété précédente montre que les bandes consécutives définies par des parallèles équidistantes sont égales et déterminent des segments égaux sur toute sécante.

III. APPLICATIONS

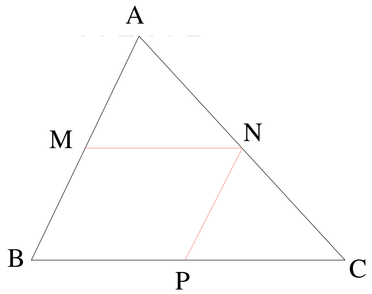


69. Partage d'un segment en parties égales.
Soit à partager un segment AB en cinq parties égales.
Portons à partir de A sur une demi-droite auxiliaire cinq segments consécutifs égaux. Joignons l'extrémité C du dernier au point B et par les points de division de AC menons les parallèles à BC. Ces parallèles sont équidistantes. Elles partagent donc AB en cinq segments égaux. On peut aussi

reporter AB sur le bord d'une bande de papier et placer cette bande sur du papier réglé de façon à intercaler cinq intervalles entre A et B.

70. Droite des milieux des côtés dans un triangle.

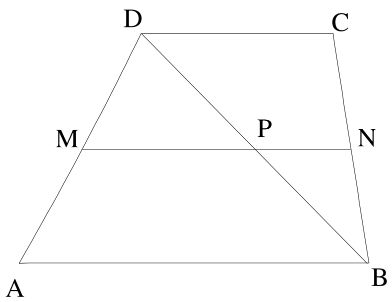
Théorème. Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égal à sa moitié.



Soient un triangle ABC et M, N, P les milieux des côtés AB, AC et BC. Par M menons la parallèle à BC. D'après la construction précédente, cette parallèle passe par N. Autrement dit, MN est parallèle à BC. De même NP est parallèle à AB. Dans le parallélogramme MNPB, nous avons MN = BP,
soit MN = 1/2 BC.

71. Base moyenne d'un trapèze.

Théorème. Le segment qui joint les milieux des côtés obliques d'un trapèze est parallèle aux bases et égal à leur demi-somme.



Menons dans le trapèze ABCD la parallèle aux bases passant par le milieu M de AD. Elle passe par le milieu P de BD et le milieu N de BC. autrement dit MN est parallèle aux bases.
D'autre part, d'après le théorème précédent,

MP = 1/2 AB et PN = 1/2 CD

Par suite, MN = MP + PN = 1/2 AB + 1/2 CD , ou

$$MN = \frac{(AB+CD)}{2}$$

EXERCICES

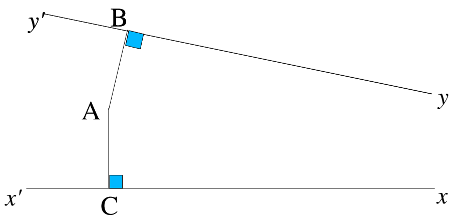
60. Soient dans un cercle de centre O, deux arcs égaux et de même sens AB et CD.
1° Montrer que les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$ ont même bissectrice. Comparer les directions de AD et BC.
2° Comparer les triangles AOB et COD. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
61. Soit un trapèze isocèle ABCD de bases AB et CD.
1° Comparer les triangles ABC et BAD. Conséquences ?
2° Montrer que les diagonales AC et BD sont égales et qu'elles forment des angles égaux avec chacune des bases et avec les côtés non parallèles.
62. Dans un trapèze rectangle la base AB est double de CD et égale au côté oblique BC.
1° Montrer que AC = BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2° Evaluer les angles du trapèze.
63. Dans un trapèze isocèle ABCD, la petite base CD est égale aux côtés obliques AD et BC.

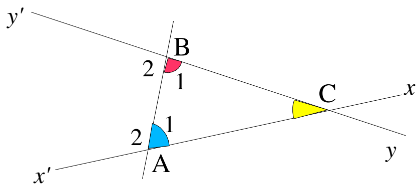
1° Montrer que la diagonale AC est bissectrice de l'angle A.
2° Calculer les angles du trapèze en supposant AC = AB.
3° Même calcul en supposant AC perpendiculaire à BC.
64. Dans le quadrilatère convexe ABCD les côtés AB et CD sont parallèles et les côtés AD et BC sont égaux. On mène les segments AE et BF perpendiculaires à CD.
1° Comparer les triangles ADE et BCF.
2° Quelle est la nature du quadrilatère ABCD suivant que CF et DE sont de même sens ou de sens contraires ?
65. Soit un triangle ABC. On désigne par M le milieu de BC et par D et E les points qui divisent AB en trois segments égaux : AD, DE et EB. Le segment DC coupe AM en I.
1° Comparer EM et DC puis DI et EM.
2° Que représente le point I pour le segment AM et pour le segment DC ?
66. Soient ABC un triangle et DE le segment qui joint les milieux des côtés AB et AC. Montrer que la médiane AM du triangle ABC et le segment ED se coupent en leur milieu.
67. Soient M et N les milieux des côtés BC et AB d'un triangle ABC. On mène par C et M les perpendiculaires à la bissectrice intérieure de l'angle A. Ces perpendiculaires coupent AB en D et P.
1° Montrer que ADC est isocèle et que AD = AC.
2° Montrer que AP = $\frac{(AB+AD)}{2}$ et comparer NP et AC.
68. Soient X et Y deux parallèles coupées en A et B par une sécante. Soit O le milieu de AB. On mène les bissectrices de chacun des angles formés en A et B.
1° Montrer que ces bissectrices se coupent en M et N sur la parallèle à X et Y équidistante de ces droites.
2° Montrer que O est le milieu de MN et que OM = ON = $\frac{AB}{2}$.
69. Dans un parallélogramme on mène les bissectrices intérieures (ou extérieures).
1° Montrer qu'elles forment un rectangle.
2° Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour comparer la longueur et la direction de ses diagonales aux côtés du parallélogramme.
3° Dans quel cas obtient-on un carré ?
70. On joint les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère ABCD.
1° Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ obtenu ? Comparer la longueur et la direction de ses côtés à celles des diagonales AC et BD.
2° A quelles conditions obtient-on un rectangle, un losange, un carré ?
3° Montrer que le segment RS qui joint les milieux de AC et BD a même milieu que MP et NQ.
71. Soit un trapèze ABCD. On désigne par M et N les milieux des côtés non parallèles, P et Q les milieux des bases, et R et S les milieux des diagonales.
1° Montrer que RS est porté par la base moyenne MN, qu'il a le même milieu qu'elle, et que RS est égal à la demi-différence des bases.
2° On suppose le trapèze isocèle. Montrer que les deux quadrilatères MNPQ et PQRS sont des losanges.

72. Soit un quadrilatère qui admet un axe de symétrie.
1° Montrer que si deux sommets consécutifs sont symétriques ce quadrilatère est un trapèze isocèle convexe ou croisé.
2° Montrer que si deux sommets opposés sont symétriques la diagonale qui les joint admet l'autre diagonale pour médiatrice. Etudier les formes possibles de ce quadrilatère, convexe ou concave.

DROITES CONCOURANTES DANS UN TRIANGLE

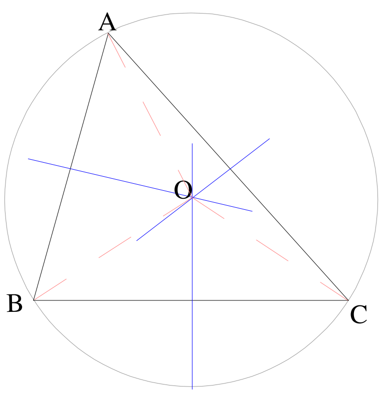
72. Théorème. Lorsque deux droites sont respectivement perpendiculaires à deux droites concourantes, elles sont elles-mêmes concourantes.
Soient les droites x'x et y'y perpendiculaires aux côtés de l'angle BAC. Ces droites ne peuvent être parallèles sans que les trois points A, B, C soient sur une même droite perpendiculaire à leur direction commune. Comme ce n'est pas le cas, x'x et y'y sont concourantes.





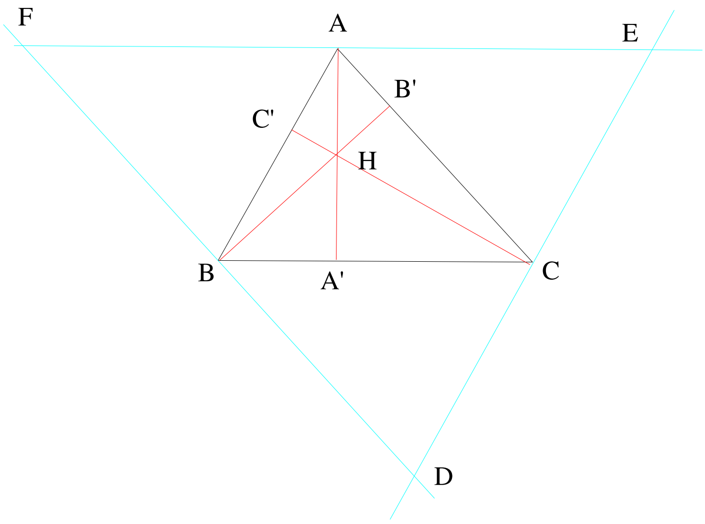
73. Théorème. Pour que deux demi-droites soient concourantes, il faut et il suffit qu'elles forment, avec la droite qui joint leurs origines, deux angles intérieurs du même côté ayant une somme inférieure à deux droits.
Soient x'x et y'y deux droites coupées par la sécante AB.
1° Si Ax et By se coupent en C, nous avons $\widehat{A1} + \widehat{B1} = 2\text{ D} - \hat{C}$ et par suite $\widehat{A1} + \widehat{B1} < 2\text{ D}$.
2° Si nous supposons $\widehat{A1} + \widehat{B1} < 2\text{ D}$, les deux droites x'x et y'y ne sont pas parallèles, et par suite concourantes. Comme la somme des angles intérieurs en A et en B est égale à 4 D, nous avons $\widehat{A2} + \widehat{B2} > 2\text{ D}$. Les demi-droites Ax' et By' ne peuvent se couper d'après le 1°, ce sont donc Ax et By qui sont concourantes.

74. Médiatrices.



Considérons dans le triangle ABC les médiatrices des côtés AB et AC. Ces médiatrices sont perpendiculaires aux côtés de l'angle A et se coupent donc en un point O. Ce point, étant sur la médiatrice de AB, est équidistant de A et B : OA = OB. Etant sur la médiatrice de AC, il est équidistant de A et C : OA= OC.
Il en résulte que OA = OB = OC.
Le point O étant équidistant de B et C, est sur la médiatrice de BC, qui passe donc par O.
Théorème. Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours O est le centre du cercle circonscrit au triangle.

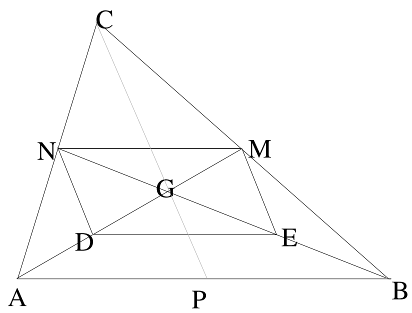
75. Hauteurs.



Menons par les trois sommets du triangle ABC les parallèles aux côtés opposés. Nous obtenons un triangle DEF. Dans les parallélogrammes BCAF et BCEA nous avons BC = FA et BC = AE, par suite FA = AE. La hauteur AA' perpendiculaire à BC est aussi perpendiculaire à EF, en son milieu : AA' est médiatrice de EF.
De même BB' et CC' sont les médiatrices de FD et ED, elles sont concourantes dans le triangle DEF. Les hauteurs du triangle ABC sont donc concourantes.

Théorème. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Le point H commun aux trois hauteurs est l'orthocentre du triangle.

76. Médianes.

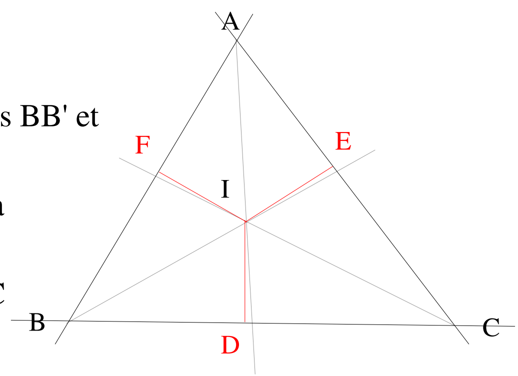


Considérons dans le triangle ABC, les médianes AM et BN. Les points A et M étant de part et d'autre de BN, ces deux médianes se coupent en un point G situé à l'intérieur du triangle.
Le segment MN est parallèle à BA et égal à sa moitié. Le segment DE qui joint les milieux de GA et GB est lui aussi parallèle à BA et égal à sa moitié. MN et DE sont donc égaux et parallèles, et le quadrilatère MNDE est un parallélogramme de centre G.

Il en résulte que MG = GD = DA. La médiane BN coupe donc AM au point G situé au point G situé au tiers de MA à partir de M. Il en est de même de la médiane CP, qui passe donc aussi par G.
Théorème. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Le point de concours G qui se nomme le centre de gravité du triangle, est situé au tiers de chaque médiane à partir du côté correspondant.

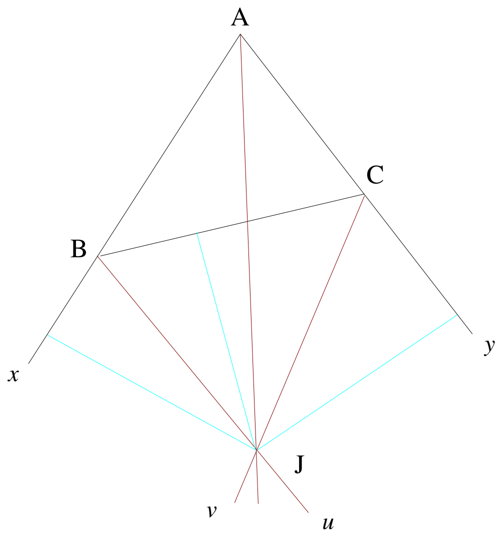
77. Bissectrices intérieures.

Considérons dans le triangle ABC, les bissectrices intérieures BB' et CC'. B et B' étant situés de part et d'autre de CC', ces deux bissectrices se rencontrent en un point I situé, entre B et B', à l'intérieur du triangle.
Le point I, étant sur la bissectrice de B, est équidistant de BC et BA, d'où ID = IF. Etant sur la bissectrice de C, il est équidistant de CB et CA, d'où ID = IE. Il en résulte que ID =

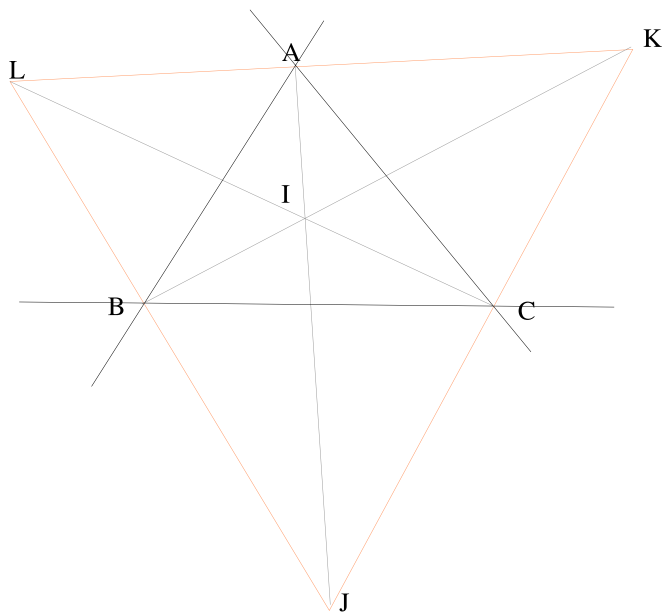


IE = IF. Le point I étant équidistant de AB et AC, se trouve sur la bissectrice intérieure de l'angle A. Théorème. Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes. Le point de concours est équidistant des trois côtés du triangle.

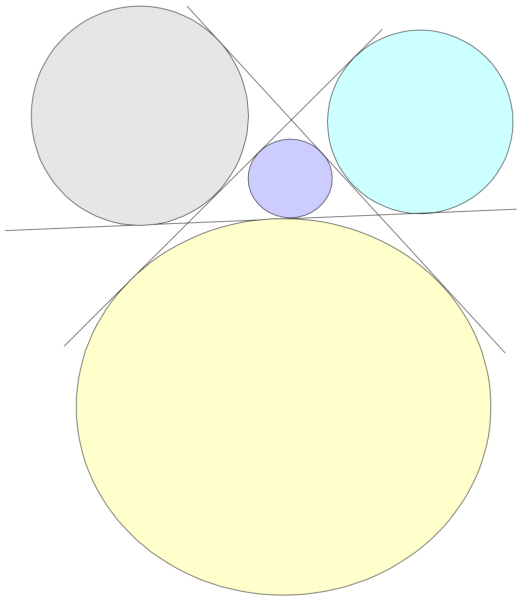
78. Bissectrices extérieures. Considérons dans le triangle ABC les bissectrices Bu et Cv des angles extérieurs en B et C. Les angles formés avec BC sont aigus car ce sont des moitiés d'angles



saillants. Leur somme est inférieure à 2 D. Les demi-droites Bu et Cv se coupent, en un point J de la portion de plan xBCy intérieure à l'angle xAy. En raisonnant comme précédemment, nous voyons que ce point J est équidistant de BC, Ax et By, et se trouve sur la bissectrice intérieure de A. D'où : Les bissectrices extérieures de deux angles et la bissectrice intérieure du troisième angle sont concourantes.



Nous obtiendrions de même les points K et L sur les bissectrices intérieures des angles B et C. Il existe ainsi quatre points I, J, K, L équidistants des trois côtés d'un triangle.



EXERCICES

73. Soit D l'orthocentre du triangle ABC. Quel est l'orthocentre de chacun des triangles BCD, CDA, et DAB ?

74. Dans un triangle ABC le cercle de diamètre BC recoupe les côtés AC et AB en E et F.

1° Evaluer les angles BEC et CBF.

2° BE et CF se coupent en H. Montrer que AH est perpendiculaire à BC.

75. Soit un cercle de centre O. On considère les milieux M, N, P des cordes BC, CA et AB.

1° Quel est l'orthocentre du triangle MNP ?

2° Montrer que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

76. Soit un parallélogramme ABCD et un point M extérieur.

1° Montrer que les triangles MAC et MBD ont en commun la médiane issue de M.

2° Que peut-on dire de leurs centres de gravité ?

77. Trois cercles égaux passent par un même point A et se recoupent en B, C, D. Soient M, N, P les points diamétralement opposés à A.

1° Montrer que B, C, D sont les milieux des côtés du triangle MNP.

2° Que représente le point A pour chacun des triangles MNP et BCD ?

3° Comparer le cercle circonscrit à BCD avec les trois cercles initiaux.

78. Soit un triangle ABC dont les sommets sont sur un cercle de centre O. on appelle D le point diamétralement opposé au point A, H l'orthocentre de ABC et G son centre de gravité.

1° Montrer que les segments BC et HD ont même milieu.

2° Montrer que les triangles ABC et AHD ont la médiane issue de A commune. En déduire que G est le centre de gravité de AHD.

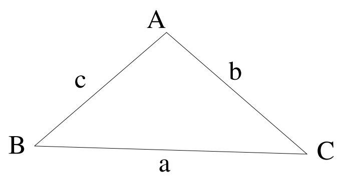
3° Quelle est la position de G par rapport à H et O ?

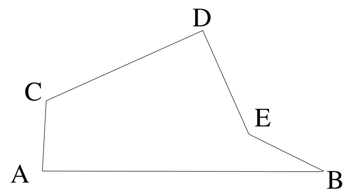
79. Soit un triangle ABC dont l'orthocentre est H. On désigne par M, N, P les milieux des côtés BC,

CA, AB, et par D, E, F les milieux de HA, HB, HC.
1° Montrer que les trois segments MD, NE et PF sont égaux et ont le même milieu.
2° On trace le cercle de diamètre MD. Montrer qu'il passe par le pied A' de la hauteur issue de A.
3° Compter le nombre de points remarquables situés sur le cercle précédent. (Cercle des 9 points du triangle).
80. Soit un quadrilatère convexe ABCD dans lequel $\hat{A} = \hat{C} = 1$ D et $\hat{B} > 1$ D. On construit les symétriques de AC par rapport à AB et BC qui se coupent en E.
1° Montrer que BD est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AEC}$.
2° AB et CD se coupent en F et AD et BC se coupent en G. Montrer que FG est perpendiculaire en E à BD.
81. Soit D le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On prend les symétriques M et N de D par rapport à AB et AC. MN coupe AB en F et AC en E.
1° Que représentent AB, AC et AD pour le triangle DEF ?
2° Montrer que AD, BE et CF sont concourantes. Que représente le point de concours pour chacun des triangles ABC et DEF ?
82. On prolonge la médiane AM d'un triangle ABC d'une longueur MD égale au tiers de AM. Soit d'autre part G le centre de gravité de ABC.
1° Comparer les côtés du triangle BGD aux médianes du triangle ABC.
2° Comparer les médianes de BGD aux côtés du triangle ABC.
83. Soit un quadrilatère convexe ABCD. On désigne par M et N les milieux de AB et CD, par G le centre de gravité de ABC, et par E le milieu de DG.
1° Comparer EN à CG et à MG.
2° Quelle est la position du milieu I de MN par rapport à D et à G ?
3° Y a-t-il d'autres segments analogues à MN ou DG passant par I ?

INÉGALITÉS DANS LE TRIANGLE

79. Convention. Soit un triangle ABC ; nous conviendrons dans ce qui suit, de désigner par a, b, c les mesures des côtés du triangle respectivement opposées à A, B, C.





80. Théorème. Nous admettrons sans démonstration le théorème suivant : Un segment de droite est plus court que toute ligne brisée ayant mêmes extrémités.[2]
Ainsi on a :

$$AB < AC + CD + DE + EB$$

81. Théorème. Dans un triangle, un côté quelconque est inférieur à la somme des deux autres.
Appliquons le théorème précédent au triangle ABC : nous avons BC < BA + AC, soit

$$a < b + c$$

On démontrerait de même que $b < a + c$ et $c < b + a$.

82. Corollaire. Dans un triangle, un côté quelconque est supérieur à la différence des deux autres.
Supposons que dans le triangle ABC on ait $a > b > c$.
D'après le théorème précédent, on a :

$$a + c > b$$

Retranchons c aux deux membres de cette inégalité, nous obtenons :

$$a > b - c$$

De même, en retranchant c ou b aux deux membres de l'inégalité $b + c > a$, nous obtenons :

$$b > a - c \quad \text{et} \quad c > a - b$$

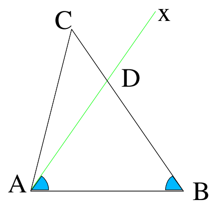
En définitive : dans un triangle, un côté quelconque est compris entre la somme et la différence des deux autres côtés :

$$b - c < a < b + c$$

83. Théorème. Lorsqu'un triangle a deux angles inégaux, les côtés opposés à ces angles sont inégaux, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.
Hypothèse : $\widehat{A} > \widehat{B}$
Conclusion : $a > b$.
Soit le triangle ABC dans lequel on a : $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$.

2 La présent éditrice signale que cette propriété et la suivante sont dans la théorie actuelle présentées comme l'axiome de l'inégalité triangulaire, et s'étonne que les auteurs de ce livre, si attentifs d'ordinaire à la distinction des axiomes et des théorèmes, qualifient ainsi l'inégalité triangulaire.

Construisons un angle $\widehat{BAx}$ égal à l'angle $\widehat{B}$, de façon que la demi-droite Ax soit à l'intérieur de l'angle $\widehat{A}$, ce qui est possible d'après l'hypothèse. Ax coupe donc BC en un point D situé entre B et C. D'autre part, ABD est isocèle, on a AD = DB.



Dans le triangle ACD, nous avons

$$AC < AD + DC$$

soit $AC < BD + DC$

ou $b < a$

Il en résulte que les côtés d'un triangle sont dans le même ordre de grandeur que les angles qui leur sont opposés.

Les inégalités $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$

entraînent les suivantes : $a > b > c$.

84. Réciproque. Lorsqu'un triangle a deux côtés inégaux, les angles opposés à ces côtés sont inégaux ; au plus grand côté est opposé le plus grand angle.

Hypothèse : $a > b$.

Conclusion : $\widehat{A} > \widehat{B}$

Dans le triangle ABC on a : $b > c$.

Supposons $\widehat{B} = \widehat{C}$, on aurait $b = c$,

supposons $\widehat{B} < \widehat{C}$, on aurait $b < c$,

supposons $\widehat{B} > \widehat{C}$, on a $b > c$.

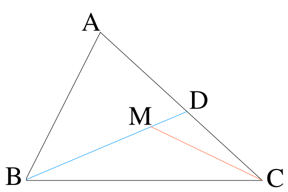
Ainsi à l'inégalité $b > c$, ne peut correspondre que l'inégalité $\widehat{B} > \widehat{C}$, car nous avons fait toutes les suppositions possibles sur l'ordre de grandeur de ces deux angles.

Il en résulte que les angles d'un triangle sont dans le même ordre de grandeur que les côtés opposés à ces angles :

les inégalités $a > b > c$

entraînent les suivantes : $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$.

85. Théorème. La somme des segments qui joignent un point intérieur à un triangle aux deux extrémités d'un côté est inférieure à la somme des deux autres côtés.



Hypothèse :

M intérieur à ABC

Conclusion :

$MB + MC < AB + AC$

M étant intérieur au triangle ABC, la demi-droite BM est intérieure à l'angle B et coupe AC en un point D situé entre A et C. D'autre part, M est entre B et D.

Dans le triangle BAD, on a : $BM + MD < BA + AD$

Dans le triangle MDC, on a : $MC - MD < DC$

Ajoutons ces inégalités membre à membre, il vient :

$BM + MC < BA + AD + DC$, soit $BM + MC < BA + AC$

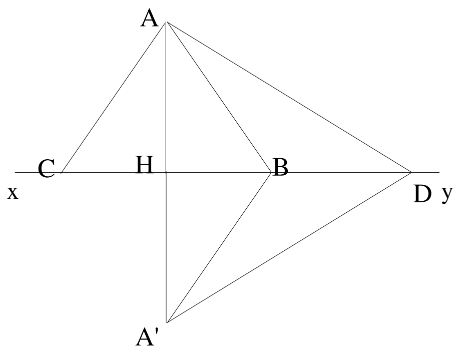
EXERCICES

84. On donne un point M intérieur au triangle ABC.
1° Montrer que MA + MB est compris entre AB et CA + AB.
2° En déduire que MA + MB + MC est compris entre le demi-périmètre et le périmètre du triangle.
85. Soit O le point d'intersection des diagonales du quadrilatère convexe ABCD.
1° Montrer que chaque diagonale est inférieure au demi-périmètre du quadrilatère.
2° Montrer que AC + BD est supérieure à chacune des sommes AB + CD et AD + BC.
3° En déduire que la somme des diagonales est comprise entre le demi-périmètre et le périmètre du quadrilatère.
86. Démontrer que la médiane AM d'un triangle ABC est comprise entre la demi-différence et la demi-somme des côtés AB et AC. (on prolongera AM d'une longueur égale à elle-même).
87. Soit un point A et un cercle de centre O. Le diamètre passant par A coupe le cercle en B et C. Soit M un point quelconque du cercle.
1° Comparer AM à la somme et à la différence entre OA et OM.
2° Montrer que AM est compris entre AB et AC.
88. Deux points A et B sont d'un même côté d'une droite xy. Trouver sur cette droite un point M tel que la somme AM + MB soit la plus petite possible (on utilisera le symétrique A' de A par rapport à xy).
89. Deux points A et B sont de part et d'autre d'une droite xy. Trouver sur cette droite un point M tel que la différence des distances MA et MB soit la plus grande possible.
90. On donne un angle xOy inférieur à 60° et deux points A et B intérieurs à cet angle. Trouver un point M sur Ox et un point N sur Oy tels que la longueur de la ligne brisée AMNB soit la plus petite possible.
91. On considère un triangle ABC et la bissectrice extérieure de l'angle A.
1° Montrer que le symétrique C' de C par rapport à cette bissectrice se trouve sur BA et que AC' = AC.
2° Démontrer que pour tout point M de la bissectrice on a : MB + MC > AB + AC.
92. On considère un triangle ABC et la bissectrice intérieure de l'angle A.
1° Montrer que le symétrique C' de C par rapport à cette bissectrice se trouve sur BA et que AC' = AC.
2° Démontrer que pour tout point M de la bissectrice on a : MB - MC < AB - AC.
93. Soit un triangle ABC et G son centre de gravité.
1° Comparer GA + GB + GC au demi-périmètre du triangle.
2° En déduire que la somme des médianes d'un triangle est supérieure aux trois quarts du périmètre.

I. PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES

86. Définition. Rappelons que, d'un point A situé hors d'une droite xy, on peut mener une seule perpendiculaire à cette droite. Toute autre droite passant par A et coupant xy se nomme oblique par rapport à xy.

87. Théorème. Si, d'un point situé hors d'une droite on mène à cette droite la perpendiculaire et diverses obliques :
1° La perpendiculaire est plus courte que toute oblique.
2° Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales, et réciproquement deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire.
3° De deux obliques, celle qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire est la plus longue, et réciproquement, si deux obliques sont inégales, c'est la plus longue qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.



1° Soit AH la perpendiculaire menée de A sur xy et AB une oblique quelconque. Prolongeons AH d'une longueur HA' égale à AH. Le triangle ABA' est isocèle car B appartient à la médiatrice xy de AA'. Nous avons

$AA' < AB + BA'$
ou $2\ AH < 2\ AB$
soit $AH < AB$

2° Considérons les obliques AB et AC, telles que HB = HC, nous disons qu'elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire. AH est médiatrice du segment BC, donc
AB = AC.
Réciproquement, si AB = AC, la hauteur AH du triangle isocèle ABC est aussi médiane ;
donc HB = HC.

3° Considérons les obliques AD et AB qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire et supposons HD > HB. Le point B est intérieur au triangle ADA', on a donc

$$AB + BA' < AD + DA'$$

Les triangles ABA' et ADA' sont isocèles puisque B et D appartiennent à la médiatrice de AA' ; l'inégalité précédente devient

$$2\ AB < 2\ AD,$$

soit

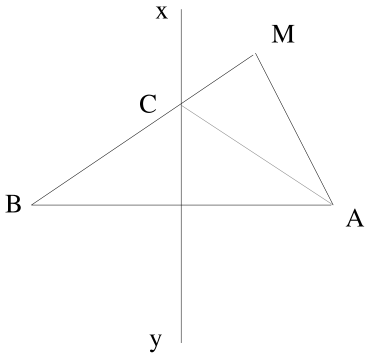
$$AB < AD$$

Réciproquement, supposons AD > AB, et montrons qu'on doit avoir HD > HB. En effet, si HD = HB, il faut AB = AD, ce qui est contraire à l'hypothèse. Si HD < HB, il faut AD < AB, ce qui est aussi contraire à l'hypothèse. On a donc HD > HB.
Remarque : pour comparer les obliques AC et AD, on peut remplacer AC par AB qui lui est égale.

88. Corollaire. Il résulte de la première partie de ce théorème que :
Dans un triangle rectangle un côté de l'angle droit est inférieur à l'hypoténuse.
Dans le triangle ABH, on a AH < AB.
Cela résulte aussi de de que les angles non droits d'un triangle rectangle étant aigus, le côté opposé à l'angle droit est le plus grand.

II. RÉGIONS SÉPARÉES PAR LA MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

89. Soit un segment AB et la médiatrice xy de ce segment. Elle sépare le plan en deux demi-plans I et II qui contiennent l'un le point A, l'autre le point B.
1° Pour tout point de la région I, on a MA < MB.



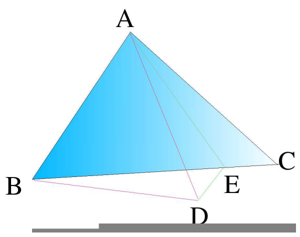
M étant dans le demi-plan qui contient A, MB coupe xy en C, et on a CA = CB. Dans le triangle CMA, on a

$$MA < AC + CM$$
$$MA < BC + CM$$
$$MA < MB$$

On démontrerait de même que pour tout point de la région II, on a MB < MA.
Réciproquement, si MA < MB, le point M est dans la région I.
M ne peut pas être sur xy, sans quoi on aurait MA = MB
M ne peut pas être dans la région II, puisqu'on aurait MA > MB.
Il est donc dans la région I.
On démontrerait de même que si MB < MA, M est dans la région II.
Conclusion. La condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait MA < MB, est que le point M soit du même côté que le point A par rapport à la médiatrice de AB.

III. TRIANGLES AYANT DEUX CÔTÉS ÉGAUX

90. Théorème. Si deux triangles ont deux côtés respectivement égaux et les angles compris entre ces côtés inégaux, les troisièmes côtés sont inégaux et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.



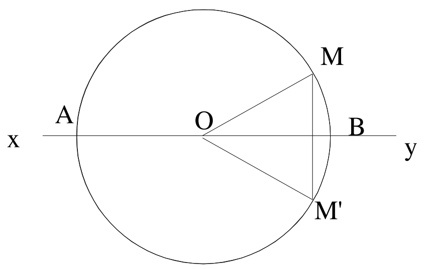
Soient deux triangles ABC et A'B'C' où l'on a AB = A'B', AC = A'C' et A > A'. Transportons A'B'C' en ABD, de façon que A'B' coïncide avec AB et que AD se place à l'intérieur de l'angle BAC, ce qui est possible puisque A' < A. On a donc AD = AC et BD = B'C'. Traçons la bissectrice de DAC, qui coupe BC en un point E situé entre B et C. Les triangles ADE et ACE ont AE commun, AD = AC et $\widehat{DAC} = \widehat{EAC}$, ils sont égaux (2e cas), donc DE = EC.
Dans le triangle BDE, on a :BD < BE + ED, soit BD < BE + EC, ou BD < BC
donc B'C' < BC

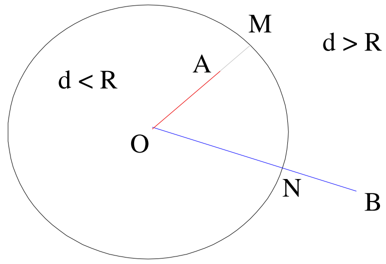
EXERCICES

94. Soit un triangle ABC rectangle en A, un point B' sur AB, un point C' sur AC. Comparer les segments B'C' et BC au segment B'C. En déduire que B'C' < BC.
95. Démontrer que dans un triangle rectangle la hauteur relative à l'hypoténuse est inférieure ou égale à la moitié de l'hypoténuse.
96. Soit un triangle ABC et la hauteur AH.
1° Comparer AH et AB, puis AH et AC. En déduire que AH est inférieure à la demi-somme des côtés AB et AC.
2° Montrer que la somme des hauteurs d'un triangle est inférieure à son périmètre.
97. Soit un triangle ABC rectangle en A. La bissectrice intérieure de B coupe AC en D et on mène DE perpendiculaire en E à BC.
1° Comparer AD et DE.
2° Démontrer l'inégalité AD < DC.
98. Soit un trapèze isocèle ABCD dont les bases sont AD et BC ; soit CH la perpendiculaire à AD. Montrer que AH est égale à la demi-somme des bases du trapèze , que DH est égale à leur demi-différence. En déduire :
1° Que la diagonale d'un trapèze isocèle est supérieure à la demi-somme des bases.
2° Que les côtés non parallèles sont supérieurs à la demi-différence des bases.
99. Soit un angle $\widehat{xOy}$, sa bissectrice Oz, un point M intérieur à l'angle $\widehat{zOy}$, MA et MB les perpendiculaires à Ox et Oy.
1° MA coupe Oz en C ; mener CD perpendiculaire à Oy ; comparer MB et MD puis MD et MA.
2° Démontrer l'inégalité MB < MA.
100. Démontrer que si deux triangles ont deux côtés respectivement égaux et les troisièmes inégaux, les angles opposés à ces côtés sont inégaux, et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.
101. Soit un triangle ABC dans lequel AB > AC ; soit AM la médiane issue de A ; démontrer l'inégalité $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).
102. Soit un angle $\widehat{xOy}$ et Oz sa bissectrice ; on porte deux longueurs égales OA et OB sur Ox et Oy. Montrer que pour tout point M intérieur à $\widehat{zOy}$, on a MA > MB.
103. Deux triangles isocèles OAB et PCD de bases AB et CD sont tels que OA = PC et $\widehat{AOB} > \widehat{CPD}$.
1° Comparer AB et CD.
2° Soient OH et PK les hauteurs des deux triangles. Comparer AH et CK. En déduire que si deux triangles rectangles ont même hypoténuse, les côtés de l'angle droit sont dans le même ordre de grandeur que les angles opposés.
104. Deux triangles isocèles OAB et PCD de bases AB et CD sont tels que OA = PC et AB > CD.
1° Comparer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{CPD}$.
2° Soient OH et PK les hauteurs des deux triangles. Comparer $\widehat{AOH}$ et $\widehat{CPK}$. En déduire que si deux triangles rectangles ont même hypoténuse les angles aigus sont dans le même ordre de grandeur que les côtés opposés.

CERCLE. DROITE ET CERCLE

91. Définitions. Rappelons les définitions suivantes :
Le cercle est une courbe plane formée par tous les points situés à une même distance d'un point du plan appelé centre du cercle.
Le segment OA qui joint le centre O à un point du cercle est un rayon. Toute droite passant par O coupe le cercle en deux points A et B. Le segment AB est un diamètre.





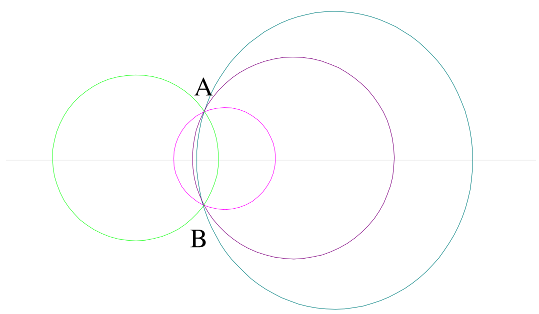
Si nous plions autour de AB, un point M du cercle vient se placer en M'. Comme on a OM = OM', M' est sur le cercle. Donc : Tout diamètre d'un cercle est un axe de symétrie pour ce cercle.

92.Positions relatives d'un point et d'un cercle.
Le cercle O partage le plan en deux régions ; celle qui contient le centre est dite intérieure au cercle ; l'autre est dite extérieure au cercle. Appelons R le rayon du cercle.
Soit un point A intérieur au cercle ; la demi-droite OA coupe le cercle en M et on a OA < OM ou OA < R.
Soit un point B extérieur au cercle ; la demi-droite OB coupe le cercle en N et on a OB > ON ou OB > R.
Soit d la distance d'un point au centre O. Nous obtenons le tableau suivant :

point intérieur au cercle	d < R
point du cercle	d = R
point extérieur au cercle	d > R

Il en résulte que si l'on a d < R, le point considéré ne peut être qu'intérieur au cercle, de même que si l'on a d > R, il ne peut être qu'extérieur. En définitive :
Pour qu'un point soit intérieur (ou extérieur) à un cercle, il faut et il suffit que sa distance au centre soit inférieure (ou supérieure) au rayon du cercle.

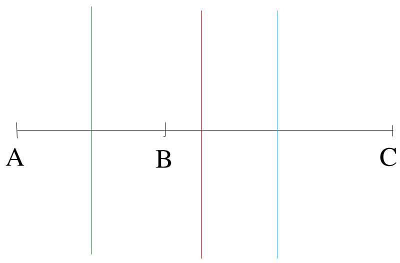
93. Cercles passant par deux points.
Pour qu'un cercle O passe par deux points donnés A et B, il faut que l'on ait OA = OB, c'est-à-dire que O appartienne à la médiatrice de AB. Lorsque cette condition est remplie, tout cercle de centre O passant par A passe aussi par B.



Il existe donc une infinité de cercles passant par deux points donnés.

94. Cercle passant par trois points.

Pour qu'un cercle O passe par trois points donnés A, B, C, il faut que l'on ait OA = OB = OC, le point O appartient donc aux médiatrices des segments AB, BC et AC.



1° Si A, B, C ne sont pas en ligne droite, ces médiatrices sont concourantes ; un seul cercle répond à la question (voir médiatrices dans un triangle).

2° Si A, B, C sont alignés, les médiatrices sont parallèles, il n'existe pas de cercle passant par A, B, C. Ainsi :

Par trois points non en ligne droite il passe un cercle et un seul.

Il en résulte que :

Une droite et un cercle ont au plus deux points communs : s'ils en avaient 3, il existerait un cercle passant par 3 points en ligne droite.

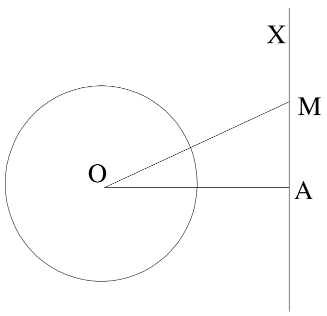
Deux cercles ont au plus deux points communs.

S'ils en avaient trois, ils seraient confondus.

POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

95. I. Droite extérieure.

Définition : une droite est extérieure à un cercle lorsque tous ses points sont extérieurs au cercle.



Théorème. Si la distance du centre d'un cercle à une droite est supérieure au rayon, cette droite est extérieure au cercle.

Considérons le cercle O et la droite X. Le diamètre perpendiculaire à X la coupe en A ; puisque OA > R, A est extérieur au cercle. Pour tout point M de X, on a OM > OA, donc OM > R. Tout point M de X est extérieur au cercle.

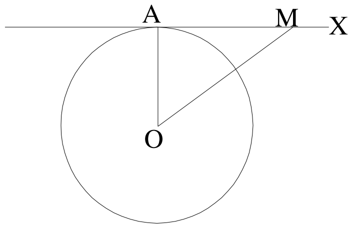
96.II. Tangente.

Définition : une droite est tangente à un cercle lorsqu'elle n'a avec lui qu'un point commun. Ce point est appelé point de contact de la tangente.

Théorème. Si la distance du centre d'un cercle à une droite est égale au rayon, cette droite est tangente au cercle.

Soit OA perpendiculaire à X ; A est sur le cercle ; pour tout autre point M de la droite X on a OM > OA, donc OM > R.

La droite X n'a donc qu'un point commun avec le cercle.

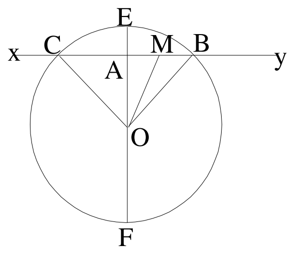


97. III. Sécante.

Définition. Une droite est sécante à un cercle lorsqu'elle le coupe en deux points.

Théorème. Si la distance du centre d'un cercle à une droite est inférieure au rayon, la droite est

sécante au cercle.
Soit OA perpendiculaire à xy. On a OA < R.
Lorsqu'un point M parcourt la demi-droite Ay, l'oblique OM augmente depuis la valeur OA < R jusqu'à une valeur aussi grande qu'on le veut.
Il existe donc un point B de cette demi-droite tel que OB = R : ce point est commun à la droite et au cercle ; il en existe de même un second C sur la demi-droite Ax. La droite et le cercle ont donc deux points communs et ne peuvent en avoir d'autre.



Le segment BC est une corde qui sous-tend les arcs BEC et BFC. Le diamètre OA étant un axe de symétrie pour la figure, les arcs BF et CF sont eux-mêmes symétriques par rapport à OA, donc égaux. Ainsi :
Tout diamètre perpendiculaire à une corde passe par le milieu de cette corde et par les milieux des arcs qu'elle sous-tend.

98. Conclusion. Nous avons obtenu les résultats suivants, en désignant par d la distance du centre à la droite D :

d > R	D extérieure au cercle
d = R	D tangente au cercle
d < R	D sécante au cercle

La lecture de ce tableau montre que les réciproques sont vraies. Ainsi, lorsqu'une droite est tangente à un cercle on doit avoir d = R car si on supposait d > R ou d < R, la droite serait soit extérieure soit sécante.
En définitive :
Pour qu'une droite soit extérieure, tangente ou sécante à un cercle, il faut et il suffit que sa distance au centre soit supérieure, égale ou inférieure au rayon.
En particulier : la propriété caractéristique de la tangente à un cercle est d'être perpendiculaire à un rayon en son extrémité.

EXERCICES

105. Construire un cercle de rayon 3 cm, tangent à une droite xy en un point A de cette droite.
106. Construire un cercle de centre donné, tangent à une droite donnée.
107. Construire un cercle de rayon donné, tangent à une droite donnée, sachant que son centre est sur une droite donnée ou sur un cercle donné.
108. Construire une tangente à un cercle, parallèle à une direction donnée.
109. Soit un triangle ABC, rectangle en A ; l'angle C vaut 60°, l'hypoténuse mesure 10 cm.
1° Quel doit être le rayon d'un cercle de centre C pour qu'il soit tangent à AB ou pour qu'il coupe AB ?
2° Entre quelles valeurs doit être compris le rayon du cercle pour qu'il coupe les deux autres côtés du triangle ?

110. Soit un triangle isocèle ABC de base BC et de hauteur AH.
1° Entre quelles valeurs doit être compris le rayon d'un cercle de centre A pour qu'il coupe le côté BC ?
2° Même question lorsque le triangle ABC est quelconque.
111. Soit un cercle et une droite extérieure D. Le diamètre perpendiculaire à D coupe le cercle en A et B et la droite D en H.
Montrer que la distance d'un point quelconque M du cercle à la droite D est comprise entre AH et BH.
112. Sur la tangente en A à un cercle O, on porte deux longueurs égales AB et AC. Comparer OB et OC.
113. Sur les tangentes en A et en B à un cercle O, on porte deux longueurs égales AA' et BB'. Comparer OA' et OB'.
114. Les tangentes en deux points A et B d'un cercle se coupent en C.
1° Comparer AC et BC.
2° Montrer que le diamètre passant par C est la bissectrice de $\widehat{ACB}$.
115. Soit un cercle de centre O et un diamètre AB ; une tangente quelconque coupe les tangentes en A et B en deux points C et D.
1° Montrer que CD = AC + BD.
2° Montrer que le triangle COD est rectangle.
116. Un quadrilatère ABCD convexe a ses côtés tangents à un cercle O. Montrer que AB + CD = AD + BC.
117. Démontrer que deux sécantes parallèles déterminent entre elles sur un cercle deux arcs égaux.

POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

99. Figure formée par deux cercles.

La figure formée par deux cercles est déterminée par la position des centres O et O', et par la valeur des deux rayons R et R'. Dans ce qui suit nous désignerons par d la distance OO' des centres et nous supposerons R > R'.

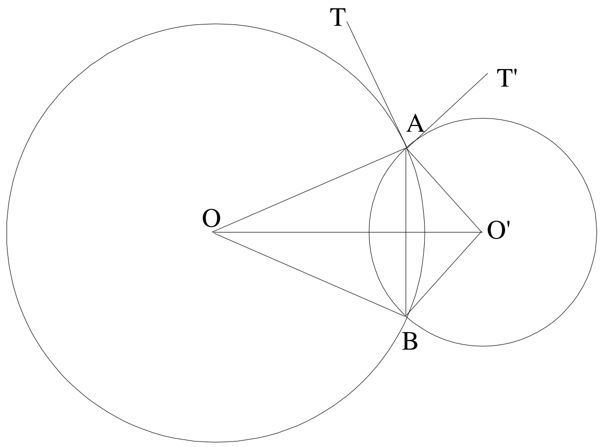
Notons aussi que, tout diamètre d'un cercle étant un axe de symétrie pour ce cercle, la droite des centres OO' est un axe de symétrie pour la figure formée par l'ensemble des cercles O et O'.

Nous avons vu que deux cercles ont au plus deux points communs. Le nombre des points communs à deux cercles peut donc être deux, un ou zéro. Nous allons étudier ces trois cas.

100. Cercles sécants.

Définition. Deux cercles sont sécants lorsqu'ils ont deux points communs.

Théorème. Lorsque deux cercles ont un point commun en dehors de la droite des centres, ils en ont un second symétrique du premier par rapport à la droite des centres, et n'ont pas d'autre point commun.



O et O' ont en commun le point A. Le symétrique B de A par rapport à OO' appartient aux deux cercles. Ces deux cercles se coupent donc en A et B, ils ne peuvent avoir d'autre point commun sans être confondus.

Le segment AB est la corde commune aux deux cercles. Il résulte des propriétés de la symétrie que OO' est médiatrice de AB et bissectrice des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AO'B}$.

L'angle aigu $\widehat{TAT'}$ des tangentes aux deux cercles au point A s'appelle l'angle des deux cercles.

On sait que tout côté d'un triangle est compris entre la différence et la somme des deux autres côtés. Dans le triangle OAO', on a donc

$$OA - O'A < OO' < OA + O'A$$

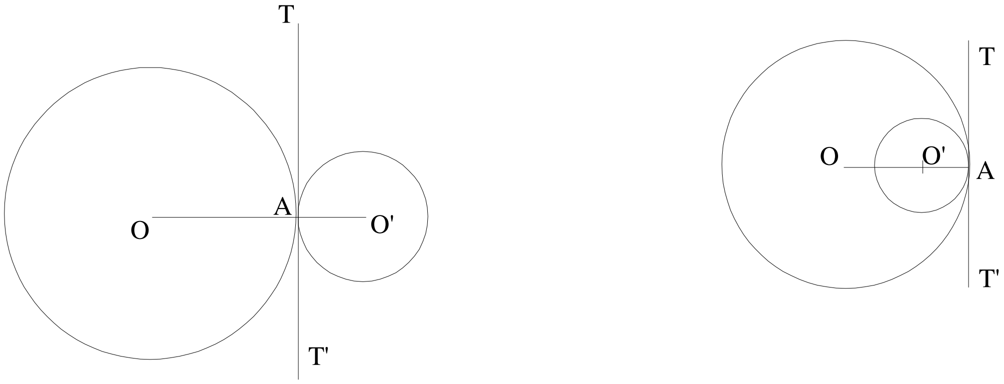
soit

$$R - R' < d < R + R'$$

101. II. Cercles tangents.

Définition. Deux cercles sont tangents lorsqu'ils ont un seul point commun.

Théorème. Lorsque deux cercles ont un point commun sur la droite des centres, ils n'ont pas d'autre point commun, et ils ont même tangente en ce point.



Considérons les cercles O et O' ci-dessus qui ont un point commun A sur la droite des centres. Ils ne peuvent avoir d'autre point commun B en dehors de OO', sans quoi ils en auraient un autre B' symétrique de B, et ils auraient trois points communs et seraient confondus.

Ils ne peuvent avoir un autre point commun sur OO', sans quoi ils auraient un diamètre commun et seraient confondus.

Les deux cercles O et O' sont donc tangents en A, et la tangente TT' en A aux deux cercles est la perpendiculaire menée en ce point à la droite des centres.

Dans le cas de la figure de gauche les cercles sont dits tangents extérieurement, on a :

$$OO' = OA + O'A$$

soit

$$d = R + R'$$

Dans le cas de la figure de droite, les cercles sont dits tangents intérieurement, on a :

$$OO' = OA - O'A$$

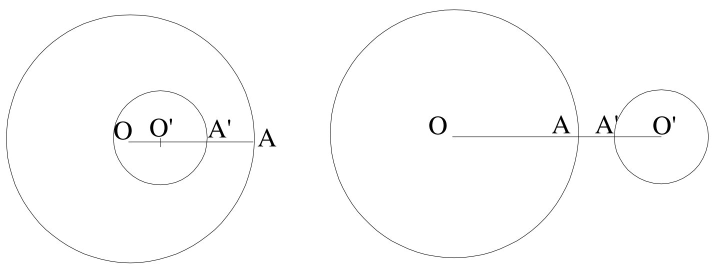
soit

$$d = R - R'$$

102. III. Cercles extérieurs. Cercles intérieurs.

Définitions. Deux cercles sont extérieurs lorsque tous les points de l'un sont extérieurs à l'autre.

Deux cercles sont intérieurs lorsque tous les points de l'un sont intérieurs à l'autre.[3]



3 La présente éditrice s'étonne de la parfaite similitude des deux phrases, alors que la situation n'est pas égale : deux cercles extérieurs le sont chacun à l'autre, la position est symétrique, mais pour les cercles dits intérieurs, le petit est intérieur au grand, et le grand est extérieur au petit.

Dans le cas des cercles extérieurs, on a :

$$OO' = OA + AA' + O'A'$$
$$\text{ou } d = R + R' + AA'$$
$$\text{donc } d > R + R'$$

Dans le cas des cercles intérieurs, on a :

$$OO' = OA - O'A' - AA'$$
$$\text{ou } d = R - R' - AA'$$
$$\text{donc } d < R - R'$$

103. Conclusion. En définitive, les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :

cercles extérieurs	$d > R + R'$
cercles tangents extérieurement	$d = R + R'$
cercles sécants	$R - R' < d < R + R'$
cercles tangents intérieurement	$d = R - R'$
cercles intérieurs	$d < R - R'$

Chacune de ces relations est caractéristique de la position correspondante des cercles O et O'. Ainsi si l'on a $d = R + R'$, les cercles sont tangents extérieurement. La lecture du tableau montre en effet qu'ils ne peuvent être ni extérieurs, ni sécants, etc.

La relation $d = R + R'$ exprime donc la condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles soient tangents extérieurement.

De même, pour que deux cercles soient sécants, il faut et il suffit que que la distance de leurs centres soit comprise entre la différence et la somme des rayons.

EXERCICES

118. Quelle est la position relative de deux cercles O et O', de rayons R et R', dans les cas suivants :
1° d = 7 cm, R = 6 cm, R' = 5 cm.
2° d = 41 mm, R = 57 mm, R' = 16 mm.
3° d = 12 cm, R = 4,5 cm, R' = 3,7 cm.
4° d = 2 cm, R = 9 cm, R' = 6 cm.
5° d = 25 mm, R = 13 mm, R' = 12 mm.

119. Quelle est la condition pour que deux cercles de même rayon R = 5 cm soient sécants ?

120. Quelle est la condition pour que deux cercles de rayons R = 10 cm et R' = 5 cm soient sécants ?

121. Construire un cercle de rayon donné, tangent à un cercle donné en un point donné.

122. Construire un cercle tangent à un cercle donné en un point donné, sachant que son centre est sur une droite donnée ou un cercle donné.

123. On connaît les points communs à deux cercles et leurs rayons. Construire ces cercles.

124. Construire un cercle de rayon donné, passant par un point donné et tangent à un cercle donné.

125. Deux cercles O et O' sont tangents en A ; une droite passant par A coupe ces cercles en B et B'. Montrer que les rayons OB et O'B' sont parallèles ; on examinera le cas des cercles tangents

extérieurement et tangents intérieurement.

126. Deux cercles sécants se coupent en A et B. Par A on mène la parallèle à la droite des centres OO', soient C et D les intersections avec les cercles.

1° Montrer que B, O et C sont alignés de même que B, O' et D.

2° Montrer que CD = 2 OO'.

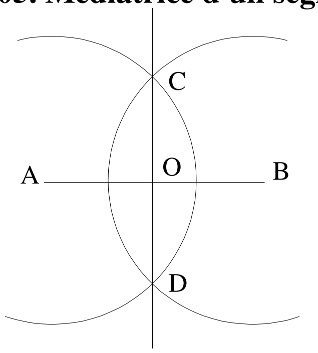
127. Construire un cercle tangent à un cercle O en un point donné A et passant par un point donné B.

128. Soit un cercle O, de rayon 5 cm, et une droite xy dont la distance à O est 7 cm. Construire un cercle de rayon 3 cm, tangent à la droite xy et au cercle O.

CONSTRUCTIONS FONDAMENTALES

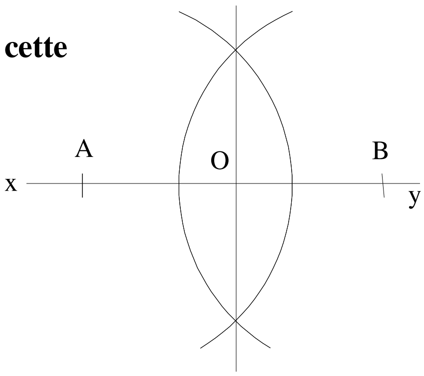
104. Remarques générales. Si la solution d'un problème de construction géométrique n'est pas immédiate, il faut opérer de la manière suivante :
1° Supposer la figure construite et en étudier les propriétés.
2° Déduire de cette étude la construction demandée et utiliser à cet effet seulement la règle et le compas.
3° Discuter le problème : c'est-à-dire se demander comment doivent être choisies les données pour que la construction soit possible.
Nous allons voir dans cette leçon les constructions élémentaires suivantes :

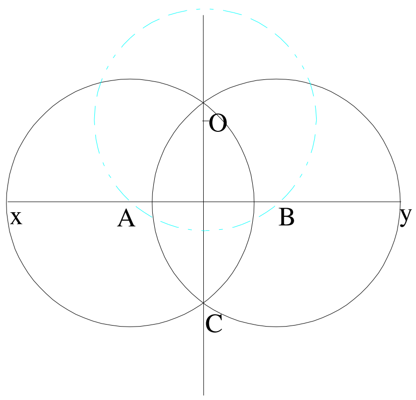
105. Médiatrice d'un segment.



Soit à construire la médiatrice du segment AB : il suffit d'en déterminer deux points, donc de construire deux triangles isocèles CAB et DAB de base AB.
Construction. Tracer de A et B comme centres deux cercles de même rayon.
Soient C et D leurs points communs. CD est la médiatrice cherchée.
Discussion. Les points C et D n'existent que si l'on a, R désignant la valeur commune des deux rayons,
$R - R < AB < R + R$.
La première inégalité est réalisée. la seconde donne $2R > AB$, soit $R > AB/2$.

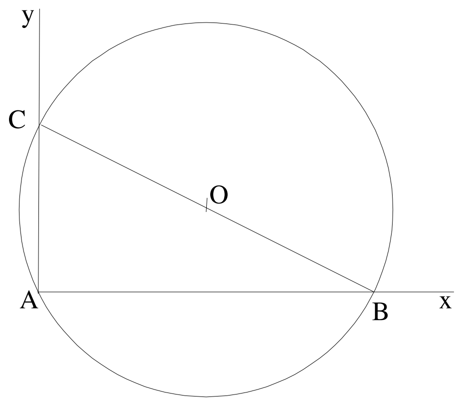
106. Construire la perpendiculaire à une droite en un point de cette droite.
Soit à construire la perpendiculaire en O à xy. Si nous pouvons trouver deux points A et B de xy tels que OA = OB, la médiatrice de AB est la perpendiculaire cherchée.
Construction. Tracer un cercle de centre O qui coupe xy en A et B, puis construire la médiatrice de AB.





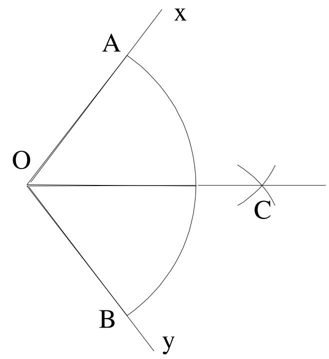
107. Construire la perpendiculaire à une droite en un point situé hors de la droite.
Soit à construire de O la perpendiculaire à xy. Si nous pouvons construire un triangle isocèle OAB, dont la base AB soit portée par xy, la médiatrice de AB est la perpendiculaire cherchée.
Construction. Construire un cercle de centre O qui coupe xy en A et B. Construire ensuite la médiatrice de AB.

108. Construction d'un angle droit.



Soit une demi-droite Ax. Pour construire l'angle droit $\widehat{xAy}$, la construction suivante est préférable à celle du n° 107, lorsqu'on ne peut prolonger Ax au-delà de A. D'un point O comme centre, tracer le cercle de rayon OA qui coupe Ax en B. Mener le diamètre BC. L'angle $\widehat{BAC}$ est l'angle cherché : on sait en effet qu'en joignant un point A d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, on obtient un angle droit.

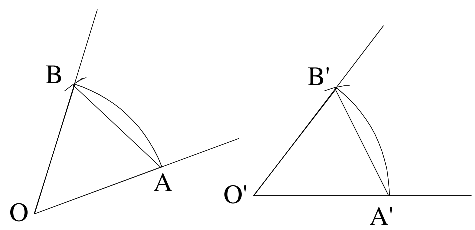
109. Bissectrice d'un angle.



Soit l'angle $\widehat{xOy}$. Si nous pouvons construire un triangle isocèle OAB dont les côtés égaux OA et OB soient portés par les demi-droites Ox et Oy, la médiatrice de AB est la bissectrice cherchée.
Construction. Construire un cercle de centre O qui coupe les côtés de l'angle en A et B ; construire ensuite la médiatrice de AB.

110. Construire un angle égal à un angle donné.

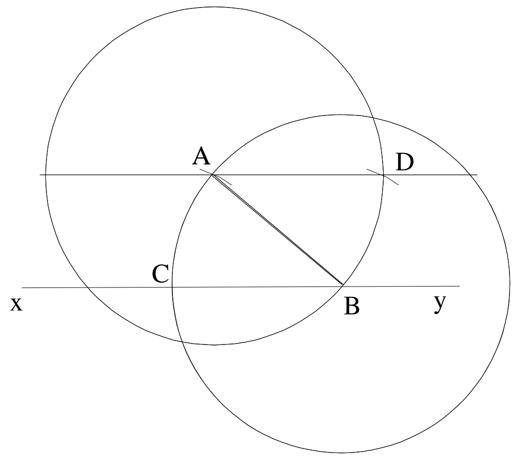
Soit à construire un angle égal à $\widehat{xOy}$. Donnons-nous l'un des côtés de l'angle cherché, soit O'x'. Nous allons construire deux triangles égaux tels que l'un contienne l'angle $\widehat{O}$ et l'autre l'angle $\widehat{O'}$ cherché.



Construction. Traçons deux cercles de centres O et O' et de même rayon. Le premier coupe les côtés de $\widehat{xOy}$ en A et B, le second coupe O'x' en A'. Puis mesurons AB avec le compas et traçons, de A' comme centre, un cercle de rayon égal à AB.
Il coupe le cercle de centre O', de rayon O'A', en B'.

Les deux triangles OAB et O'A'B' sont égaux d'après le 3e cas d'égalité des triangles. Donc $\widehat{AOB}$ = $\widehat{A'O'B'}$.

111. Tracé des parallèles.



Soit à mener par un point A la parallèle à la droite xy. Il suffit de mener une sécante AB et de construire en A l'angle $\widehat{BAv}$ égal à l'angle $\widehat{ABx}$. Ces deux angles égaux occupant la position d'alternes internes, uv et xy sont parallèles.
Construction. De A comme centre, tracer un arc de cercle coupant xy en B. De B comme centre, avec le même rayon, tracer l'arc AC. Puis avec CA comme rayon, et de B comme centre, tracer un arc qui coupe

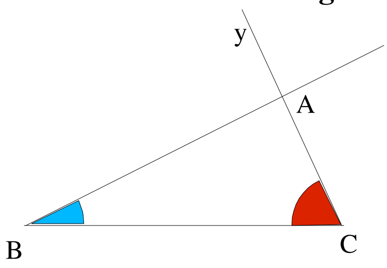
le premier arc tracé en D. La droite AD est parallèle à xy ; les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAD}$ sont égaux d'après la construction précédente.

EXERCICES

129. Construire le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC. On examinera les 3 cas suivants : 1° les 3 angles sont aigus, 2° l'angle A est droit, 3° l'angle A est obtus.
130. Construire un cercle passant par deux points donnés , sachant que son centre appartient à une droite donnée ou à un cercle donné.
131. Est-il possible de construire un cercle passant par 4 points donnés ? Construire tous les cercla passant par 3 de ces points.
132. Construire les hauteurs d'un triangle. Examiner les cas suivants : les 3 angles sont aigus, un angle est droit, un angle est obtus.
133. Partager un segment en 2, 4, 8 parties égales.
134. Partager un angle en 4, 8 angles égaux. Diviser un cercle en 4, 8 arcs égaux.
135. Deux segments AB et CD ont même médiatrice. Construire un cercle passant par les 4 points A, B, C, D.
136. Construire un parallélogramme ABCD sachant que A = 60°, AB = 5 cm et BC = 3 cm.
137. Construire un rectangle ABCD connaissant AB = 5 cm et AD = 3 cm.
138. Construire un losange ABCD connaissant AC = 8 cm et BD = 3 cm.
139. Construire un trapèze ABCD connaissant la base AB = 4 cm, $\widehat{BAD}$ = 60°, $\widehat{ABC}$ = 45° et sachant que la hauteur mesure 1,5 cm.

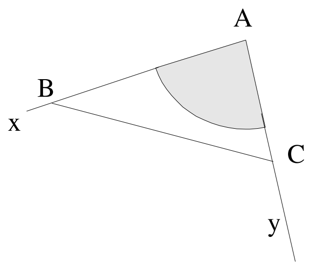
CONSTRUCTION DE TRIANGLES

112. Construire un triangle connaissant un côté et les deux angles adjacents à ce côté.



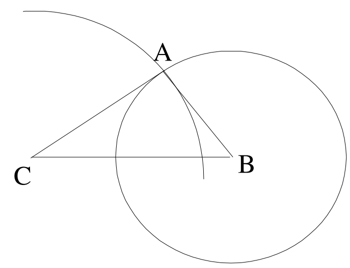
Les données sont : BC = a et la valeur des angles B et C.
Construisons BC, puis en B un angle $\widehat{CBx}$ égal à l'angle B donné, puis en C un angle $\widehat{BCy}$ égal à l'angle C donné, de sorte que les demi-droites Bx et Cy soient dans un même demi-plan limité par BC.
Soit A le point commun à ces demi-droites. Le triangle ABC est le triangle demandé. Tout autre triangle répondant à la question est égal à ABC (1er cas d'égalité).
Discussion. La construction est possible si les demi-droites Bx et Cy se coupent, c'est-à-dire si B + C < 180°.

113. Construire un triangle connaissant deux côtés et l'angle qu'ils forment.



Les données sont : AB = c, AC = b, et la valeur de A.
Construisons un angle $\widehat{xAy}$ égal à l'angle donné A. Portons sur Ax un segment AB = c, et sur Ay un segment AC = b. Le triangle ABC est le triangle demandé. La construction est toujours possible si A < 180°.

114. Construire un triangle connaissant ses trois côtés.



Les données sont BC = a, AC = b, et AB = c.
Nous supposons a > b > c.
Construisons un segment BC = a. Le troisième sommet A appartient :
au cercle de centre B, de rayon c,
et au cercle de centre C, de rayon b.
C'est donc un de leurs points d'intersection. Soit A l'un de ces points.
Le triangle ABC est le triangle demandé. Tout autre triangle répondant à la question est égal au triangle ABC : 3e cas d'égalité.
Discussion : le point A existe si les deux cercles de centres B et C sont sécants, ce qui nécessite :

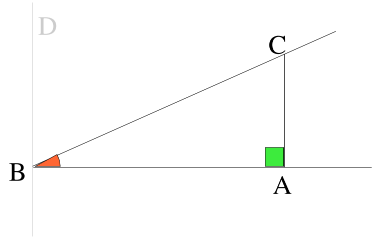
$$CA - BA < BC < BA + CA$$

ou

$$b - c < a < b + c$$

La première condition b - c < a est réalisée puisque a est le plus grand côté : étant supérieur à b et à c, il l'est à leur différence. La condition de possibilité se réduit à : a < b + c.
Donc,
Pour que trois longueurs soient les côtés d'un triangle, il faut et il suffit que la plus grande soit inférieure à la somme des deux autres.

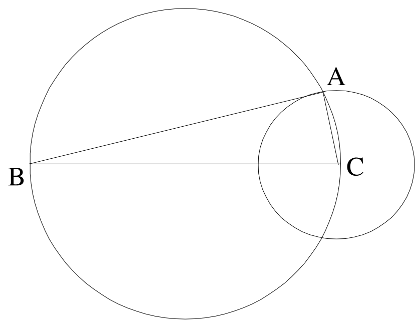
115. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et un angle aigu.



Les données sont A = 90°, BC = a et la valeur de l'angle B. Construisons un angle $\widehat{xBy}$ égal à l'angle aigu B donné. Portons sur By un segment BC = a. De C menons la perpendiculaire CA à Bx. Le triangle ABC est le triangle demandé. Tout autre triangle répondant à la question est égal au triangle ABC, d'après le 1er cas d'égalité des triangles rectangles.

Ce problème est toujours possible. En effet, soit D la perpendiculaire en B à Bx. CA lui est parallèle ; B étant aigu, CA et Bx sont du même côté par rapport à D. CA coupe donc Bx et non son prolongement.

116. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et un côté de l'angle droit.



Les données sont : A = 90°, BC = a, et AC = b.
Construisons un segment BC = a. Le sommet A de l'angle droit appartient :
1° au cercle de diamètre BC ; le centre de ce cercle est son milieu O ;
2° au cercle de centre C, de rayon b. Soit A l'un des points d'intersection de ces deux cercles. Le triangle ABC est le triangle demandé. Tout autre triangle répondant à la question est égal au triangle ABC (2e cas d'égalité des triangles rectangles).
Discussion : C est intérieur au cercle de centre C et de rayon b. Pour que le cercle de diamètre BC coupe le premier, il faut et il suffit que B soit à l'extérieur du cercle de centre C, c'est-à-dire que l'on ait : a > b

117. Remarque. On constate que dans toutes les constructions précédentes, trois données suffisent à déterminer un triangle. Il en est toujours ainsi : Pour construire un triangle, il faut se donner trois éléments, parmi lesquels figure au moins une longueur.

EXERCICES

Construire un triangle rectangle connaissant :
140. un côté de l'angle droit et un angle aigu.
141. un côté de l'angle droit et la hauteur relative à l'hypoténuse.
142. l'hypoténuse et la hauteur relative à l'hypoténuse.
143. la médiane et la hauteur relatives à l'hypoténuse.
144. l'hypoténuse et la somme des côtés de l'angle droit (soient AB et AC les côtés de l'angle droit, prolonger CA d'une longueur AD = AB, construire le triangle BDC).

145. l'hypoténuse et la différence des côtés de l'angle droit (soient AB et AC les côtés de l'angle droit, porter sur AC une longueur AD = AB, construire le triangle BDC).
146. un angle aigu et la somme des côtés de l'angle droit.
147. un angle aigu et la différence des côtés de l'angle droit.

Construire un triangle isocèle connaissant :

148. l'angle au sommet et la hauteur relative à la base.
149. la longueur des côtés égaux et la hauteur relative à la base.
150. l'angle à la base et la hauteur relative à la base.
151. la base et la hauteur relative à la base.
152. la base et le rayon du cercle circonscrit.

Construire un triangle connaissant :

153. deux côtés et la médiane relative à l'un d'eux.
154. deux côtés et la médiane relative au troisième (prolonger celle-ci d'une longueur égale).
155. un côté et les médianes relatives aux deux autres.
156. un côté, la médiane relative à ce côté et une autre médiane.
157. les trois médianes (soit AM l'une d'elles, G leur point commun, prolonger GM d'une longueur égale à lui-même).
158. deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.
159. un côté, un angle adjacent à ce côté, et la somme des deux autres côtés, ou leur différence.
160. un côté, l'angle opposé à ce côté et la somme des deux autres côtés, ou leur différence : on mettra en évidence la somme ou la différence donnée, et on étudiera la figure obtenue.
161. un côté, un angle adjacent à ce côté, et la hauteur issue du sommet de cet angle.
162. deux côtés et la hauteur relative à l'un d'eux.
163. un côté, un angle adjacent à ce côté, et la hauteur relative à ce côté.
164. deux côtés et la hauteur relative au troisième.
165. un angle, la hauteur et la bissectrice intérieure issues du sommet de cet angle.
166. un côté, un angle adjacent à ce côté, et le rayon du cercle circonscrit.
167. deux côtés et le rayon du cercle circonscrit.

Construire un parallélogramme connaissant :

168. un côté et les deux diagonales.
169. un côté, un angle et une diagonale.
170. la longueur des côtés et une hauteur.

Construire un rectangle connaissant :

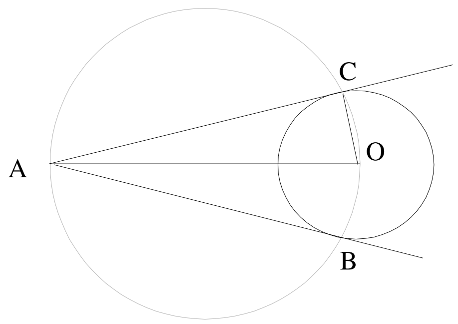
171. un côté et la diagonale.
172. le plus grand côté et l'angle des diagonales.
173. la diagonale et le périmètre.

Construire un quadrilatère connaissant :

174. un angle et les quatre côtés.
175. une diagonale et les quatre côtés.

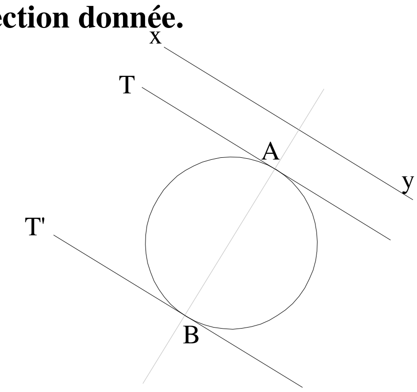
CONSTRUCTIONS RELATIVES AUX TANGENTES

118. Par un point donné, construire les tangentes à un cercle donné.



Considérons le cercle O et le point A. Supposons qu'on ait construit une tangente AC au cercle O, et soit C le point où elle touche le cercle. Le triangle OCA est rectangle en C. Nous en connaissons l'hypoténuse OA, et un côté de l'angle droit OC. On en déduit la construction suivante :
Tracer le cercle de diamètre OA, qui coupe le cercle donné en B et C. Les tangentes cherchées sont AC et AB.
Discussion. Le cercle de diamètre OA passe par O, intérieur au cercle donné.
Les deux cercles ne peuvent être que intérieurs, tangents intérieurement ou sécants.
1° Ils sont intérieurs si A est intérieur au cercle O. Le problème, dans ce cas, n'admet pas de solution.
2° ils sont tangents intérieurement si OA = R. Le problème admet une solution, la tangente en A au cercle donné.
3° ils sont sécants si A est extérieur au cercle. Le problème admet alors deux solutions, les tangentes AB et AC. Les points B et C sont symétriques par rapport à OA. AB et AC sont donc des segments égaux et AO est bissectrice de BAC. Ainsi :
Par un point extérieur à un cercle on peut construire deux tangentes à ce cercle.Ces tangentes sont égales et le diamètre passant par leur point commun est bissectrice de leur angle.

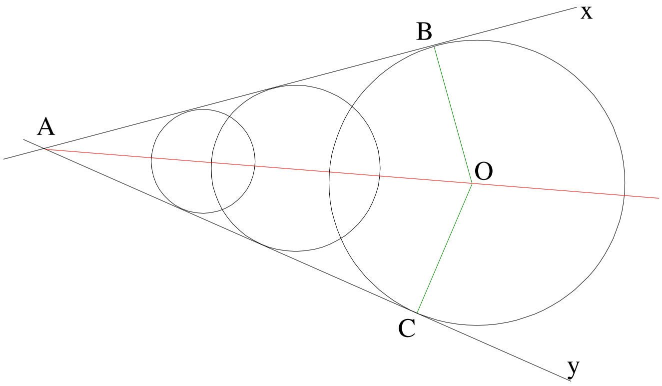
119. Construire les tangentes à un cercle, parallèles à une direction donnée.



Soit O le cercle donné et xy la direction donnée. Supposons que la tangente AT menée en A soit une tangente cherchée. Le rayon OA perpendiculaire à AT l'est aussi à xy. On en déduit la construction suivante :
Construire le diamètre AB perpendiculaire à xy ; les tangentes en A et B sont les tangentes cherchées.
Ce problème admet toujours deux solutions.

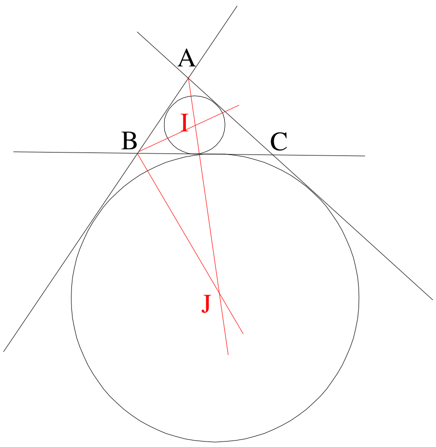
120. Cercles tangents aux deux côtés d'un angle.

Soit un cercle O tangent aux deux côtés de l'angle $\widehat{xAy}$ en deux points B et C.
Puisqu'on OB = OC, le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$. Réciproquement, si O est un point de la bissectrice, en menant OB et OC perpendiculaires à Ax et Ay, on a OB = OC, le cercle de centre O et de rayon OB répond à la question.
Il existe donc une infinité de cercles tangents aux deux côtés d'un angle. Leurs centres sont sur la bissectrice de cet angle.



121. Cercles tangents à trois droites.

Considérons le triangle ABC. Cherchons s'il existe des cercles tangents aux trois droites AB; AC et BC.



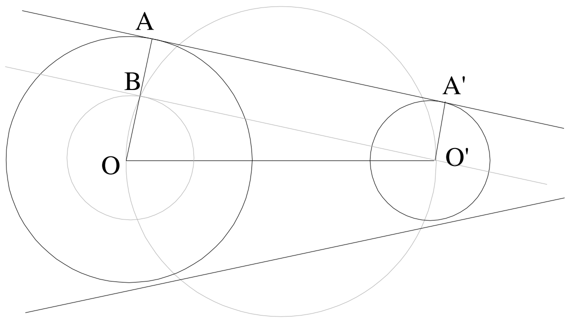
1° Les bissectrices intérieures du triangle sont concourantes en un point I. D'après ce qui précède, ce point I est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle. Ce cercle se nomme cercle inscrit au triangle.

2° Les bissectrices extérieures de deux angles d'un triangle et la bissectrice intérieure du troisième angle sont concourantes. Soit J le point commun aux bissectrices extérieures de B et de C et à la bissectrice intérieure de A, ce point est le centre d'un cercle tangent au côté BC et aux prolongements des côtés AB et AC.

Ce cercle se nomme cercle ex-inscrit au triangle dans l'angle A. Tout triangle possède un cercle inscrit et trois cercles ex-inscrits respectivement dans les angles A, B, C.

122. Construire une tangente commune à deux cercles.

1° Etude de la figure. Soient deux cercles O et O', de rayons R et R' (R > R') et AA' une tangente commune telle que O et O' soient du même côté de AA' : nous disons que AA' est une tangente commune extérieure aux deux cercles.



Les rayons OA et O'A' perpendiculaires à AA' sont parallèles. Menons par O' la perpendiculaire à OA qui coupe OA en B.

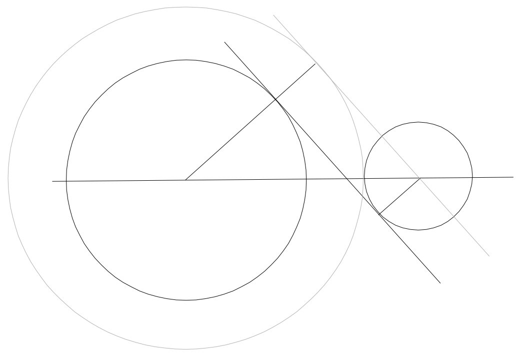
Le quadrilatère AA'O'B est un rectangle, puisqu'il a trois angles droits, on a

OB = OA - AB = OA - O'A' = R - R'

Le cercle de centre O et de rayon R - R' est tangent à O'B en B.

2° Construction. Construire le cercle de centre O et de rayon R - R'. Mener de O' la tangente à ce cercle ; joindre OB qui coupe le cercle O en A ; mener en A la perpendiculaire à OA, on obtient ainsi la tangente cherchée. Le problème admet une seconde solution, la tangente CC' symétrique de AA' par rapport à OO'.

3° Discussion. Pour que de O' on puisse mener la tangente au cercle de centre O, de rayon R - R', il faut et il suffit que O' soit extérieur à ce cercle, soit OO' > R - R'.
Toutes les autres constructions sont alors possibles ; la condition précédente exprime que les cercles O et O' sont extérieurs ou sécants ou tangents extérieurement.
On pourra étudier de la même façon la construction d'une tangente commune intérieure à deux cercles, c'est-à-dire d'une tangente telle que O et O' soient de part et d'autre de cette tangente. On remplacera le cercle de rayon R - R' par le cercle de rayon R + R'.



EXERCICES

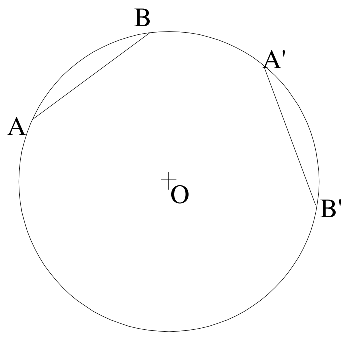
Construire un triangle connaissant :
176. le cercle inscrit (ou un cercle ex-inscrit) et les points où il touche les 3 côtés du triangle.
177. le cercle inscrit (ou le cercle ex-inscrit dans l'angle A), la position du sommet A, et la direction du côté BC.
178. le cercle inscrit ou un cercle ex-inscrit et la direction des trois côtés.
179. Démontrer 1° que si dans un quadrilatère convexe les bissectrices de trois angles sont concourantes, il existe un cercle inscrit dans le quadrilatère. 2° la réciproque est-elle vraie ?
180. Démontrer 1° que s'il existe un cercle inscrit à un parallélogramme, ce parallélogramme est un losange. 2° qu'il existe un cercle inscrit à un losange.

Construire un losange connaissant :
181. le côté et le rayon du cercle inscrit.
182. un angle et le rayon du cercle inscrit.
183. une diagonale et le rayon du cercle inscrit.
184. Construire un cercle de rayon donné, tangent à deux droites données.

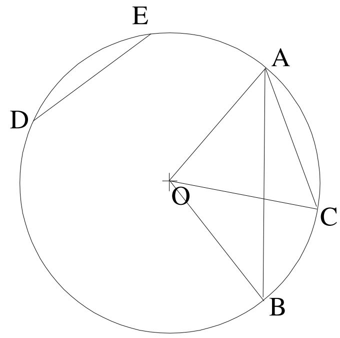
I. CORDES ET ARCS SOUS-TENDUS

Les théorèmes suivants ramènent, dans un même cercle ou dans deux cercles égaux, la comparaison de deux arcs à la comparaison des cordes qui les sous-tendent.
Rappelons qu'une corde AB sous-tend deux arcs *AB.* Dans ce qui suit, il ne sera question que des arcs inférieurs à un demi-cercle.

123. Théorème.
Dans un même cercle ou dans deux cercles égaux, 1° deux arcs égaux sont sous-tendus par deux cordes égales. ; 2° deux arcs inégaux sont sous-tendus par des cordes inégales ; le plus grand arc est sous-tendu par la plus grande corde.



Hypothèse : arc *AB* = arc *A'B'*
Conclusion : AB = A'B'.
1° Deux arcs égaux sont superposables ; lorsque le calque de l'arc *A'B'* coïncide avec l'arc *AB*, les cordes AB et A'B' coïncident, elles sont donc égales.



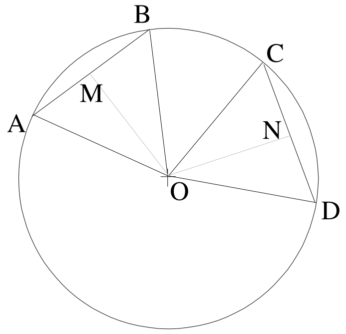
2° Construisons un arc *AC* = *DE*, de façon que C soit à l'intérieur de l'arc *AB*, ce qui est possible puisque *AC* < *AB*. Les cordes AC et DE sont égales.
Les angles au centre $\widehat{AOC}$ et $\widehat{AOB}$ sont dans le même ordre de grandeur que les arcs qu'ils interceptent. Donc $\widehat{AOB} > \widehat{AOC}$. les deux triangles AOB et AOC ont deux côtés égaux (OA commun, OB = OC) mais les angles formés par ces côtés sont inégaux, les troisièmes côtés sont inégaux dans le même ordre. Donc AB > AC,
et par suite AB > DE.

124. Réciproque. Dans un cercle ou deux cercles égaux, 1° deux cordes égales sous-tendent des arcs égaux ; 2° deux cordes inégales sous-tendent des arcs inégaux, et la plus grande corde sous-tend le plus grand arc.
1° Si AB = A'B', on doit avoir arc *AB* = arc *A'B'*. En effet, si ces arcs étaient inégaux, les cordes seraient inégales, ce qui est contraire à l'hypothèse.
2° Si AB > DE, on doit avoir arc *AB* > arc *DE*. En effet, on ne peut avoir arc *AB* < arc *DE*, sans quoi on aurait AB < DE, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc arc *AB* > arc *DE*.

II. CORDES ET DISTANCES AU CENTRE

Les théorèmes suivants ramènent la comparaison de deux cordes d'un même cercle ou de deux cercles égaux, à celle de leurs distances au centre.

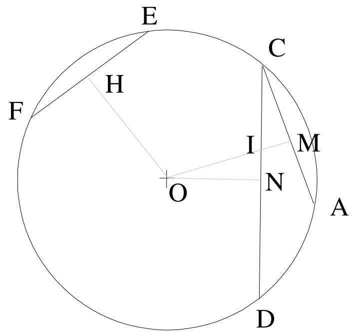
125. Théorème. Dans un même cercle ou deux cercles égaux,
1° Deux cordes égales sont équidistantes du centre.
2° Deux cordes inégales sont inégalement distantes du centre, la plus grande est la plus proche du centre.



Hypothèse : AB = CD
OM ⊥ AB
ON ⊥ CD
Conclusion : OM = ON

1° Soient deux cordes égales AB et CD ; OM et ON les distances du centre à ces deux cordes. Les triangles isocèles OAB et OCD ont OA = OC = OB = OD, et AB = CD, ils sont égaux (3e cas). Leurs hauteurs homologues sont égales. Donc OM = ON.

2° Hypothèse : CD > EF
ON ⊥ CD
OH ⊥ EF
Conclusion : ON < OH



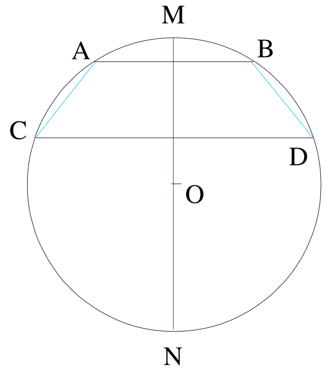
Construisons une corde CA = EF, de façon que A soit à l'intérieur de l'arc CD, ce qui est possible puisque l'arc CA = l'arc EF, donc l'arc CA < l'arc CD.
Soit OM la distance de O à la corde CA, on a OM = OH.
Les points O et A sont de part et d'autre de CD ; il en est de même des points O et M. OM coupe CD en I, entre O et M ; on a donc : ON < OI
et OI < OM donc ON < OM
et par suite ON < OM

126. Réciproque. Dans un même cercle ou dans deux cercles égaux,
1° deux cordes équidistantes du centre sont égales,
2° deux cordes inégalement distantes du centre sont inégales, et la plus proche du centre est la plus grande.
Si OM = ON, on doit avoir AB = CD. En effet, si les cordes étaient inégales, il en serait de même de OM et ON (théorème direct). Si ON < OH, on doit avoir CD > EF. En effet, on ne peut pas avoir CD < EF, sans quoi on aurait ON > OH, ce qui est contraire à l'hypothèse.

III. CORDES PARALLÈLES

127. Théorème. Deux cordes parallèles d'un cercle interceptent entre elles deux arcs égaux.
Soit dans le cercle O deux cordes parallèles AB et CD. Le diamètre MN perpendiculaire à AB l'est aussi à CD. Il passe au milieu de ces cordes et au milieu des arcs qu'elles sous-tendent.
On a donc arc *CM* = arc *DM*
arc *AM* = arc *BM*,

donc *CM - AM = DM - BM*
ou arc *AC* = arc *BD*
Il en résulte que les cordes AC et BD sont égales. Le quadrilatère ABDC est un trapèze isocèle, dont MN est l'axe de symétrie.
Remarque. Le théorème reste exact dans le cas où l'une des droites, AB par exemple, devient tangente au cercle.



EXERCICES

191. Soit un cercle O et un diamètre AB. On mène par A et par B deux cordes parallèles AC et BD.
1° Comparer AC et BD.
2° Montrer que C, O et D sont alignés.
192. Deux cordes AB et CD d'un même cercle sont parallèles. Comparer les cordes AC et BD, puis les cordes AD et BC.
193. Soit une corde AB dans un cercle O. Comparer AB à la somme OA + OB. En déduire que toute corde est inférieure à un diamètre.
194. Par un point A intérieur à un cercle O, on mène la corde BC perpendiculaire au diamètre passant par A, et une corde quelconque MN.
1° Comparer les distances de O à ces deux cordes.
2° Quelle est la plus petite corde passant par A ? quelle est la plus grande ?
3° Montrer que les milieux de toutes les cordes passant par A sont sur un cercle de diamètre OA.
195. Une sécante coupe deux cercles concentriques, le premier en A et B, le second en A' et B'.
1° Comparer AA' et BB'.
2° Etudier le cas où la sécante est tangente à l'un des cercles.
196. Soit un cercle de centre O, de rayon 5 cm. On considère toutes les cordes de ce cercle dont la longueur est 6 cm.
1° Montrer que les milieux de toutes ces cordes sont sur un cercle de centre O, dont on construira le rayon.
2° Montrer que toute corde ayant son milieu sur ce cercle a pour longueur 6 cm.
3° Par un point A, construire une sécante qui coupe le cercle donné en deux points B et C, tels que BC = 6 cm.
197. Soit un cercle O et une corde AB. Par deux points A' et B' équidistants du milieu de AB, on construit les perpendiculaires à AB, qui coupent le cercle en C, D et en E, F. Démontrer que les cordes CD et EF sont égales.
198. Deux cordes d'un cercle, AB et AC, ont une extrémité commune ; on suppose que le diamètre passant par A est la bissectrice de $\widehat{BAC}$; démontrer que AB = AC.
199. Soient A et B les deux points communs à deux cercles sécants O et O'. Une droite passant par A coupe les cercles en C et D.
1° Soient M et N les pieds des perpendiculaires menées de O et O' à la droite CD. Démontrer que MN = CD/2. On examinera le cas où A est entre C et D et le cas où A est extérieur à CD.

2° Construire la droite CD de façon que le segment CD ait une longueur donnée 2a. Montrer qu'en général il existe deux droites répondant à la question et qu'elles font des angles égaux avec AB.

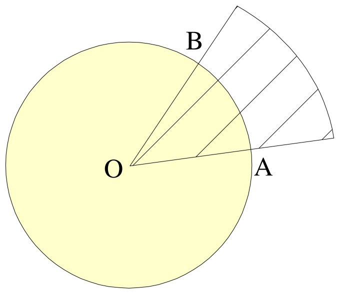
200. Deux cercles de centres O et O' se coupent en A et B ; par A on construit une sécante qui coupe les cercles en C et D ; soit M le milieu de AC, N le milieu de AD et I le milieu de MN.

1° Montrer que la perpendiculaire en I à CD coupe OO' en son milieu K.

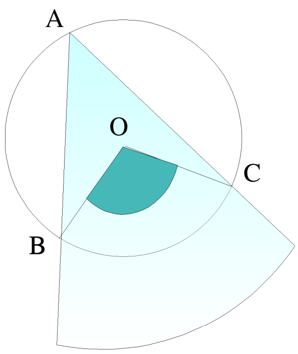
2° Construire la sécante CD de façon que A en soit le milieu (montrer que le milieu de MN est alors en A).

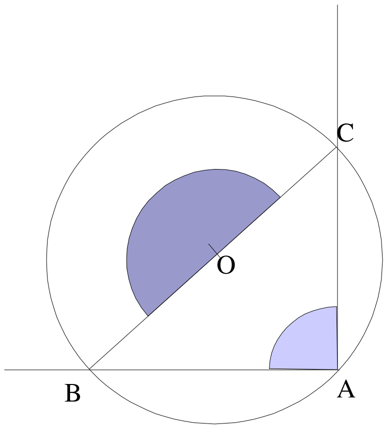
L'ANGLE INSCRIT

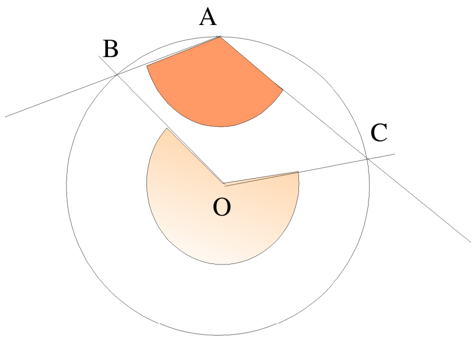
128. Angle au centre. Rappelons la définition de l'angle au centre et ses propriétés.
On appelle angle au centre un angle ayant son sommet au centre du cercle.



La portion du cercle située à l'intérieur de l'angle au centre AOB est appelée l'arc intercepté par cet angle au centre.
Nous avons vu que :
pour que deux angles au centre soient égaux, il faut et il suffit qu'ils interceptent sur un cercle deux arcs égaux.
Nous en avons déduit que l'angle au centre et l'arc qu'il intercepte sur un cercle sont mesurés par le même nombre de degrés ou de grades.

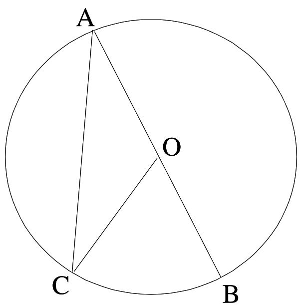


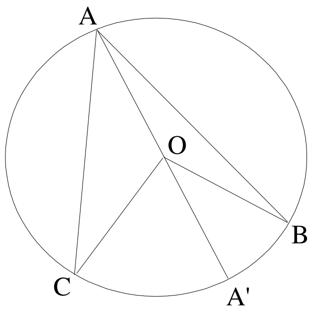


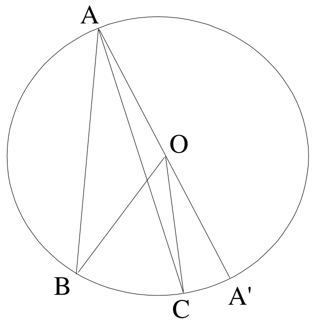


129. Angle inscrit. On appelle angle inscrit à un cercle un angle dont les côtés sont deux cordes issues d'un point de ce cercle.
C'est le cas des angles $\widehat{BAC}$ des figures ci-dessus.
La portion du cercle située à l'intérieur de cet angle est l'arc *BC* : c'est l'arc intercepté par l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.
A chaque angle inscrit correspond l'angle au centre interceptant le même arc que lui sur le cercle.
Cet angle peut être saillant, plat ou rentrant.
Le théorème suivant permet de comparer l'angle inscrit à l'angle au centre correspondant.

130. Théorème. Un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre correspondant.
Hypothèse : AB et AC sont deux cordes.
Conclusion : $\widehat{BAC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$







1° L'une des cordes, AB, est un diamètre. L'angle au centre BOC est alors extérieur au triangle AOC. Donc $\widehat{BOC} = \hat{A} + \hat{C}$

Mais OAC est isocèle, donc $\hat{A} = \hat{C}$,

on a ainsi $\widehat{BOC} = 2\hat{A}$

$$\text{ou} \quad \hat{A} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

2° Le centre O est à l'intérieur de l'angle inscrit BAC.

Soit AA' le diamètre passant par A. D'après ce qui précède, nous avons

$\widehat{BOA'} = 2\widehat{BAA'}$

$\widehat{A'OC} = 2\widehat{A'AC}$

en ajoutant ces égalités membre à membre, on obtient

$\widehat{BOA'} + \widehat{A'OC} = 2(\widehat{BAA'} + \widehat{A'AC})$

soit $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$

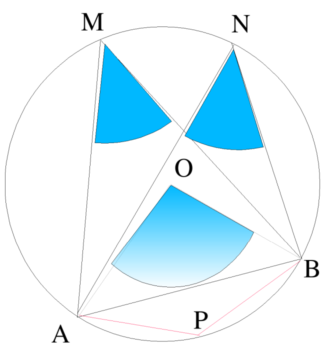
3° Le centre O est à l'extérieur de l'angle inscrit BAC.

En retranchant membre à membre les deux mêmes égalités que plus haut, il vient un résultat analogue, $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

Ainsi dans tous les cas l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre correspondant. On peut dire encore : L'angle inscrit est mesuré par le même nombre de degrés ou de grades que la moitié de l'arc qu'il intercepte.

131. Corollaires. Il en résulte que :

1° Deux angles inscrits qui interceptent sur un cercle ou sur deux cercles égaux le même arc ou deux arcs égaux, sont égaux. Il sont en effet mesurés par le même nombre de degrés ou de grades.



Ainsi $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

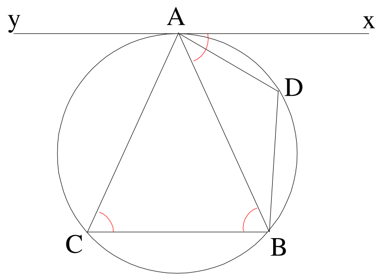
2° Deux angles inscrits égaux interceptent sur un cercle ou sur deux cercles égaux des arcs égaux.

3° Tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit. En effet, l'angle au centre correspondant est plat. Nous avions déjà vu cette propriété au n° 55.

4° Deux angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$ dont les sommets M et P sont de part et d'autre de la corde AB sont supplémentaires. Chacun d'eux est en effet la moitié d'un angle AOB, l'un saillant et l'autre rentrant ; la somme de ces deux angles vaut 360°, celle des deux angles inscrits est donc 180°.

132. Angle formé par une tangente et une corde issue du point de contact.

Théorème. L'angle formé par une tangente et une corde passant par le point de contact est égal à l'angle inscrit qui intercepte le même arc.



1° L'angle aigu $\widehat{BAx}$ formé par la tangente Ax et la corde AB intercepte l'arc AB. Menons BC parallèle à Ax ; les arcs AB et AC sont égaux (n° 127) ; donc AB = AC et $\hat{B} = \hat{C}$.

Or, $\widehat{BAx}$ et $\hat{B}$ sont alternes internes, donc égaux ; donc $\widehat{BAx} = \hat{C}$, qui est précisément un angle inscrit interceptant l'arc *AB*.

2° $\widehat{BAy}$ est le supplément de $\widehat{BAx}$; $\widehat{ADB}$ est le supplément de $\widehat{ACB}$. Donc $\widehat{BAy} = \widehat{ADB}$.

Or ces deux angles obtus interceptent le même arc. Le théorème est donc démontré dans tous les cas.

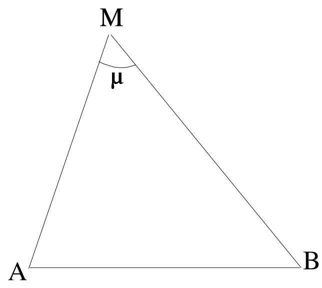
EXERCICES

201. On construit le cercle circonscrit à un triangle ABC.
1° Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle A passe par le milieu de l'arc *BC*.
2° En déduire que la bissectrice intérieure de A et la médiatrice de BC se coupent sur le cercle circonscrit au triangle.
3° Examiner le cas de la bissectrice extérieure.
202. Sur un cercle, on porte des arcs consécutifs AB, BC, CD, DE, EF tels que les angles au centre correspondants mesurent 30°, 40°, 30°, 90° et 45°. Calculer les angles du polygone ABCDEF.
203. Montrer 1° que si les 3 angles d'un triangle sont aigus, le centre du cercle circonscrit est intérieur au triangle ; 2° que si le triangle a un angle obtus, le centre est extérieur au triangle.
204. Soit un triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit. Sachant que B = 54° et C = 48°, calculer les angles des triangles OBC, OAC et OAB.
205. Deux cercles égaux se coupent en A et B. Une sécante passant par A coupe ces cercles en C et D. Comparer les segments BC et BD.
206. Soit un cercle O, deux diamètres perpendiculaires AB et CD, et la tangente en un point M de l'arc AC qui coupe CD en P.
1° Comparer les angles MPO et MOA.
2° Démontrer que l'angle MPO est le double de MBA.
207. Soient deux cercles O et U tangents en A et xy leur tangente commune en A. On mène par A deux sécantes qui coupent les cercles, l'une en E et F, l'autre en G et H.
1° Comparer $\widehat{GBA}$ et $\widehat{HFA}$ aux angles que forment la sécante GH et la tangente xy.
2° Démontrer que les tangentes en E et F aux deux cercles sont parallèles.
208. Sur un cercle O on construit des arcs consécutifs AB, BC, CD mesurant 30°, 80°, 90°. Calculer

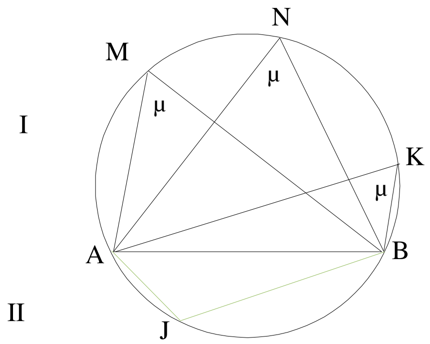
les angles que font les droites AD et BC, AB et CD, AC et BD.
209. Soit un cercle O et une corde AB, telle que l'angle AOB mesure 50°. Les tangentes en A et B se coupent en M. Evaluer l'angle AMB.
210. Deux cercles O et O' se coupent en A et B ; par A on mène deux sécantes égales CE et DF.
1° Comparer les angles ACB et ADB et les angles AEB et AFB.
2° Que peut-on dire des triangles CBE et DBF ?
3° Lorsque les sécantes égales CE et DF tournent autour de A, montrer que les bissectrices des angles CBD et EBF sont fixes ainsi que la bissectrice de l'angle CAD.

I. ARC CAPABLE

133. Définition. Soit un segment AB et un point M situé hors de la droite AB. Désignons par μ la valeur de l'angle AMB. On dit que du point M on voit le segment AB sous l'angle μ.



134. Arc capable.



Problème : soit un segment AB et un angle μ. Trouver tous les points du demi-plan I d'où l'on voit le segment AB sous l'angle μ.

A) Construisons dans ce demi-plan un triangle AMB tel que A + B = 180° - μ. L'angle $\widehat{AMB}$ mesure donc μ. Construisons le cercle circonscrit au triangle AMB. De tous les points de l'arc AMB de ce cercle on voit la corde AB sous l'angle μ. Les angles inscrits $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$, $\widehat{AKB}$, etc ... interceptent en effet le même arc.

B) Il n'existe pas d'autres points du demi-plan I répondant à la question.

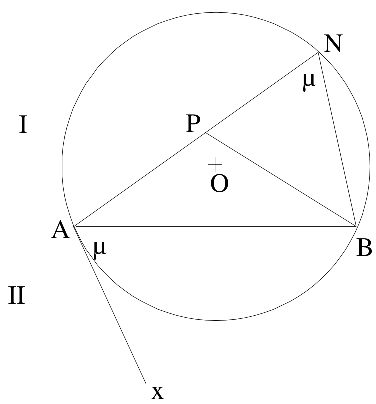
1° Soit un point P intérieur au cercle. AP coupe le cercle en N et $\widehat{APB}$ est extérieur au triangle PNB. On a donc

$\widehat{APB} = \widehat{ANB} + \widehat{PBN}$

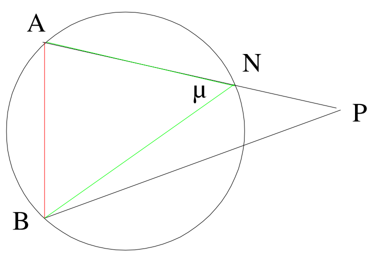
soit $\widehat{APB} > \widehat{ANB}$

ou $\widehat{APB} > \mu$.

De tout point du demi-plan I intérieur au cercle AMB on voit AB sous un angle supérieur à μ.



2° Soit un point P extérieur au cercle.



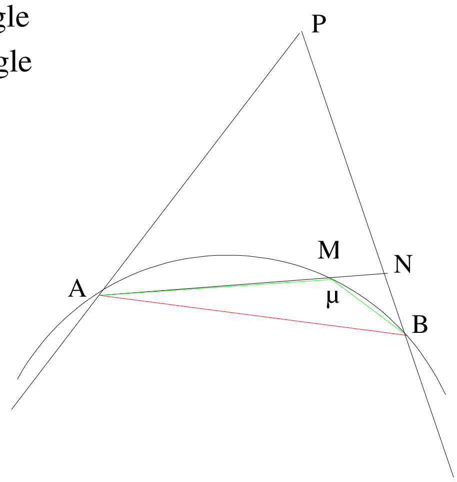
a) L'un des côtés au moins de l'angle $\widehat{APB}$ coupe l'arc ANB.

Soit N le point où PA coupe cet arc. L'angle $\widehat{ANB}$ est extérieur au triangle PNB, On a $\widehat{ANB} = \mu = \widehat{APB} + \widehat{PBN}$

donc $\widehat{APB} < \mu$

b) Aucun des côtés de $\widehat{APB}$ ne coupe l'arc AMB. Soit N le

point où AM coupe BP. L'angle $\widehat{AMB}$ est extérieur au triangle MNB. Donc $\widehat{AMB} > \widehat{ANB}$. $\widehat{ANB}$ est extérieur au triangle APN, donc $\widehat{ANB} > \widehat{APB}$;
En définitive, $\widehat{APB} < \widehat{ANB} < \widehat{AMB}$,
soit $\widehat{APB} < \mu$.
De tout point du demi-plan I extérieur au cercle AMB, on voit le segment AB sous un angle inférieur à µ.

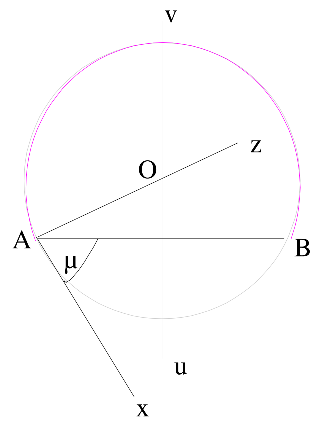


En reprenant cette étude pour les points du demi-plan II, on trouve de même un arc symétrique du précédent par rapport à la droite AB, contenant tous les points du demi-plan II d'où l'on voit AB sous l'angle µ.
L'arc AMB ou son symétrique se nomme arc capable de l'angle µ décrit sur AB comme corde.

135. Conclusion. Tous les points d'où l'on voit un segment AB sous un angle donné appartiennent à deux arcs d'extrémités A et B, symétriques par rapport à AB.

136. Remarques.
1° Il résulte du n° 131 que de tous les points de l'arc AJB on voit AB sous l'angle 180° - µ. Toute corde AB d'un cercle sous-tend deux arcs AB ; si l'un est capable de l'angle µ, l'autre est capable de l'angle 180° - µ.
2° Si µ = 90°, les deux arcs capables sont deux demi-cercles de diamètre AB. On retrouve la propriété suivante : Tous les points d'où l'on voit un segment AB sous un angle droit appartiennent au cercle de diamètre AB.
3° Traçons dans le demi-plan II, la demi-droite Ax tangente en A à l'arc capable ; il résulte du n° 132 que $\widehat{BAx} = \widehat{AMB} = \mu$

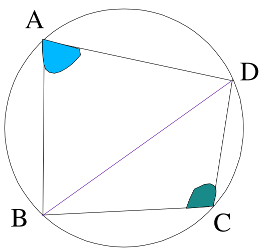
137. Construction de l'arc capable.
Construisons dans le demi-plan II l'angle $\widehat{BAx}$ égal à l'angle donné µ. L'arc cherché est tangent à Ax en A, et il est dans le demi-plan I. Son centre O se trouve :
- sur la médiatrice de AB, soit uv ;
- sur la perpendiculaire en A à Ax, soit Az.
On trace donc le cercle de centre O, de rayon OA, et on conserve la portion de ce cercle située dans le demi-plan I.

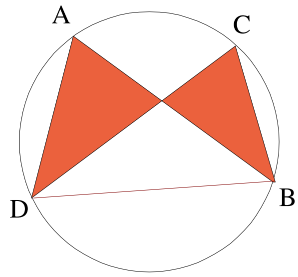


II. QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

138. Définition. Un quadrilatère est inscriptible si ses quatre sommets appartiennent à un même cercle.
En général, il n'existe pas de cercle passant par quatre points donnés A, B, C, D. S'il en existe un, le

quadrilatère est inscriptible. C'est le cas pour les deux quadrilatères ci-dessous, un convexe : A et C de part et d'autre de BD, et un croisé : A et C du même côté de BD.





139. Propriétés du quadrilatère inscriptible.

1° dans un quadrilatère convexe inscriptible, les angles opposés sont supplémentaires.
En effet, A et C étant de part et d'autre de BD, de ces points on voit BD sous des angles supplémentaires.
2° Dans un quadrilatère croisé inscriptible, les angles opposés sont égaux.
En effet, A et C sont d'un même côté de BD, de ces points on voit BD sous des angles égaux.
On peut dire encore que dans le quadrilatère convexe ACBD, une diagonale et un côté (AB et AD) forment le même angle que l'autre diagonale et le côté opposé (CD et CB).

140. Reconnaître un quadrilatère inscriptible.

Les réciproques des propriétés précédentes s'énoncent ainsi :
1° Si dans un quadrilatère convexe deux angles opposés sont supplémentaires, ce quadrilatère est inscriptible.
Traçons le cercle circonscrit au triangle DBC. L'arc DMB de ce cercle est capable de 180° - $\hat{C}$ = $\hat{A}$. Donc A appartient à cet arc, le quadrilatère est inscriptible.
2° Si dans un quadrilatère croisé deux angles opposés sont égaux, ce quadrilatère est inscriptible. En effet, des points A et C situés d'un même côté de BD, on voit la corde BD sous le même angle. A et C appartiennent donc au même arc capable construit sur DB comme corde. On peut dire aussi que : si dans un quadrilatère convexe ACBD, une diagonale et un côté (AB et AD) forment le même angle que l'autre diagonale et le côté opposé (CD et CB), le quadrilatère est inscriptible.

EXERCICES

211.On donne BC = 5 cm. Construire les arcs capables de 60° sur BC.
212. On donne BC = 5 cm. Construire les arcs capables de 135° sur BC.
213. Un quadrilatère convexe ABCD est inscrit dans un cercle. L'angle B est triple de l'angle D et la corde BD est égale au rayon du cercle. Calculer les angles du quadrilatère.
214. Un quadrilatère convexe ABCD est inscrit dans un cercle. La diagonale BD est un diamètre et la diagonale AC est égale au rayon. Calculer les angles du quadrilatère.
215. Un trapèze, un parallélogramme, un losange, sont-ils inscriptibles dans un cercle ?

216. Par le milieu M d'un arc AB on construit deux cordes MD et ME qui coupent la corde AB en F et G. Démontrer que le quadrilatère DEGF est inscriptible.
217. Soit un triangle ABC ; les deux hauteurs BB' et CC' se coupent en H ; on construit le symétrique H' de H par rapport à BC.
1° Démontrer que le quadrilatère ABH'C est inscriptible.
2° Comparer les cercles circonscrits aux triangles BHC et BH'C.
218. Soit un triangle ABC, les trois hauteurs AA', BB', CC' et H l'orthocentre.
1° Que peut-on dire des quadrilatères HA'BC', et HA'CB' ?
2° Comparer les angles HA'C' et B'BA, de même que HA'B' et C'CA.
3° Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle A'B'C'.
219. Soit un triangle ABC, la hauteur AA' et AD le diamètre passant par A du cercle circonscrit au triangle.
1° Comparer les angles ABC et ADC, puis les angles BBA' et DAC. En déduire que BAC et A'AD ont même bissectrice.
2° Soient BB' et CC' les hauteurs issues de B et C. B'C' coupe AD en I. Que peut-on dire des quadrilatères BC'B'C et DIB'C ?
3° En déduire que B'C' et AD sont perpendiculaires.
220. Soit un triangle équilatéral ABC, inscrit dans un cercle O. On joint un point M de l'arc BC aux trois points A, B, C, puis on porte sur MA une longueur MD = MC.
1° Montrer que MCD est équilatéral.
2° Comparer les triangles ADC et BMC.
3° En déduire l'égalité MA = MB + MC.
221. Deux cercles O et O' se coupent en A et B ; par A on mène deux sécantes qui coupent les cercles, l'une en C et C', l'autre en D et D'. CD et C'D' se coupent en P.
1° Comparer les angles PCC' et DBA de même que les angles PC'C et D'BA.
2° En déduire que le quadrilatère PDBD' est inscriptible. En est-il de même de PCBC' ?
3° Les tangentes en C et C' se coupent en I. Comparer les angles ICC' et CBA, puis les angles IC'C et C'BA. En déduire que le quadrilatère ICBC' est inscriptible.

PROBLÈMES DE RÉVISION

353[4]. D'un point M de la base BC d'un triangle isocèle ABC, on mène les perpendiculaires MD et ME aux côtés égaux AB et AC. Montrer que la somme des segments MD et ME est égale à une hauteur du triangle. Dans le cas où M est à l'extérieur de BC, comment faut-il modifier l'énoncé ?
354. Soit un triangle ABC rectangle en A et sa hauteur AH ; on mène les bissectrices AD et AE des angles BAH et HAC. Montrer que les triangles ABE et ACD sont isocèles.
355. Montrer que si, à partir de deux sommets opposés d'un carré, on porte sur les côtés de ce carré une même longueur, en joignant les points obtenus on forme un rectangle dont le périmètre est constant, quelle que soit la longueur commune des segments portés sur les côtés du carré.
356. Montrer qu'en joignant les pieds des perpendiculaires menées du centre sur les côtés d'un losange, on forme un rectangle.
357. Sur les côtés AB et BC d'un carré ABCD, on porte deux longueurs égales AM et BN. Montrer que les droites AN et DM sont perpendiculaires.
358. Dans un triangle ABC, l'angle aigu B est double de l'angle C ; on mène la hauteur AH et et on prolonge AB d'une longueur BE = BH. On joint EH qui coupe AC en D. Montrer que les triangles DAH et DHC sont isocèles et que AB = HC - HB.
359. Dans un triangle quelconque, l'angle formé par la bissectrice de l'angle A et la hauteur issue de A est égal à la demi-différence des angles B et C.
360. Dans un triangle rectangle, la bissectrice de l'angle droit est aussi bissectrice de l'angle formé par la hauteur et la médiane relatives à l'hypoténuse.
361. Soit un trapèze isocèle ABCD (BC // AD) tel que AB = BC = CD. Montrer que les diagonales AC et BD sont bissectrices des angles A et D. Construire ce trapèze connaissant AD et l'angle A.
362. Soit I le point de rencontre des bissectrices intérieures d'un triangle ABC. On mène par I les parallèles aux côtés AB et AC qui coupent BC en D et E. Comparer le périmètre du triangle IDE à la longueur BC.
363. Démontrer que l'angle des bissectrices de deux angles opposés d'un quadrilatère est égal à la demi-différence des deux autres angles du quadrilatère.
364. Démontrer que les bissectrices des angles d'un parallélogramme forment un rectangle et que les diagonales de ce rectangle sont parallèles aux côtés du parallélogramme.
365. Soit un triangle ABC et les deux bissectrices de l'angle A. De B on mène les perpendiculaires BD et BE à ces bissectrices. Que peut-on dire du quadrilatère ADBE ? En déduire que DE et AC sont parallèles. On construit de même les perpendiculaires BD' et BE' aux deux bissectrices de l'angle C. Que peut-on dire des quatre points D, E, D', E' ?
366. Dans un triangle ABC on mène la médiane AM ; on joint B au milieu O de AM, BO coupe AC en E ; enfin, on prolonge BO d'une longueur OF = BO. Prouver que les quadrilatères AFMB et AFCM sont des parallélogrammes. En déduire que E est au tiers de AC à partir de A.
367. On donne un triangle ABC rectangle en A et sa hauteur AD. On construit le symétrique E de D par rapport à AB et le symétrique F de B par rapport à AC. Montrer que les points E, A, F sont en

4 La présente éditrice constate que ce numéro ne suit pas ceux du chapitre précédent, et se perd en conjectures sur la raison de la disparition de nombreux numéros, alors que les pages se suivent ...

ligne droite.
368. Soient deux droites perpendiculaires x'x et y'y et O leur point commun. Sur Ox et Oy on porte OA= OA' et sur Ox' et Oy' on porte OB = OB'. On construit la hauteur OH du triangle OA'B et la médiane OM du triangle OAB'. Montrer que les points M, O, H sont alignés.
369. Soit un cercle de centre O et un diamètre AB de ce cercle. On mène par A et par B deux cordes parallèles AA' et BB'. Montrer que les trois points A', O, B' sont en ligne droite.
370. Un trapèze ABCD est inscriptible dans un cercle de diamètre AB. Montrer que deux des angles du triangle ADC ont pour différence 90°.
371. Soit un quadrilatère ABCD ; les droites qui joignent les milieux des côtés opposés se coupent en I ; soient E et F les milieux des diagonales AC et BD. Montrer que les trois points E, I, F sont en ligne droite.
372. Soient deux droites perpendiculaires D et D', un point A sur D et un point B sur D', on joint un point C de D' au point A. Montrer que la perpendiculaire menée de B à AC, la perpendiculaire menée de C à AB et la droite D sont concourantes.
373. Construire par un point A une droite équidistante de deux points donnés B et C (deux cas).
374. Construire un triangle connaissant un côté et deux hauteurs (deux cas).
375. Construire un triangle connaissant les deux angles B et C et le périmètre du triangle (prolonger CB d'une longueur BD = BA, prolonger BC d'une longueur CE = CA, puis étudier le triangle ADE).
376. Construire un triangle isocèle connaissant le rayon du cercle circonscrit et la hauteur relative à la base.
377. Soit un angle $\widehat{xOy}$; construire une droite parallèle à une direction donnée qui coupe les deux côtés de l'angle en deux points A et B tels que AB ait une longueur donnée (mener par O un segment OC parallèle à la direction donnée et tel que OC = AB, étudier la figure OCBA).
378. Construire un parallélogramme connaissant ses diagonales et leur angle.
379. Construire un trapèze isocèle connaissant le rayon du cercle circonscrit et la longueur des deux bases.
380. Construire un triangle connaissant le rayon du cercle circonscrit, un côté et la hauteur relative à ce côté.
381. Etant donné un angle $\widehat{xOy}$, et un point A intérieur à cet angle, mener par A une droite qui coupe les côtés de l'angle en B et C de façon que A soit le milieu de BC.
382. Construire un trapèze rectangle connaissant les deux bases et le côté non perpendiculaire aux bases.
383. Etant donné un angle $\widehat{xOy}$, et un point A, construire un triangle isocèle dont la base passe par A et dont $\widehat{xOy}$ soit l'angle au sommet.
384. Soit un triangle isocèle ABC de base BC.
1° D'un point M de BC on mène les perpendiculaires MD et ME aux côtés égaux. Montrer que MD + ME a une valeur constante quelle que soit la position de M sur BC.
2° Dans les mêmes conditions, montrer que AD + AE a une valeur constante.
3° Le point M étant pris sur le prolongement de BC, montrer que MD - ME a une valeur constante.
385. Soit un angle $\widehat{xOy}$; on porte sur Ox et Oy deux longueurs OM et ON dont la somme a une valeur donnée 2L = 20 cm.

1° Soit M' le point de Oy tel que OM' = OM. Montrer que le milieu I de NM' reste fixe quand les points M et N se déplacent sur Ox et Oy.
2° Construire le centre du cercle circonscrit au triangle MNM'. Montrer que ce point reste fixe lorsque M et N varient sur Ox et Oy.
386. On donne un triangle isocèle ABC, de base BC ; M est le milieu de BC. Sur AB on construit le carré ABDE, sur AC le carré ACFG, on joint M aux points E et G et E au point G. Démontrer que :
1° ME = MG.
2° la perpendiculaire MN menée de M à EG passe par A (N est le pied de cette perpendiculaire sur EG),
3° les triangles ABM, AEN sont égaux,
4° BG = 2 AM et BC = 2 AN.
387. Soit un triangle isocèle ABC, de base BC ; les bissectrices intérieures des angles B et C coupent les côtés opposés en B' et C'.
1° Démontrer que les segments BC', B'C et B'C' sont égaux.
2° Le résultat subsiste-t-il lorsqu'on remplace les bissectrices intérieures par les bissectrices extérieures ?
388. Soient sur une droite xy trois segments égaux et consécutifs AB = BC = CD. On construit sur BC comme base un triangle isocèle BCE. AE coupe en F la perpendiculaire menée par D à la droite xy.
1° Comparer les segments AE et EF.
2° Que peut-on dire des deux segments BE et CF ?
389. On considère un demi-cercle de centre O, de diamètre AB. Sur AO comme diamètre , on décrit un demi-cercle de centre O', intérieur au premier. On mène par A une sécante qui coupe les deux demi-cercles en M et N.
1° Comparer les deux triangles AON et MON. En déduire que N est le milieu de AM.
2° Que peut-on dire des deux tangentes en M et N aux deux demi-cercles ?
390. Soit un triangle ABC rectangle en A et sa hauteur AH ; on mène de B et C les tangentes BD et CE au cercle de centre A et de rayon AH.
1° Montrer que les points D, A, E sont alignés et que les tangentes BD et CE sont parallèles.
2° Montrer que le cercle de diamètre BC est tangent en A à DE.
391. Dans un cercle de centre O on mène une corde CD et deux rayons OA et OB : le rayon OA coupe CD en E et le rayon OF coupe CD en F de manière que CE = EF = FD
1° Comparer les triangles OBC et OFD.
2° Que peut-on dire du triangle OEF ?
3° Que peut-on dire des droites AB et CD ?
392. Soit un carré ABCD de côté a. De B vers C on porte sur BC un segment BM = b (b < a) et on prolonge CD à partir de D d'une longueur DN = BM. Soit O le milieu de MN.
1° Comparer les triangles ADN et ABM.
2° Montrer que le triangle MAN est rectangle.
3° Montrer que le triangle AOC est isocèle.
393. Soit un triangle ABC rectangle en A et la hauteur AH. On porte sur BC un segment HD = BH.

On joint AD et on mène de C la perpendiculaire CE à ED.
1° Comparer les triangles ABH et ADH.
2° Comparer les angles HCA et HCE.
3° Montrer que le quadrilatère AHBC est inscriptible.
4° Montrer que le triangle AHE est isocèle.
394. Soit un demi-cercle O de diamètre AB ; on trace la corde AC faisant avec AB un angle de 30°.
1° Montrer que le triangle OBC est équilatéral.
2° Soit I le centre du cercle circonscrit au triangle AOC. Montrer que le quadrilatère AICO est un losange. En déduire une construction simple du point I et la valeur du rayon du cercle circonscrit au triangle AOC.
395. Soit un cercle O de diamètre AB et une corde AC ; les tangentes en B et C se coupent en D.
1° Démontrer que OD est parallèle à AC.
2° Construire la figure sachant que AB = 3 cm et $\widehat{BAC} = 45°$.
396. Soit un triangle ABC dans lequel $\hat{B} - \hat{C} = 90°$.
1° Soit AA' le diamètre passant par A du cercle circonscrit à ce triangle. Comparer les deux angles $\widehat{CBA'}$ et $\widehat{BA'A}$ à l'angle $\hat{C}$ du triangle.
2° En déduire que les droites AA' et BC sont parallèles.
3° Montrer que la tangente en A au cercle circonscrit est la hauteur AH du triangle et que l'on a $\widehat{CAH} = \widehat{ABH}$.
397. Soit un point A intérieur à un angle $\widehat{xOy}$.
1° Trouver un point M sur Ox et un point N sur Oy tels que A soit le milieu de MN.
2° Construire un triangle isocèle de sommet O, dont la base PQ passe par A.
3° Dans quel cas les droites MN et PQ sont-elles confondues ?
398. Soit un rectangle ABCD tel que AB = a et AD = b. On prolonge AB d'une longueur BF = a et AD d'une longueur DE = b.
1° Comparer les triangles FBC et CDE.
2° Que peut-on dire des trois points F, C, E ?
3° Comment choisir a et b pour que AC soit perpendiculaire à FE ?
399. Soit un cercle de diamètre AB ; on mène une corde AC et on la prolonge d'une longueur CD = AC.
1° Montrer que le triangle ABD est isocèle.
2° Soit AE la corde perpendiculaire à AC ; on la prolonge de EF = AE. Démontrer que les points D, B, F sont alignés.
3° Montrer que le cercle circonscrit au triangle DAF est tangent en A au cercle donné.
4° Quelle valeur faut-il donner à l'angle BAC pour que DF soit tangent en B au cercle donné ?
400. Soit un angle $\widehat{xOy}$ et un point fixe A sur la bissectrice de cet angle. Un cercle passant par O et A coupe les côtés de l'angle en M et N.
1° Montrer que la médiatrice de MN passe par A.
2° Un second cercle passant par O et A coupe les côtés de l'angle en K et L. Comparer les angles $\widehat{MAK}$ et $\widehat{NAL}$. En déduire que MK = NL.
401. Soit un triangle ABC, I le centre du cercle inscrit, et J le centre du cercle exinscrit dans l'angle

A.
1° Montrer que AI coupe le cercle circonscrit au triangle en un point M milieu de l'arc BC.
2° Evaluer les angles MBI et BIM par rapport aux angles du triangle ABC. En déduire que le triangle IBM est isocèle.
3° Comparer les angles MBJ et BJM. En déduire que le point M est le centre d'un cercle passant par les points B; I, C, J.
402. Dans un triangle isocèle ABC un angle à la base est le double de l'angle au sommet A.
1° Calculer en degrés les trois angles du triangle.
2° Soit BD la bissectrice de B. Comparer les segments AD, BD, BC.
3° On prolonge BD d'une longueur DE = BD. Que peut-on dire de l'angle BAE ?
403. Dans un triangle ABC, l'angle C vaut 40° et l'angle A vaut 60°.
1° Calculer l'angle B.
2° On mène la hauteur AD et on prolonge AB d'une longueur BE = BD. ED coupe AC en F. Montrer que les triangles BDE, FDC et FDA sont isocèles et calculer leurs angles.
3° Montrer que FA = FD = FC, et que AB = DC - DB.
404. On donne un angle $\widehat{xOy}$ et un point A sur la bissectrice de cet angle. Par le point B milieu de OA, on mène la perpendiculaire à OA qui coupe Ox et Oy en C et D.
1° Montrer que le quadrilatère ODAC est un losange.
2° Quelle valeur faut-il donner à $\widehat{xOy}$ pour que ce quadrilatère soit un carré ?
405. Soit un trapèze rectangle ABCD où BC est perpendiculaire aux deux bases AB et DC.
1° Montrer que la médiatrice de BC coupe AD en son milieu O.
2° Démontrer l'égalité AD + BC = 2 OH, H désignant le milieu de BC.
406. Dans un triangle ABC, la bissectrice intérieure de B coupe AC en D, et on mène par D la parallèle à BC qui coupe AB en E.
1° Démontrer que le triangle BDE est isocèle.
2° Quelle relation doit exister entre les angles B et C du triangle pour que l'on ait DC = BD ?
3° Démontrer que DE est alors bissectrice de l'angle $\widehat{ADB}$.
407. On donne un triangle ABC dans lequel on suppose AB < AC, on trace le cercle circonscrit. La bissectrice intérieure de l'angle A coupe ce cercle en M et BC en D ; la tangente en A coupe BC en I.
1° Démontrer l'égalité $\widehat{ADI} = \widehat{ACM}$.
2° Montrer que le triangle ADI est isocèle.
3° La bissectrice extérieure de A coupe BC en E. Montrer que I est le milieu de DE.
408. On donne un cercle O et une corde AB égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle. D'un point C de l'arc AB inférieur à un demi-cercle, on décrit un cercle tangent à AB ; les tangentes à ce cercle menées de A et B se coupent en M.
1° Calculer en degrés la valeur de $\widehat{CAB} + \widehat{CBA}$.
Calculer la valeur de l'angle $\widehat{AMB}$.
409. On donne un demi-cercle de diamètre AB ; sur une corde AC on porte AD = CB ; sur la tangente en A on porte AE = AB.
1° Comparer les triangles ADE et ABC.

2° Montrer que le cercle de diamètre AE passe par D.

410. On donne un demi-cercle de diamètre AB ; sur un rayon OC on porte OD = CH, H désignant la projection de C sur le diamètre AB ; OE est le rayon perpendiculaire à AB.

1° Comparer les triangles OCH et ODE.

2° Montrer que le cercle de diamètre OE passe par D.

411. Soit un cercle O de diamètre MN ; par un point A de ce diamètre, on mène la tangente AB au cercle, puis la bissectrice de l'angle $\widehat{BAO}$. La perpendiculaire menée de O à cette bissectrice la coupe en P, et la tangente AB en C.

1° Montrer que le triangle OAC est isocèle.

2° Montrer que la hauteur issue de C dans ce triangle est égale au rayon du cercle donné.

3° En déduire la distance du point P au diamètre MN.

412. On donne un quadrilatère convexe ABCD.

1° Montrer que l'angle des bissectrices de deux angles consécutifs de ce quadrilatère est égal à la demi-somme des deux autres angles.

2° En déduire que les bissectrices des angles d'un quadrilatère convexe se coupent en formant un quadrilatère inscriptible.

413. Soit un quadrilatère ABCD inscriptible dans un cercle O ; on désigne par E et F les milieux des côtés opposés AB et CD, et par G et H les milieux des côtés BC et AD.

1° Montrer que EF et GH se coupent en leur milieu.

2° On mène EE' perpendiculaire à DC et FF' perpendiculaire à AB. Ces deux perpendiculaires se coupent en P. Montrer que le quadrilatère OEPF est un parallélogramme.

3° On mène de même GG' perpendiculaire à AD et HH' perpendiculaire à BC. Montrer que ces deux perpendiculaires se coupent en P.

414. On donne un cercle O de rayon R. D'un point A on mène les deux tangentes AB et AC à ce cercle.

1° Montrer que le centre du cercle inscrit au triangle ABC est sur le cercle O.

2° Montrer que le centre du cercle circonscrit au même triangle est au milieu de OA ; évaluer par rapport à R sa distance aux tangentes AB et AC.

3° Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC est le symétrique de O par rapport à la corde BC.

415. On donne dans un cercle O une corde AB égale au côté du triangle équilatéral inscrit à ce cercle ; on joint un point M de l'arc AB supérieur à un demi-cercle aux points A et B et on porte sur MA une longueur MC = MB.

1° Montrer que le triangle MBC est équilatéral.

2° Par M on mène la parallèle à BC qui coupe le cercle en P. Evaluer l'angle AMP. En déduire que P reste fixe si M décrit l'arc AB.

3° Montrer que le triangle PAB est équilatéral.