Exercice n : 1

1. *M*, *N* confondus : $z = z^2 \Leftrightarrow z = 0,\ z = 1$; *M*, *Q* confondus : $z = z^3 \Leftrightarrow z = 0,\ z = 1,\ z = -1$; *N*, *Q* confondus : $z^2 = z^3 \Leftrightarrow z = 0,\ z = 1$. Deux des points sont confondus lorsque *z* = 0, −1 ou 1.

2. $MN = \left|z^2 - z\right|,\ MQ = \left|z^3 - z\right|$;

$MN = MQ \Leftrightarrow \left|z^2 - z\right| = \left|z^3 - z\right| \Leftrightarrow |z||z-1| = |z||z-1||z+1| \Leftrightarrow |z+1| = 1$.

Il s'agit du cercle de centre le point *A* d'affixe −1, de rayon 1.

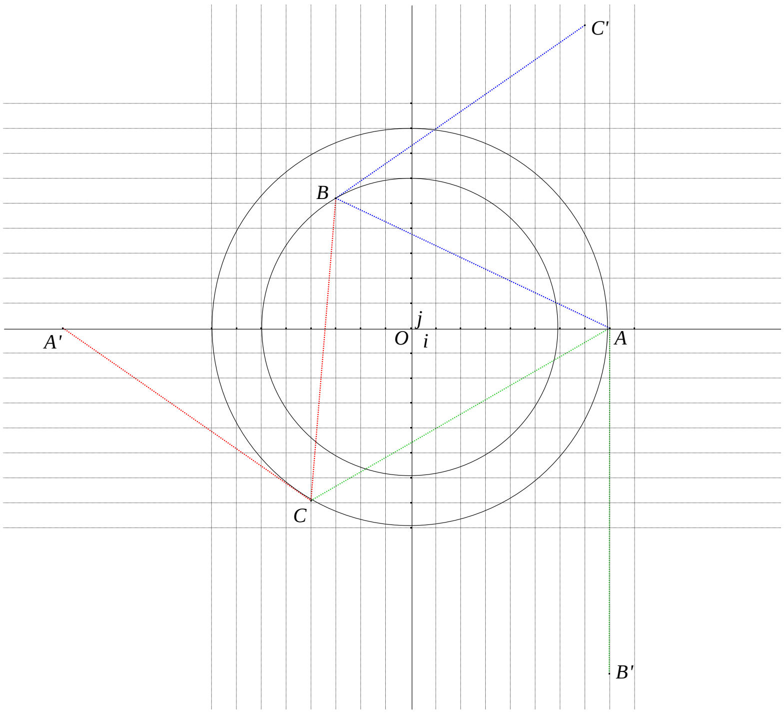
3. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = \arg\left(\frac{z^3 - z}{z^2 - z}\right) = \arg\left(\frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)}\right) = \arg(z+1)$.

MNQ est rectangle en *M* ssi $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z+1) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z+1 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$: il s'agit de la droite verticale passant par *A*.

4. *z* = −1 − *i* : $z^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$; $z^3 = z^2.z = 2i(-1-i) = 2 - 2i$.

Le triangle *MNQ* est rectangle isocèle : isocèle car $|z+1| = |-1-i+1| = |-i| = 1$ et rectangle car $\mathrm{Re}(-1-i) = -1$.

Exercices n 2



2. a. Notons au préalable que $b = 6j = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $c = 8j^2 = 8e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) \Leftrightarrow a' = 8e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\left(6e^{i\frac{2\pi}{3}} - 8e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) = 8e^{-i\frac{2\pi}{3}} + 6e^{i\pi} - 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$= 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6 - 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4 - 4i\sqrt{3} - 6 - 4 + 4i\sqrt{3} = -14.$$

b.

$b'-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)\Leftrightarrow b'=8+e^{i\frac{\pi}{3}}\left(8e^{-i\frac{2\pi}{3}}-8\right)=8+8e^{-i\frac{\pi}{3}}-8e^{i\frac{\pi}{3}}=8+4-4i\sqrt{3}-4-4i\sqrt{3}=8-8i\sqrt{3}=16e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On a alors $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}\right)=\arg\frac{b'}{b}=\arg b'-\arg b=-\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\pi$ donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires et *O* est sur (*BB*').

c. *A* et *A*' sont sur (*Ox*) ; *B*, *O* et *B*' sont alignés, il suffit de montrer que *C*, *O* et *C*' sont alignés :

$c'=7+7i\sqrt{3}=14\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=14e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC'}\right)=\arg\frac{c'}{c}=\arg c'-\arg c=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\pi$, ok.

3. a. $OA+OB+OC=|a|+|b|+|c|=8+6+8=22$.

b. $j^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=e^{i\frac{6\pi}{3}}=e^{i2\pi}=1$, $1+j+j^2=1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

c. $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj-z-zj^2-zj\right|=\left|a+bj^2+cj-(1+j+j^2)z\right|=22$.

d. Utilisons $|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$ avec (*a* − *z*), $(b-z)j^2$ et $(c-z)j$:

$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|\le|a-z|+|b-z|\left|j^2\right|+|c-z||j|=|a-z|+|b-z|+|c-z|=AM+BM+CM$;

comme $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj\right|=22$, cette valeur est le minimum de *MA+MB+MC* et il est obtenu lorsque *z* = 0, soit lorsque *M* est en *O*.