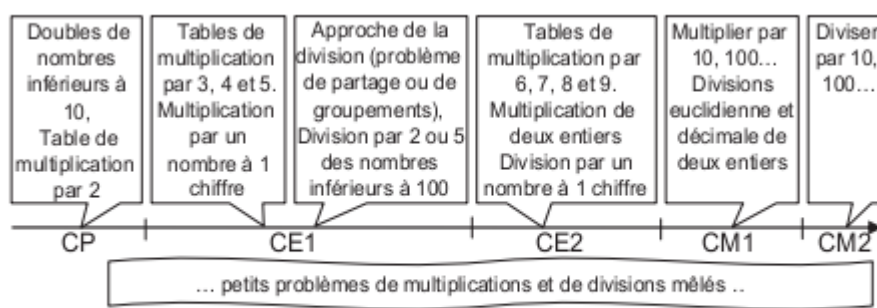


Multiplication et division

Cycle 2, cycle 3

L'enseignement du calcul multiplicatif et relatif à la division s'inscrit dans le cadre plus général de l'apprentissage du calcul et ne peut être séparé de celui de la numération décimale.

Les programmes 2008



Les techniques opératoires et le sens des opérations (construit à travers la résolution de problèmes) sont indissociables ; ils s'étayent et s'enrichissent mutuellement.

Pistes épistémologiques :

La multiplication

La multiplication a deux sens :

- l'addition réitérée (multiplication de nombres entiers)
- configuration rectangulaire avec l'aire (donner un sens à une multiplication des décimaux)

Loi de composition interne : quand on multiplie un entier par un entier, on obtient un nombre entier.

Vocabulaire :

Produit : résultat d'une multiplication ou 4×5 produit de 4 par 5

Facteur : terme d'un produit, pas indispensable à l'école primaire.

Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers :

Étant donné un nombre entier, alors soit ce nombre est premier, soit ce nombre n'est pas premier et dans ce cas on peut l'écrire comme étant le produit de deux facteurs premiers.

Propriétés de la multiplication des entiers :

Associativité : $a * b * c = (a * b) * c = a * (b * c)$

Commutativité : dans un produit, on peut changer l'ordre des facteurs.

1 est un élément neutre.

0 est un élément absorbant

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : cette propriété est utilisée quand on pose une multiplication sous cette forme : $457 * 5 = 400 * 5 + 50 * 5 + 7 * 5$

La division

Propriétés mathématiques :

- Non associative, non commutative
- 1 est un élément neutre en diviseur
- 0 est un élément absorbant en dividende
- Pas de division par un 0
- Distributivité par rapport à l'addition

Division euclidienne : $A = B \times Q + R$ où $0 \leq R < B$

Division décimale : le quotient est décimal.

La multiplication au cycle 2

Calcul automatisé :

La connaissance des doubles de nombres inférieurs à 10 et des moitiés de nombres inférieurs à 20 (CP) puis d'usage courant (CE1) sert de point d'appui pour la construction de résultats. Elle vise les nombres clés :

20, 30, 40, 50, 100, 200, 300, 400, 15, 25.

Progression : calcul des doubles inférieurs à 10, puis inférieurs à 20, en s'appuyant sur les nombres dont l'unité est 0 ou 5, puis aux nombres inférieurs à 100 en travaillant d'abord les moitiés de ceux dont le chiffre des dizaines est pair

L'apprentissage des tables de multiplication (2 au CP, 2, 3, 4, 5 en CE1) se fait par l'observation des régularités des résultats pour favoriser la mémorisation. Dès le début de l'apprentissage, la connaissance des résultats doit permettre de répondre à la question « Combien de fois 5 dans 35 ? »

Calcul réfléchi :

Les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et chaque élève doit pouvoir choisir celle qui est le mieux adaptée pour lui, selon leurs connaissances sur les nombres et les opérations en jeu. Les différentes procédures doivent être expliquées autour d'un **débat organisé sur leur validité**, cela favorise les progrès des élèves.

→ Pour maîtriser le produit de deux nombres inférieurs à 10, les doubles/moitiés sont à privilégier.

Dès la fin du cycle 2, tous les résultats des tables de multiplication doivent avoir été reconstruits par les élèves, en utilisant l'addition réitérée ou en s'appuyant sur quelques résultats connus : 8×6 doit être construit comme 8 de plus que 8×5 , la table de 5 étant connue. Le fait que la multiplication est commutative est rapidement mis en évidence. La mémorisation des autres tables relèvent du C3.

Calcul posé :

Seule la technique usuelle française doit être comprise et maîtrisée. Celle-ci nécessite la coordination de connaissances :

- tables de multiplication
- numération décimale (gestion des retenues, multiplications intermédiaires, addition finale)
- « règle des 0 » : $300 \times 15 = 3 \times 15 = 45$ en ajoutant 2 zéros à la droite du produit
- distributivité de la multiplication sur l'addition

Ces connaissances commencent à être travaillées au CE2 mais la maîtrise nécessaire est assurée qu'au cours du CE2.

Technique de base : multiplication de nombres à deux/trois chiffres par un nombre à un chiffre. C'est un préalable à des techniques plus difficiles. Elle repose sur les principes de numération décimale, connaissances des tables, commutativité et distributivité. Au cours de cette étape, les élèves peuvent être autorisés à utiliser un répertoire écrit des tables pour alléger la charge de travail.

-> Mise en relation avec le calcul de l'addition réitérée posée d'un même nombre.

Addition réitérée au CE1 :

- réunion de collections équipotentes (5×6 , verbaliser le « 5 fois 6 »)
-

-
- collections organisées en rangées et colonnes (5×6 ou 6×5 montre la commutativité : terme non employé avec les élèves)

Situation découverte : Feuille A5 de points dont il en manque une partie (déchirée, tâche de café) : les élèves doivent retrouver les points manquants pour connaître le nombre total. La validation peut se faire par représenter des points manquants pour comptage des élèves.

Procédures possibles : calcul en arbre qui utilise l'associativité de l'addition

Remarque : Il est plus simple de calculer $9 + 9 + 9$ que $3 + 3 \dots (\times 9)$ car l'addition ne comporte que trois termes

Distinction de $+$ et \times parfois difficile du fait de leur proximité

Multiplication et division en cycle 3

Calcul automatisé :

- Mémoriser et mobiliser les résultats des tables de multiplication: Stabilisation du répertoire multiplicatif soutenue. Le repérage des régularités ou des particularités est nécessaire à la mémorisation. Multiplier c'est:
 - Combien de fois x dans y ?
 - Combien obtient-on lorsque l'on cherche à séparer y , x fois?
 - Quel nombre obtient-on lorsque l'on souhaite décomposer y sous forme de produits de 2 nombres inférieurs à 10?

- Multiplier et diviser un nombre entier par 10, 100, 1000...
: La procédure consistant à décaler les chiffres d'un rang ou de 2 vers la gauche doit être reliée au fait que multiplier 13 par 10, c'est rechercher le nombre que représente 13 dizaines. Mise en relation avec le système de numération chiffrée car multiplier 34 par 10 revient) chercher une autre écriture à 34 dizaines ;

diviser 340 par 10 revient à chercher combien il y a de dizaine dans 340.

La référence écrite est une aide importante : l'énoncé du résultat nécessitant un sectionnement par tranches de trois chiffres (530; 5 300)

Le calcul réfléchi

Une grande variété de procédures peut être utilisée, mais elles s'appuient généralement sur une **décomposition des nombres**.

Exemple: 15×16

$$= 10 \times 15 + 5 \times 15$$

$$= 10 \times 16 + 5 \times 16$$

$$= 15 \times 4 \text{ et le résultat } \times 4$$

$$= 16 \times 30 \text{ et le résultat } / 2 \dots$$

L'enseignant doit permettre à l'élève de dépasser les décompositions liées uniquement à la connaissance des tables : utilisation de $\times 32$, $\times 16$... Cette compétence sera utile au collège (simplification de fractions, factorisations, racines carrées...)

Calcul posé :

Technique de multiplication

Étapes de l'apprentissage :

Multiplication d'un nombre par un nombre à un chiffre

Multiplication d'un nombre par un nombre du type 20, 300... :

CE2

Multiplication de deux nombres quelconques

Connaissances préalables :

- mémorisation des tables de multiplication
- décomposition des nombres en fonction de leur écriture en base 10
- repérage de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans le nombre
- remplacer un produit par une somme de produits
- connaître l'utilisation de l'associativité de la multiplication et la règle des 0

Les élèves sont aidés par l'écriture explicite des 0 qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage, ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer :

5 2 3

\times 2 0 5

2 6 1 5 \leftarrow 523 \times 5

1 0 4 6 0 0 \leftarrow 523

\times 2 0 0

1 0 7 2 1 5

Procédures pour résoudre des problèmes de multiplication

- **dessin ou schéma** : représentation des 4 paquets de 6 bonbons puis dénombrement des crayons un par un ou six par six
- **Procédure additive** : $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ en contrôlant que 6 est bien écrit 4 fois
- **Procédure multiplicative** : calcul mental de 6×4 en utilisant le résultat de la table de multiplication

Variable didactique :

Lorsque les nombres deviennent grands, les représentations deviennent inutilisables et les procédures additives deviennent difficiles à effectuer.

Lors de problème de « produit de mesure » (avec 3 entrées, 4 plats, combien de menus différents ?) les élèves peuvent également faire un tableau à double entrée.

La division posée :

Division euclidienne introduite au CM1 avant les nouveaux programmes, dorénavant au CE2 : réalité peut-être différente.

La technique usuelle française telle qu'elle a été enseignée pendant longtemps est dépouillée des soustractions posées et source de nombreuses erreurs car tous les calculs ne donnent pas lieu à une trace écrite. De plus, le calcul à risque est insécurisant car le chiffre essayé au quotient n'est jamais absolument certain. C'est le seul calcul où l'estimation intervient en cours.

Le travail doit donc être orienté vers la compréhension de l'articulation des différentes étapes du calcul.

Les connaissances préalables supposées :

- maîtrise des deux sens de la division
 - ✓ Quelle est la valeur de chaque part ? (partage de 2 782 en 26 parts égales)
 - ✓ Combien de fois 26 dans 2 782 ?
- Maîtrise des tables de multiplication : combien de fois 7 dans 59 ?
- Capacité à prévoir le nombre de chiffres du quotient par encadrement ou partage d'une partie du dividende

Les étapes suggérées :

- Temps préalable de calcul réfléchi de quotients et de restes pour que l'élève mette en acte des compétences sollicitées dans l'exécution de la technique opératoire : diviser mentalement 1 548 par 7 incite à décomposer en 1 400 (divisible par 7×200) + 148 ($7 \times 20 + 8$) le quotient est donc 220 et le reste 1. Cela s'obtient également par addition des quotients partiels : $200 + 20 + 1$.
- Division d'un nombre par un chiffre
- Divisions plus complexes, limitant le niveau de difficulté.

Il est également possible d'appliquer les propriétés de la numération en posant la question du partage pour le nombre de centaines du dividende, pour son nombre de dizaines et son nombre d'unités. $256 : 5$ donne « combien de fois 9 dans 25 ? »

Recommandations :

- commencer le calcul par une **estimation du nombre de chiffres du quotient**, ce qui permet un moyen de contrôle sur le quotient
 - s'autoriser à **poser des produits annexes** (production de la totalité de la table du diviseur ne doit pas être encouragée)
 - encourager la **pose effective des soustractions** (sans interdire à ceux qui souhaitent s'en dispenser)
- ➔ La technique dépouillée n'est pas une compétence visée

Pour la division euclidienne, on utilise l'égalité caractéristique de la division :

$37 = (5 \times 7) + 2$ en soulignant que le reste est inférieur au diviseur

Les écritures $(37 : 5 = 7)$ sont à éviter.

Problèmes de division :

- Situation de partages équitables avec reste : recherche de la valeur d'une part

Exemple : partage de 30 bonbons en 4 amis : combien chacun en aura t-il ? Le reste ?

- Situation de partages équitables avec reste : recherche du nombre de parts.

Exemple : Une fermière compte 48 œufs, rangement dans des boites de 12. Combien lui faut-il de boite ?

- Situation où l'on cherche à déterminer « combien de fois ? »

Procédures de résolution de ces problèmes :

- Distribution dès la GP : partage équitable sans reste.

Exemple : Distribution d'une boite de 24 feutres en les 4 élèves (distribution 1 par 1, 2 par 2, n par n suppose une anticipation de la valeur possible d'une part)

- Addition réitérée :

- Recherche du nombre de parts : combien de dessin peuvent être affichés si on met 4 punaises et que l'on a 12 punaises en tout ?

$4 + 4 = 8 + 4 = 12$. Les élèves doivent ensuite compter le nombre de fois où on a ajouté le nombre 4.

- Recherche de la valeur d'une part : même exemple qu'en CP (l'élève procède par essais successifs avec anticipation du résultat, le calcul additif intervient comme validation)
- Poustraction réitérée : recherche du nombre de parts (nombre de fois que l'on peut soustraire 4 à partir de 12) ou de la valeur d'une part (avec hypothèse)
- Les essais multiplicatifs : E3 (connaissance des tables), recherche du nombre de parts ou la recherche de la valeur d'une part (déterminer le facteur $6 \times \dots = 24$)

Difficultés rencontrées par les élèves dans la multiplication et la division

- Respect de l'ordre des calculs à effectuer
- Difficultés de décalage qui correspond en fait à l'existence d'un zéro comme chiffre des dizaines par exemple (exemple : fois 507)
- Mauvaise connaissance des tables de multiplications
- Gestion des retenues pour la multiplication
- Erreur dans le choix de la procédure de résolution (selon l'énoncé)

Constat des évaluations nationales : l'analyse des réponses montre que les erreurs dues à une connaissance insuffisante des tables de multiplication sont nettement plus nombreuses que celles attribuées à la maîtrise de la technique. Cela entraîne l'idée d'un renforcement du travail du calcul mental.

La présence de nombres décimaux entraîne des difficultés spécifiques.

Le langage est les expressions symboliques

De la multiplication

Ne présente pas de difficulté particulière

Les élèves donnent du sens à la multiplication par l'addition répétée, mais les produits à plusieurs facteurs ($3 \cdot 6 \cdot 4$) sont plus difficiles.

Le choix de la formulation de l'enseignant : fois, ou multiplié par.

De la division

Présente de nombreuses difficultés

Au collège, l'enseignement est généralisé aux nombres décimaux et aux fractions.

Approche de la notion de multiple

Les compétences relatives à cette notion sont reliées à la connaissance des nombres, ses relations avec d'autres nombres et évidemment avec le calcul, dans la mesure où la plupart des questions relatives à ces compétences font intervenir des calculs de multiplication ou de division.

Les étapes de l'apprentissage

CP - CE1 : multiples de 2 (doubles)

CE2 : notion de double, triple, quadruple sont enseignées en même temps que celles de moitié, tiers, quart, ce qui prépare l'étude des fractions l'année suivante.

CM1 : l'élève est amené à reconnaître les multiples de nombres d'usage courant (5, 10, 15, 20, 25, 50).

Les procédures utilisables pour reconnaître un multiple d'un autre nombre :

- chercher sa présence dans la table de multiplication prolongée « passer par le nombre »

- s'appuyer sur un multiple connu pour avancer de n en n
- essayer des nombres susceptibles de faire que le produit soit égal
- diviser le nombre donné par n pour vérifier si on obtient un reste nul ou non
- utiliser une propriété connue : savoir si un nombre est multiple de 2, 5, 10 en s'intéressant à son chiffre des unités

Les difficultés prévisibles :

- Conduite des calculs
- Relative au langage : confusion entre multiple et multiplication (l'élève calcule 24×3 en lui demandant si 24 est multiple de 3)
- Liées à la dissymétrie de l'expression : 24 est multiple de 3 mais pas l'inverse, l'élève confond alors.
- Liées à une extension de propriétés valables seulement pour certains nombres : l'élève regarde le chiffre des unités pour 18 multiple de 4.

Les problèmes envisageables :

- S'appuyant seulement sur la notion de multiple

Exemple : En avançant de 6 en 6 sur une piste graduée à partir de 0 avec les nombres entiers, passera-t-on par le repère associé au nombre 98 ?

○ Pappuyant implicitement sur la notion de multiple commun

Exemple : une plaque rectangulaire de 48 cm sur 84 cm.

Recouvrir entièrement avec des carrés tous identiques dont le côté mesure un nombre entier de cm. Quelles sont les solutions possibles ?

Recours à des hypothèses : 3 cm possible ? 48 multiple de 3 et 84 multiple de 3 ?