

SYMETRIE AXIALE

I. Les programmes

1. Cycle des apprentissages fondamentaux

La symétrie fait l'objet d'une première approche au cycle 2 à l'occasion d'activités telles que l'agencement d'objets géométriques (puzzles, cubes), la réalisation de frises ou de ribambelles, le classement de figures selon l'existence d'axes de symétrie.

- Relations et propriétés : axe de symétrie d'une figure
 - Percevoir un axe de symétrie d'une figure.
 - Vérifier par pliage si une figure a un axe de symétrie.
 - Produire le symétrique d'une figure par rapport à une ligne droite.

2. Cycle des approfondissements

L'étude systématique de la symétrie axiale relève de la sixième. Au cycle 3, il s'agit de fournir l'occasion aux élèves d'étendre leur champ d'expériences sur cette transformation et de mettre en œuvre quelques-unes de ses propriétés. Les activités conduites peuvent prendre appui sur l'analyse ou la réalisation d'assemblages, de frises, de pavages, de puzzles, en utilisant différentes techniques : pliage, calque, gabarits. Ces activités sont l'occasion de mettre en évidence des phénomènes de déplacement, avec ou sans retournement, et ainsi de rencontrer d'autres transformations. Des activités de tracé à main levée de figures symétriques d'une figure donnée sont également proposées.

La construction du symétrique d'un point avec règle et équerre relève du collège. Sur papier quadrillé, on se limite à l'utilisation d'axes de symétrie qui suivent les lignes du quadrillage ou qui sont des diagonales de ce quadrillage. Les élèves sont confrontés à quelques cas où l'axe de symétrie coupe la figure.

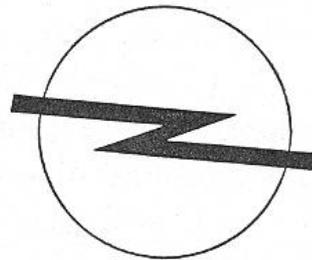
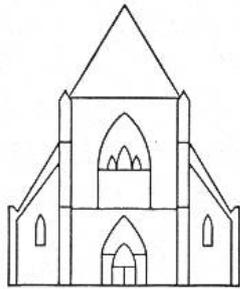
- Relations et propriétés : axe de symétrie d'une figure
 - Percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie.
 - Vérifier, en utilisant différentes techniques (pliage, papier calque, miroir) qu'une droite est axe de symétrie d'une figure.
 - Compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que pliage, papier calque, miroir.

- Tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.
- Utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite, axe de symétrie.

II. Repérer et tracer les axes de symétrie d'une figure

1. Les procédures possibles

Exemple : Ces figures admettent-elles un axe de symétrie ?



Plusieurs stratégies sont possibles pour répondre à cette question.

Dans tous les cas, il faut tout d'abord conjecturer¹ l'existence d'un axe, pour ensuite vérifier si cette conjecture est valide.

Pour conjecturer l'existence d'un axe², on repère :

- soit une sous-figure qui admet un axe de symétrie ; ce dernier est alors naturellement candidat à être un axe de symétrie de la figure complète ;
- soit des éléments de la figure qui semblent symétriques (segments de même longueur, angles de même mesure,...) et on cherche alors à préciser leur axe de symétrie.

Pour vérifier que l'axe conjecturé est bien un axe de symétrie de la figure, on peut :

- soit tracer mentalement, voire réellement dans certains cas, le symétrique de la figure (éventuellement on peut se contenter de points clés) et repérer si le symétrique obtenu fait partie de la figure ;
- soit effectuer mentalement le pliage et vérifier que les deux parties de la figure situées dans les demi-plans définis par la droite se superposent.

¹ Supposer

² On se place dans le cas où la figure n'est pas une figure « classique » (carré, losange...) dont les élèves connaissent les axes de symétrie.

2. Les principales difficultés des élèves

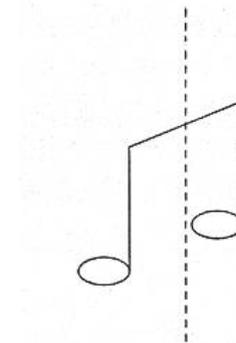
- Certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage ou de construction de symétrie.
- Beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève (contrat didactique) : « un axe de symétrie d'une figure passe par le milieu de cette figure ».

Le mot « milieu » utilisé par les élèves a plusieurs sens, il peut s'agir :

- du milieu d'un segment,
- du centre d'un cercle, d'un parallélogramme,
- d'une droite qui partage la figure en deux figures égales.

Pour les élèves, le « milieu » est un point d'équilibre ou une ligne d'équilibre.

Pour compléter ce théorème-élève, beaucoup d'élèves pensent que l'axe de symétrie doit partager la figure en deux parties superposables. Ainsi ils considèrent que cette figure a un axe de symétrie (la droite tracée en pointillé).



- Les élèves privilégient les axes verticaux ou horizontaux, dans la mesure où ils le sont dans leur contexte social et scolaire.

Ceci a plusieurs conséquences.

- Dans le cas d'une figure présentant plusieurs axes de symétrie, les élèves ne repéreront que l'axe horizontal ou vertical s'il existe³ : c'est le cas d'un triangle équilatéral posé sur un côté.
- Si une figure qui admet un (ou des) axe(s) de symétrie est représentée de telle sorte que cet (ou ces) axe(s) ne soit (soient) ni horizontal (aux), ni vertical (aux), beaucoup d'élèves estimeront que la figure n'admet pas d'axe. Par exemple, nombreux sont les élèves qui ne voient pas les axes de symétrie de la figure (1) alors qu'ils les perçoivent pour la figure (2).

³ Dans certains cas, il peut aussi y avoir un phénomène de contrat qui amène l'élève à penser qu'il y a au maximum un axe de symétrie par figure (règle induite par les exercices proposés).

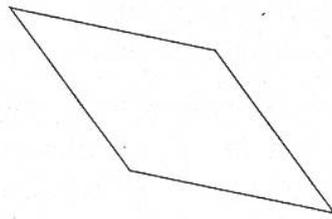


Figure (1)

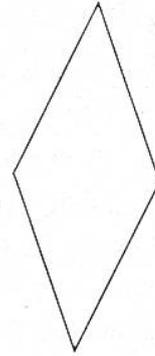


Figure (2)

- Dans le cas où la figure est composée de figures de base facilement repérables et possédant chacune un axe de symétrie, les élèves ont tendance à assimiler ces axes avec ceux de la figure complète.

3. Les variables didactiques

- Les outils
 - L'élève dispose de papier calque : il peut l'utiliser pour décalquer la figure et faire divers essais de pliage pour trouver un éventuel axe de symétrie. Dans ce cas, il peut ne pas avoir besoin d'anticiper sur une position de l'axe. On se retrouve dans une situation analogue lorsqu'il a la possibilité de plier la feuille sur laquelle est représentée la figure.
 - L'élève dispose d'une règle et d'une équerre et ne peut plier la feuille : il est obligé de faire appel à des images mentales.
- Le support sur lequel est représentée la figure
 - La figure est tracée sur papier quadrillé.
 - L'axe de symétrie correspond à une ligne du quadrillage. Dans ce cas, son repérage est facilité. Le décompte des carreaux facilite la vérification.
 - Si l'axe ne correspond pas à une ligne du quadrillage la présence de ces lignes peut induire l'élève en erreur dans la mesure où il recherchera l'axe uniquement parmi les lignes du papier quadrillé.
 - La figure est tracée sur papier non quadrillé (papier blanc) : l'élève est obligé de faire appel à des images mentales.

- Les caractéristiques de la figure (représentée sur papier blanc)
 - L'orientation de l'axe (quand il existe) : l'élève reconnaîtra plus facilement un axe « horizontal » (ou « vertical ») qu'un axe oblique.
 - Le nombre d'axes de symétrie : si la figure possède plusieurs axes de symétrie, l'élève peut considérer que sa tâche est terminée après en avoir trouvé un, et donc ne pas trouver les autres.
 - La familiarité que l'élève a avec la figure : si c'est une silhouette de personne ou un triangle isocèle, l'élève reconnaîtra facilement l'axe de symétrie.
 - Les figures de bases qui constituent la figure :
 - si la figure est composée de deux éléments isolés qui sont symétriques, l'élève reconnaîtra facilement l'existence de l'axe ;
 - si la figure est composée de deux éléments superposables non symétriques il risque de considérer que la figure a un axe de symétrie ;
 - si la figure peut être partagée par une droite en deux parties superposables, l'élève risque fort de reconnaître un axe de symétrie alors qu'il n'y en a pas forcément un.

III. Tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe

1. Les procédures possibles

Plusieurs cas peuvent se présenter suivant le matériel et les consignes données aux élèves :

- Papier calque

Dans ce cas, l'exécution de la technique du tracé demande uniquement un minimum d'habileté manipulatrice. Il en est de même dans le cas où l'élève peut plier sa feuille sur laquelle il doit tracer le symétrique.

- Papier blanc avec équerre et règle graduée

Dans le cas où la figure est un polygone, l'élève peut repérer les sommets de la figure, tracer le symétrique de chacun de ces sommets avec l'équerre puis joindre les points. Il peut éventuellement joindre les points deux à deux.

Dans le cas où la figure est constituée d'arcs de cercle, l'élève doit tracer le symétrique du centre de ces arcs et tracer les arcs de même rayon. Le pliage (effectué soit réellement, soit mentalement) fournit à l'élève un outil de contrôle.

- Papier quadrillé

Le placement des points est facilité dans le cas où l'axe coïncide avec une ligne du quadrillage ; en effet, dans ce cas, les perpendiculaires sont déjà tracées et le report de mesure se fait par décompte des carreaux.

Dans le cas où l'axe ne coïncide pas avec une ligne du quadrillage, des obstacles peuvent apparaître comme nous le verrons plus loin.

- A main levée

L'élève peut soit effectuer le tracé des points clés, soit construire globalement l'image de la figure en contrôlant éventuellement par pliage.

2. Analyse des difficultés des élèves

- Tracé du symétrique d'une figure à main levée

L'élève doit donc mobiliser des images mentales pour pouvoir placer soit les points clés de la figure (sommets ou centres des arcs de cercle), soit la figure globale. Les difficultés sont celles liées à la mobilisation d'images mentales. Mais ici il faut en plus que l'élève puisse, une fois qu'il a réussi à placer mentalement sa figure, tracer les éléments de cette figure. Dans le cas où ce tracé n'est pas parfaitement automatisé, l'élève peut perdre le contrôle de son image mentale (surcharge cognitive).

- Tracé du symétrique d'une figure avec une équerre et une règle

On peut penser que la seule difficulté ici consiste à tracer le symétrique des points clés de la figure, car une fois cette construction faite l'élève n'a plus qu'à joindre les points correspondants.

La réalité est plus complexe. D'une part l'élève peut rencontrer des difficultés pour joindre les points, s'il n'a pas pris la précaution de les joindre progressivement deux par deux. D'autre part dans le cas de « figures composées de segments » (figure (1)), l'élève mobilise plus facilement des procédures erronées de type « ligne de rappel » horizontale, verticale ou suivant des directions de segments de la figure, que dans le cas de figures formées uniquement de points (figure (2)).

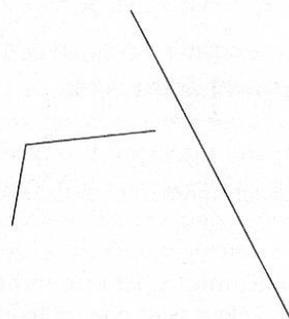


Figure (1)

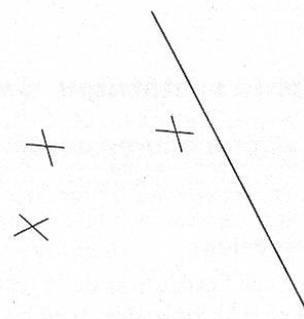


Figure (2)

Pour tracer le symétrique d'un segment, l'élève mobilise plusieurs types de procédures qui peuvent être source d'erreurs.

Ce repérage d'erreurs a permis de mettre en évidence un certain nombre de théorèmes en acte utilisés par des élèves ;

- l'image d'un segment est un segment de même longueur ;
- l'image d'un segment est un segment de même direction ;
- la symétrie orthogonale est une transformation d'un demi-plan sur un autre demi-plan.

Pour tous les élèves le symétrique d'un point est un point, en revanche le symétrique d'un segment n'est pas forcément le segment joignant le symétrique des extrémités du segment de départ.

3. Les variables didactiques

- Consignes données aux élèves : Peuvent-ils plier la feuille ?...
- Matériel mis à la disposition des élèves : équerre, règle graduée ou non, papier calque...
- Support : papier blanc ou papier quadrillé ?
- L'axe est-il horizontal ? Vertical ? Oblique ?
- La figure : Est-elle une figure « classique » ? Composée de figures classiques ? Si c'est un polygone, quel est son nombre de sommets ? La figure coupe-t-elle l'axe ? Contient-elle des cotés horizontaux ou verticaux ?

IV. Pistes de réflexion concernant l'enseignement de la symétrie axiale

Des situations-problèmes peuvent être des outils efficaces. Une des caractéristiques de ces activités est qu'elles doivent permettre à l'élève de prendre conscience de l'insuffisance de ses représentations. Pour cela, il est nécessaire qu'il ait à sa disposition un moyen de valider ses productions. Ainsi un enseignement pourrait :

- dans un premier temps, permettre aux élèves de se familiariser avec le pliage (la définition du symétrique d'une figure prendrait appui sur ce pliage) ;
- puis, dans un deuxième temps, proposer aux élèves des activités de reconnaissance d'axe de symétrie, des activités de construction d'axes et de symétriques de figures données (judicieusement choisies en fonction des obstacles repérés), des activités de formulation de méthode pour tracer le symétrique de figures que les élèves devraient exécuter sans plier leur feuille, le pliage étant réservé à la validation après débat.