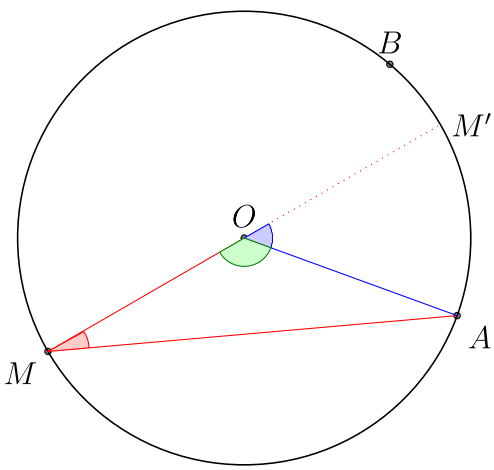
Démonstration du théorème de l'angle au centre

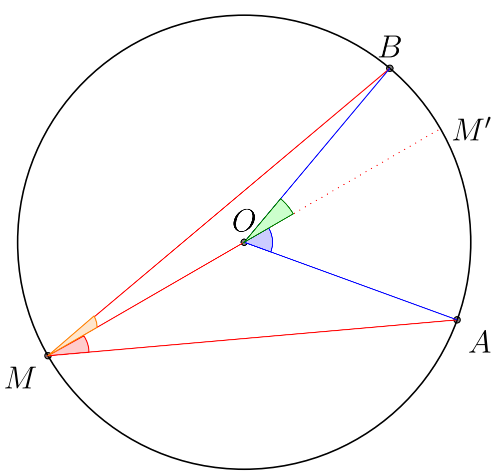
http://www.mathweb.fr

Stéphane PASQUET

Enoncé du théorème

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. Soient alors A et B deux points sur $\mathcal{C}$ et M un point sur le grand arc $\widehat{AB}$.
Alors, $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$.





Soit M' le symétrique de M par rapport à O.
Dans le triangle AOM isocèle en O, la somme de la mesure des angles est égale à 180° et les angles à la base ont la même mesure ; donc :

$$\widehat{AOM} = 180° - 2\widehat{AMO}$$

De plus, $\widehat{AOM} + \widehat{AOM'} = 180°$ car ce sont deux angles adjacents supplémentaires. D'où :

$$\widehat{AOM} = 180° - \widehat{AOM'}$$

On en déduit alors l'égalité suivante :

$$180° - \widehat{AOM'} = 180° - 2\widehat{AMO}$$

D'où :

$$2\widehat{AMO} = \widehat{AOM'}$$

Examinons le cas est le cas où A et B sont de part et d'autre de [MM'] : On remarque que :

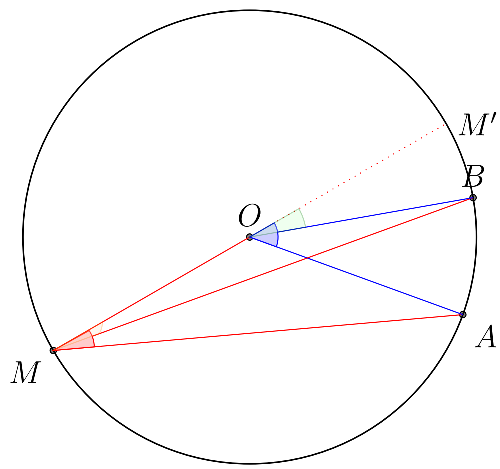
$$\widehat{AMB} = \widehat{AMO} + \widehat{BMO}$$

et

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOM'} + \widehat{BOM'}$$

Ainsi :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMO} + 2\widehat{BMO} = 2(\widehat{AMO} + \widehat{BMO}) = 2\widehat{AMB}$$



Examinons le cas est le cas où A et B sont du même côté par rapport à [MM'] : On remarque que

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMO} - \widehat{BMO}$$

et

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOM'} - \widehat{BOM'}$$

Or, ce que nous avons fait dans la première partie pour A, nous pouvons aussi le faire pour B et montrer alors que :

$$2\widehat{BMO} = \widehat{BOM'}$$

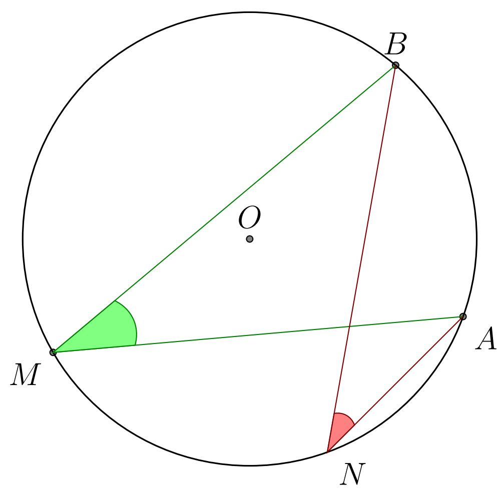
Ainsi, on a :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMO} - 2\widehat{BMO} = 2(\widehat{AMO} - \widehat{BMO}) = 2\widehat{AMB}$$

Quelle que soit la position des points A et B, on démontre ainsi que :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

C'est-à-dire que l'angle au centre a une mesure double par rapport à l'angle inscrit qui intercepte le même arc de cercle.



Un corollaire (c'est-à-dire une propriété qui découle) de ce théorème est que

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

En effet, à l'aide du théorème, on montre que ces deux angles ont une mesure double de celle de l'angle au centre et qu'en conséquence, ils ont la même mesure.