Les ensembles de nombres

Paul Milan

Professeurs des écoles le 29 septembre 2009

Table des matières

1 Différents ensembles de nombres

Les nombres que l'on apprend à l'école primaire sont : les entiers naturels, les fractions simples, les fractions décimales et les nombres décimaux.

2 Les entiers naturels : $\mathbb{N}$

Les entiers naturels sont les nombres : 0, 1, 2, 3, 4, ...

Propriétés

1. Chaque nombre entier possède un successeur.
2. Cet ensemble possède un plus petit élément « 0 ».
3. Entre deux entiers naturels quelconques, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers. On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est un ensemble discret.

4. Plus un entier naturel comporte de chiffres, plus il est grand.
5. Seules deux opérations sont toujours possibles dans cet ensemble : l'addition et la multiplication.
6. Tout entier naturel peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.

3 Les entiers relatifs : $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$: (de zählen compter en allemand) représente l'ensemble des entiers relatifs. Aux entiers naturels on associe maintenant un signe : $\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

La soustraction dans cet ensemble peut être associer à une addition. En effet lorsque l'on soustrait cela revient à ajouter l'inverse : $5 - 3 = 5 + (-3)$

Certaines personnes ont quelques hésitations avec les calculs avec les relatifs. Voici deux exemples pour lever certaines ambiguïtés :

$-3 + 9 = 6$ attention pas de règle de signe + par − égal − (donc pas de -6)
$-9 - 3 = -12$ attention pas de règle de signe −par − égal + (donc pas de $+12$)
par contre lorsque l'on multiplie la règle des signes s'impose : $(-9) \times (-3) = 27$

4 Les nombres rationnels : $\mathbb{Q}$

Définition 1 *Un nombre rationnel, q, est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction, on a alors :*

$$q = \frac{a}{b} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers avec } b \neq 0$$

On appelle a le numérateur et b le dénominateur

Remarques :

1. Tout entier est un rationnel car il suffit de prendre $b = 1$.
2. Par un souci d'unicité, on cherchera à mettre un rationnel sous la forme d'une fraction irréductible.
3. Le signe d'une fraction peut se mettre devant une fraction ou au numérateur mais pas au dénominateur

Exemples :

1. Quelques rationnels : $\frac{13}{25}$, 1 , 0, $1,25 = \frac{5}{4} \dots$
2. Pour rendre une fraction irréductible, on cherche le plus grand diviseur entre les deux entiers de la fraction. Il est donc important de connaître les principaux critères de divisibilité pour le trouver rapidement.
   $\frac{72}{54}$ n'est pas irréductible, en simplifiant par 18, on obtient $\frac{4}{3}$
3. On n'écrira pas $\frac{2}{-3}$ mais $-\frac{2}{3}$ ou $\frac{-2}{3}$

4.1 Règles opératoires

1. Pour additionner deux fractions, il est nécessaire de les mettre au même dénominateur.

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{15}{8}+\frac{13}{12}=\frac{15\times 3}{24}+\frac{13\times 2}{24}=\frac{45+26}{24}=\frac{71}{24}$$

2. Pour multiplier deux fractions, on simplifie puis on multiplie les numérateurs et dénominateurs entre eux.

$$\frac{3}{2}\times\frac{-11}{9}=-\frac{3\times 11}{2\times 9}=-\frac{1\times 11}{2\times 3}=-\frac{11}{6}$$

simplification du 3 « du haut » avec le 9 du « bas ».

$$\frac{3}{8}\times\frac{7}{6}\times\frac{4}{9}=\frac{3\times 7\times 4}{8\times 6\times 9}=\frac{1\times 7\times 1}{2\times 6\times 3}=\frac{7}{36}$$

simplification des 3 et 4 « du haut » avec les 9 et 8 du « bas ».

3. Pour diviser deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

$$\frac{17}{25}\div\frac{34}{27}=\frac{17}{25}\times\frac{27}{34}=\frac{17\times 27}{25\times 34}=\frac{1\times 27}{25\times 2}=\frac{27}{50}$$

simplification du 17 « du haut » avec le 34 du « bas ».

4.2 Égalité de deux fractions

Théorème 1 ***Produit en croix***
Si deux fractions sont égales alors le produit des extrêmes est égal au produit des milieux.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad \text{alors}\quad a\times d=b\times c$$

4.3 Propriétés

1. Entre deux fractions données, il y a une infinité de fractions possibles. On dit que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est une ensemble dense.
2. Les quatre opérations sont toujours possibles dans l'ensemble des rationnels.
3. On peut toujours décomposer un nombre décimal à l'aide de fractions décimales.

$$1,23=1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$$

5 Les nombres décimaux : $\mathbb{D}$

5.1 Définition

Définition 2 *Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.*

Exemples :

- $\dfrac{5}{4} = 1,25$ donc $\dfrac{5}{4}$ est un nombre décimal.
- $\dfrac{4}{3} = 1,3333\ldots$ donc $\dfrac{4}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Théorème 2 *Toute fraction irréductible, dont la décomposition du dénominateur en facteurs premiers ne contient que des puissances de 2 ou de 5 est un nombre décimal*

Exemples

- $\dfrac{15}{8} = \dfrac{15}{2^3}$ donc $\dfrac{15}{8}$ est décimal.
- $\dfrac{13}{50} = \dfrac{13}{2 \times 5^2}$ donc $\dfrac{13}{50}$ est décimal.
- $\dfrac{9}{14} = \dfrac{9}{2 \times 7}$ donc $\dfrac{9}{14}$ n'est pas un décimal.

Théorème 3 *Toute fraction qui n'est pas un nombre décimal possède dans sa notation décimale une série de chiffres après la virgule qui se répète à l'infini.*

Cette propriété est basé sur le principe des tiroirs. Si l'on répartit $(n + 1)$ chaussettes dans n tiroirs nécessairement il y a un tiroir qui possède au moins 2 chaussettes. Cela veut dire que lorsqu'on divise 2 entiers, on tombera au bout d'un certain nombre de divisions sur un même reste.

Exemple

Approximation du nombre π par Archimède : $\dfrac{22}{7}$

Le nombre de restes possibles en divisant par 7 sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Comme $\dfrac{22}{7}$ n'est pas un décimal, le reste 0 ne peut se produire. Il y a donc que 6 restes possibles. Au bout de 7 divisions, on retombera nécessairement sur un reste déjà obtenu.

$$\begin{array}{r|l}
22,0000000 & 7 \\ \hline
1\ 0000000 & 3,142857\ 1\ldots \\
3000000 & \\
200000 & \\
60000 & \\
4000 & \\
500 & \\
10 & \\
3 &
\end{array}$$

Nous sommes revenus à la situation initiale, la succession des restes se reproduira indéfiniment.
Nous avons donc :

$$\frac{22}{7} = 3,142857\ 142857\cdots = 3,\overline{142857}$$

5.2 La notation scientifique

Pour les nombres très grands comme 10 000 000 000 000 qui pourrait se dire "dix mille milliards", ou les très petits comme 0,000 000 000 01 qui pourrait se dire "un centième de milliardième", l'écriture décimale devient source d'erreurs et de difficultés de lecture. Une nouvelle notation peut être appliquée. Elle est basée sur les puissances de 10 ainsi que le premier chiffre significatif.

5.2.1 Quelques points de repère avec les puissances de 10

La notation $10^n = 1\overbrace{000\ldots000}^{n\ \text{zéros}}$ et $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{1000\ldots000}$

Les multiples				
Notation	Signification	Écriture	Préfixe	Symbole
10^1	dix	10	déca	Da
10^2	cent	100	hecto	h
10^3	mille	1 000	kilo	k
10^6	million	1 000 000	méga	M
10^9	milliard	1 000 000 000	giga	G
10^{12}	mille milliards	1 000 000 000 000	téra	T

Les sous-multiples				
Notation	Signification	Écriture	Préfixe	Symbole
10^{-1}	dixième	0,1	déci	d
10^{-2}	centième	0,01	centi	c
10^{-3}	millième	0,001	milli	m
10^{-6}	millionième	0,000 001	micro	μ
10^{-9}	milliardième	0,000 000 001	nano	n
10^{-12}	millième de milliardième	0,000 000 000 001	pico	p

5.2.2 Définition et exemples

Définition 3 *L'écriture d'un nombre N en notation scientifique est de la forme :*

$$N = a \times 10^n \quad \textit{pour} \quad N \geqslant 1 \quad \textit{avec} \quad 1 \leqslant a < 10$$

$$N = a \times 10^{-n} \quad \textit{pour} \quad 0 < N < 1 \quad \textit{avec} \quad 1 \leqslant a < 10$$

Conséquence :

Le nombre a ne possède qu'un chiffre avant la virgule et ce chiffre est différent de 0.
On détermine la puissance de n en comptant le nombre de décalage de rangs de la virgule.

12 420 000 000 $= 1,242 \times 10^{10}$ on a décalé la virgule de 10 rangs vers la gauche

0,000 000 000 005 607 $= 5,607 \times 10^{-12}$ on a décalé la virgule de 12 rangs vers la droite

Dans les deux exemples ci-dessous le 1 et le 5 sont appelés les premiers chiffres significatifs des deux nombres.
Il est parfois utile d'effectuer l'opération inverse, transformer la notation scientifique en notation décimale usuelle.

$5,48 \times 10^8 = 548\ 000\ 000$ on a décalé la virgule de 8 rangs vers la droite
$8{,}756\ 1 \times 10^{-4} = 0{,}000\ 875\ 31$ on a décalé la virgule de 4 rangs vers la gauche

6 Les nombres réels : $\mathbb{R}$

On pourrait penser, au vu de tous les nombres que l'on vient de voir, qu'ils suffisent à exprimer toutes les quantités mathématiques. Cependant, Pythagore a été l'un des premiers à montrer qu'il existait d'autres nombres. En effet lorsque l'on cherche à exprimer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, on trouve un nombre que l'on écrit maintenant $\sqrt{2}$, mais qui à l'époque n'avait pas encore de notation. Pythagore a alors montré que ce nombre ne pouvait pas s'écrire à l'aide d'une fraction. Ce nombre n'était pas un rationnel. Ainsi était prouvé qu'il existe des nombres irrationnels.

Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$, il est nécessaire d'effectuer des calculs un peu complexes, il faut "extraire" la racine carrée. Maintenant nos calculettes nous évitent ces calculs fastidieux. On trouve alors $\sqrt{2} \simeq 1{,}414\ 213\ldots$

On peut remarquer que ces nombres n'ont pas de série de chiffres qui se répète.

Définition 4 *Un nombre est irrationnel lorsqu'il ne peut s'écrire sous forme d'une fraction*

Exemples

- $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{17}\ldots$ irrationnels que l'on nomment radicaux
- π(la constante du cercle), $\sin 12°$, $\cos 27°\ldots$ fonctions trigonométriques
- $\ln 2$, $e\ldots$ d'autres nombres irrationnel.

On s'aperçoit que l'écriture des nombres irrationnels prend des formes très diverses. On donne en fait une écriture aux nombres que l'on utilisent fréquemment, mais d'autres encore non utilisés vous attendent pour un graphisme particulier et qui sont pour l'instant sans écriture.

Définition 5 *: Un nombre réel est un nombre qui est soit rationnel soit irrationnel. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.*

Un nombre réel est donc tout nombre que l'on trouve dans votre univers mathématique.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un ensemble continu, c'est à dire qu'il ne possède pas de " trou ". On peut donc représenter cet ensemble par une droite orientée.