NOMBRES PREMIERS

Définition

Un nombre premier est un **nombre naturel qui n'a que deux diviseurs différents : 1 et lui-même**.

11 est un nombre premier car **il ne peut se diviser que par deux seuls nombres sans laisser de reste : par 1 et par lui-même.**

Le nombre 1 ne peut se diviser que par lui-même : **il n'est pas premier**.
Le nombre 0 a une infinité de diviseurs : **il n'est pas premier**.

Le crible d'Eratosthène :

Cette méthode consiste à <u>entourer les nombres premiers et barrer les autres</u>.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

* Le 1 n'est pas premier.
* On entoure le 2 qui est premier (divisible par 1 et par lui-même).
* On barre ensuite tous les multiples de 2.
* Dès qu'on trouve un nombre non barré : il est premier et on barre tous ses multiples.
* On s'arrête à 10.
* On obtient la liste des nombres premiers.

Méthode pour savoir si un nombre est premier *(« test de primalité »)*

Exemple : 167 est-il premier ?

Vérifier s'il est divisible par les nombres premiers <u>en commençant par 2 et en allant jusqu'au nombre premier inférieur à $\sqrt{167}$</u>.

On sait que $\sqrt{167} = 12{,}922\ldots$ Donc le nombre premier inférieur est 11.

167 est –il divisible par 2 ?	Si non, continuer.	**167 n'est pas divisible par 2**
167 est –il divisible par 3 ?	Si non, continuer.	**167 n'est pas divisible par 3**
167 est –il divisible par 5 ?	Si non, continuer.	**167 n'est pas divisible par 5**
167 est –il divisible par 7 ?	Si non, continuer.	**167 n'est pas divisible par 7**
167 est –il divisible par 11 ?	Non	**<u>167 est donc un nombre premier</u>**

Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

Il s'agit d'**écrire un nombre *n* sous la forme d'un produit de facteurs qui sont tous des nombres premiers** (le nombre 1 ne figure donc pas dans la décomposition).

Exemple : $120 = 2 \times 60 = 2 \times 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

Méthode pour décomposer le nombre 882 en produit de facteurs premiers :

Diviser le nombre par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible
Calculer le quotient

Diviser le quotient obtenu par le premier nombre premier par lequel il est divisible
Calculer le quotient

Continuer ainsi jusqu'à obtenir un quotient = 1

882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

La décomposition s'écrit avec le produit de tous les nombres premiers trouvés comme diviseurs successifs =

$$882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$$

A noter : les diviseurs de 882 sont = 1, 2, 3, 7, 49 et 147.

Trouver tous les diviseurs d'un nombre

Exemple : 60 $(60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1)$

Procéder par ordre croissant et noter en même temps les diviseurs « associés » (dans l'ordre décroissant) :

1	2	3	4	6
60	30	20	15	10

Ainsi tous les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 10, 15, 20, 30 et 60.

Pour calculer « de mémoire » les diviseurs « associés » : Repérer le 1^er^ chiffre dans la décomposition, puis regarder ce qu'il reste dans la décomposition.

1	2	3	4	6
60	30	20	15	?

$(60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1) = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ **= le nombre associé à 6 est donc** $2 \times 5 = 10$

Chercher le nombre de diviseurs d'un nombre

Exemple : 60 $(60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1)$

Appliquer la formule : Si $n = a^p \times b^q \times c^r$
Alors le nombre de diviseurs est égal à $(p+1) \times (q+1) \times (r+1)$

Le nombre de diviseurs de 60 est donc = $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 3 \times 2 \times 2 = \underline{12}$

Le PPCM

Signifie le plus petit commun multiple = liste des multiples communs à deux ou plusieurs nombres.
La liste des multiples communs de deux nombres est **infinie**.

<u>Chercher le ppcm de 72 et 90</u>

Méthode 1 : <u>écrire les premiers multiples de chaque nombre</u> (si les nombres ne sont pas trop grands)

Multiples de 72 : 0 ; 72 ; 144 ; 216 ; 288 ; **360** …
Multiples de 90 : 0 ; 90 ; 180 ; 270 ; **360** ; 450 …

On écrit **le ppcm (72 ; 90) = 360**

Méthode 2 : <u>décomposer chaque nombre en produits de facteurs premiers</u>

$72 = 2^3 \text{ X } 3^2$ **et** **$90 = 2 \text{ X } 3^2 \text{ x } 5$** **ppcm (72 ; 90) = $2^3 \text{ X } 3^2 \text{ X } 5 = 8 \text{ X } 9 \text{ X } 5 = 360$**

Et <u>calculer le nombre issu à partir de tous les différents facteurs premiers en ne prenant que les exposants les plus élevés.</u>

Les autres multiples communs de deux nombres sont les multiples de ce ppcm.

Le PGCD

Signifie le plus grand commun diviseur = liste des diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres.
La liste des diviseurs communs de deux nombres est **finie**.

<u>Chercher le pgcd de 42 et 98</u>

Méthode 1 : **écrire les diviseurs de chaque nombre** (si les nombres ne sont pas trop grands)

Diviseurs de 42 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; **14** ; 21 ; 42
Diviseurs de 98 : 1 ; 2 ; 7 ; **14** ; 49 ; 98

On écrit **le pgcd (42 ; 98) = 14**

Méthode 2 : **décomposer chaque nombre en produits de facteurs premiers**

$42 = 2 \text{ X } 3 \text{ X } 7$ **et** **$98 = 2 \text{ X } 7^2$** **pgcd (42 ; 98) = $2 \text{ X } 7 = 14$**

Et <u>calculer le nombre issu à partir des différents facteurs présents en commun dans les deux décompositions en ne prenant que les exposants les plus petits.</u>

Les autres diviseurs communs de deux nombres sont les diviseurs de ce pgcd.

Les nombres premiers entre eux

Définition

Deux nombres sont premiers entre eux si **leur seul diviseur commun est 1.**

8 et 15 sont premiers entre eux car leur seul diviseur commun est 1.

Propriété des nombres premiers

Les décompositions en produit de facteurs premiers de deux nombres premiers entre eux **ne comportent aucun facteur commun**.

Deux nombres premiers entre eux ne sont pas forcément des nombres premiers.