Les nombres premiers. PGCD et PPCM

Paul Milan

Professeurs des écoles le 29 septembre 2009

Table des matières

1 Multiples et diviseurs **2**

2 Nombres premiers **2**
2.1 Définition 2
2.2 Critère d'arrêt 2
2.3 Décomposition en nombres premiers 3
2.4 Nombres de diviseurs 3
2.5 Application 4

3 PGCD et PPCM **4**
3.1 Définition 4
3.2 L'algorithme d'Euclide 5
3.3 Nombres premiers entre eux 6
3.4 Utilisation du PGCD et du PPCM 6

1 Multiples et diviseurs

Définition 1 *On dit que a est un multiple de b, si et seulement si, il existe un entier k tel que :*

$$a = kb$$

On peut dire aussi que : a est divisible par b, b est un diviseur de a ou b divise a.

Exemple :
54 est un multiple de 6 et de 9 car : $54 = 6 \times 9$
26 est un multiple de 2 et de 13 : car $26 = 2 \times 13$

2 Nombres premiers

2.1 Définition

Définition 2 *On dit d'un entier a est un nombre premier, si et seulement si il admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.*

Attention : 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Les nombres premiers inférieur à 100 sont :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 13, 79, 83, 89, 97.

2.2 Critère d'arrêt

Théorème 1 *Un nombre n'est pas premier, si et seulement si, il existe un facteur premier p tel que :*

$$2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$$

Remarque : Si l'on ne peut trouver un tel nombre p, alors le nombre est premier.

Exemples :

1. Montrons que 109 est premier.
   On effectue un encadrement : $10 < \sqrt{109} < 11$
   On essaie les diviseurs premiers jusqu'à 11 exclus, c'est à dire 2, 3, 5 et 7. Aucun de ces nombres divise 109 donc 109 est premier.

2. Montrons que 323 n'est pas premier
   On effectue un encadrement : $17 < \sqrt{323} < 18$
   323 n'est pas divisible par : 2, 3, 5, 7, 11, et 13.
   Par contre, il est divisible par 17 car : $323 = 17 \times 19$.
   Donc 323 n'est pas premier.

2.3 Décomposition en nombres premiers

Théorème 2 *Tout nombre entier supérieur ou égal à deux peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.*

Pour décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers, on teste les nombres premiers dans l'ordre croissant. On commence à 2 puis 3, 5, ...

Exemple : Décomposons 16 758 en nombres premiers

$$\begin{array}{r|l} 16\ 758 & 2 \\ 8\ 379 & 3 \\ 2\ 793 & 3 \\ 931 & 7 \\ 133 & 7 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$$16\ 758 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19$$

2.4 Nombres de diviseurs

Théorème 3 *Si un entier N se décompose en nombres premiers de la façon suivante :*

$$N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \dots$$

Alors le nombre de diviseurs de N est :

$$\textit{nombre de diviseurs} = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots$$

Exemple : Trouvons le nombre de diviseurs de 120

On décompose 120 en nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

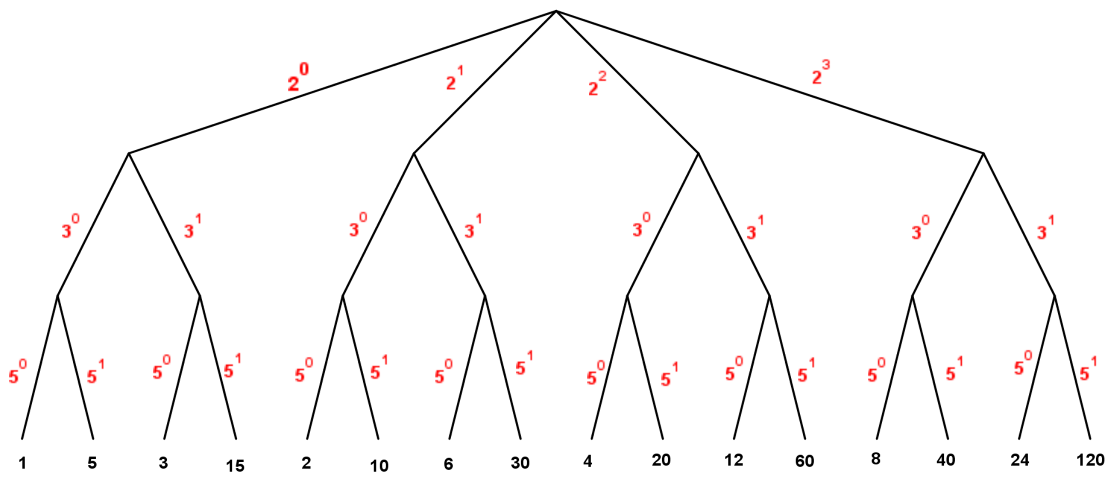
il y a donc :

$$(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 4 \times 2 \times 2 = 16 \text{ diviseurs}$$

On peut trouver les diviseurs de 120 de façon intuitives :

$$D_{120} = \{1, 120, 2, 60, 3, 40, 4, 30, 5, 24, 6, 20, 8, 15, 10, 12\}$$

On peut aussi les retrouver en faisant un arbre :



2.5 Application

Soit le problème suivant :

Déterminer le nombre entier N satisfaisant simultanément aux trois conditions ci-dessous :

1. *N est divisible par 6*
2. *N n'est pas divisible par 8.*
3. *N a exactement 15 diviseurs.*

Si N a exactement 15 diviseurs et si la décomposition en nombres premiers de N est : $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \dots$, alors on a :

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots = 15$$

La seule décomposition de 15 avec des diviseurs supérieurs à 1 est : $15 = 3 \times 5$

Donc N n'admet que deux diviseurs premiers dans sa décompostion. De plus N est divisible par 6 et $6 = 2 \times 3$, les deux facteurs premiers de N sont donc 2 et 3.

$$N = 2^\alpha 3^\beta \qquad \text{avec} \qquad (\alpha+1)(\beta+1) = 15$$

Comme N n'est pas divisible par 8 on a : $\alpha < 3$

On a donc : $\alpha + 1 = 3$ et $\beta + 1 = 5$

On trouve alors : $\alpha = 2$ et $\beta = 4$

Le nombre cherché est : $N = 2^2 \times 3^4 = 4 \times 81 = 324$

3 PGCD et PPCM

3.1 Définition

Définition 3 *On appelle $PGCD(a,b)$ le plus grand commun diviseurs des entiers a et b.*
On appelle $PPCM(a,b)$ le plus petit commun multiple des entiers a et b.

Théorème 4 *Entre le $PGCD(a,b)$ et le $PPCM(a,b)$, on a la relation suivante :*

$$PPCM(a,b) = \frac{a \times b}{PGCD(a,b)}$$

Exemples :

1. $PGCD(28,77) = 7$ et $PPCM(28,77) = \frac{28 \times 77}{7} = 28 \times 11 = 308$
2. PGCD(18,42)=6 et $PPCM(18,42) = \frac{18 \times 42}{6} = 18 \times 7 = 126$

Dans ces deux exemples, le PGCD est immédiat car les nombres ne sont pas trop grands. Lorsque cela n'est plus aussi immédiat, deux méthodes sont possibles : l'algorithme d'Euclide ou la décomposition en nombres premiers.

3.2 L'algorithme d'Euclide

Théorème 5 *Soit deux entiers a et b, pour connaître le $PPCM(a,b)$, on effectue les divisions euclidiennes successives suivantes :*

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0 \\ b &= r_0 q_1 + r_1 \\ r_0 &= r_1 q_2 + r_2 \\ \ldots & \quad \ldots \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul correspond au $PGCD(a,b)$

Exemples :

1. Déterminons le PGCD(945,882)

   On effectue les divisions suivantes :

   $$\begin{aligned} 945 &= 882 \times 1 + 63 \\ 882 &= 63 \times 14 + 0 \end{aligned}$$

   Donc $PGCD(945,882) = 63$

2. Déterminons le $PGCD(935,561)$

   On effectue les divisions suivantes :

   $$\begin{aligned} 935 &= 561 \times 1 + 374 \\ 561 &= 374 \times 1 + 187 \\ 374 &= 187 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

   Donc $PGCD(935,561) = 187$

Remarque : On s'aperçoit sur ces deux exemples de l'efficacité de cet algorithme.

A titre de comparaison, utilisons pour déterminer le $PGCD(945,882)$ une décomposition en nombres premiers.

$$\begin{array}{r|l} 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 882 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$945 = 3^3 \times 5 \times 7$ $\qquad$ $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$

Pour déterminer le PGCD, il suffit de prendre les facteurs en commun, donc :

$$PGCD(945, 882) = 3^2 \times 7 = 63$$

3.3 Nombres premiers entre eux

Définition 4 *Deux entiers a et b sont dits premiers entre eux si et seulement si*

$$PGCD(a, b) = 1$$

Exemples :

1. $PGCD(9, 16) = 1$ car $9 = 3^2$ et $16 = 4^2$.
   9 et 16 sont premiers entre eux
2. Déterminons le $PGCD(1\ 600, 229)$ par l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 1\ 600 &= 229 \times 6 + 226 \\ 229 &= 226 \times 1 + 3 \\ 226 &= 3 \times 75 + 1 \\ 3 &= 1 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

   Donc $PGCD(1\ 600, 229) = 1$,

   les nombres 1 600 et 229 sont donc premiers entre eux.

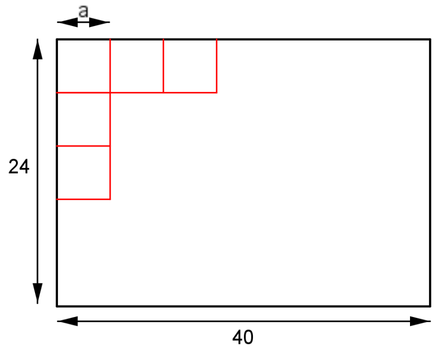
3.4 Utilisation du PGCD et du PPCM

Soit le problème suivant :

1. *On veut découper un rectangle de 24 cm sur 40 cm en carrés dont le côté est le plus long possible, sans perte.*
   Quel doit être le côté du carré ?
2. *On dispose d'un grand nombre de rectangles du type précédent que l'on veut assembler bord à bord pour former un carré le plus petit possible.*
   Quel doit être le côté du carré ?

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

1. On peut faire le schéma suivant :



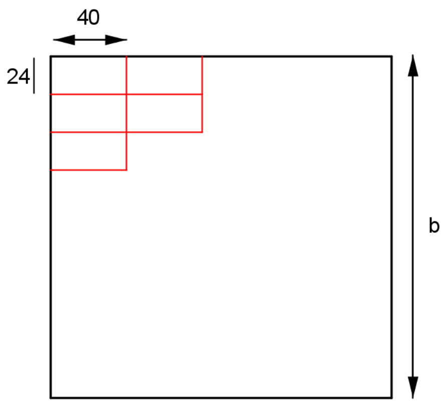
Soit a la longueur du côté du carré.

S'il n'y a pas de perte, a doit diviser 24 et 42. Donc a est un diviseur commun à 24 et 40.

Comme a doit être le plus grand possible, on a :

$a = PGCD(40, 24) = 8$

2. On peut faire le schéma suivant :



Soit b la longueur du côté du carré.

Si les rectangles sont mis bout à bout,

b doit être un multiple de 24 et 40.

Donc b est un multiple commun à 24 et 40.

Comme b doit être le plus petit possible, on a :

$$b = PPCM(40, 24) = \frac{40 \times 24}{PGCD(40, 24)}$$

$$b = \frac{40 \times 24}{8} = 40 \times 3 = 120$$