

Equations et Inéquations du 2^{ème} degré à une inconnue

II) Equations du 2^{ème} degré à une inconnue :

1) Définitions :

On appelle équation du 2^{ème} degré à une inconnue x , toute égalité de la forme $ax^2 + bx + c = 0$
Avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

Exemple : $-2x^2 + 5x - 7 = 0$ est une équation du 2^{ème} degré à une inconnue x .
($a = -2$; $b = 5$ et $c = -7$)

2) Vocabulaire

a) Discriminant

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

b) La forme canonique de $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac \text{ et } a \neq 0$$

Exemple:

$$3x^2 - 2x + 5 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad (a = 3; b = -2 \text{ et } c = 5) \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 4 - 60 = -56$$

D'où $3x^2 - 2x + 5 = 3\left[\left(x + \frac{-2}{2 \times 3}\right)^2 - \frac{-56}{4 \times 9}\right] = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{9}\right]$ Cette écriture est appelée forme canonique de $3x^2 - 2x + 5$

3) Solution d'une équation du second degré: $ax^2 + bx + c = 0$

Un réel x_0 est une solution (ou racine) de l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$

Exemple: (E): $x^2 + x - 6 = 0$

- ❖ -3 est une solution de l'équation (E): $x^2 + x - 6 = 0$ car (E): $3^2 + (-3) - 6 = 9 - 9 = 0$
- ❖ 2 est une solution de l'équation (E): $x^2 + x - 6 = 0$ car (E): $2^2 + 2 - 6 = 6 - 6 = 0$
- ❖ 5 n'est pas une solution de l'équation (E): $x^2 + x - 6 = 0$ car
(E): $5^2 + (-5) - 6 = 25 - 11 = 14 \neq 0$

4) Racines (ou solutions) d'une équation du second degré:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Soit S = l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

1^{ère} Cas : (Si $\Delta < 0$)

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racine réelle. $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Exemple: (E): $-4x^2 + 5x - 3 = 0$ on a ($a = -4$; $b = 5$ et $c = -3$)

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-4) \times (-3) = 25 - 48 = -23 < 0$$

Donc L'équation (E): $-4x^2 + 5x - 3 = 0$ n'admet pas de racine réelle. $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

2^{ème} Cas : (Si $\Delta = 0$)

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule racine dite « double ».

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \text{ donc } S_{\text{IR}} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

Exemple: (E): $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ on a

$$(a = 4 ; b = -4\sqrt{3} \text{ et } c = 3) \Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3 = 48 - 48 = 0$$

L'equation (E): $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ admet une seule racine dite « double ».

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4\sqrt{3}}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } S_{\text{IR}} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

3^{ème} Cas : (Si $\Delta > 0$)

L'equation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ donc } S_{\text{IR}} = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

Exemple: (E): $x^2 - 5x + 6 = 0$ on a ($a = 1 ; b = -5$ et $c = 6$)

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

L'equation (E): $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2} = 2 \text{ donc } S_{\text{IR}} = \{3, 2\}$$

5) Factorisation :

1^{ère} Cas : (Si $\Delta < 0$)

❖ Si $\Delta < 0$ alors on ne peut pas factoriser. $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Exemple: Factoriser l'expression : $-4x^2 + 5x - 3$ on a ($a = -4 ; b = 5$ et $c = -3$)

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-4) \times (-3) = 25 - 48 = -23 < 0 \text{ Donc On ne peut pas factoriser. } -4x^2 + 5x - 3$$

2^{ème} Cas : (Si $\Delta = 0$)

❖ si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$; $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Exemple: Factoriser l'expression $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$

$$\text{on a } (a = 4 ; b = -4\sqrt{3} \text{ et } c = 3) \text{ et } \Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3 = 48 - 48 = 0$$

L'equation (E): $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ admet une seule racine double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4\sqrt{3}}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 4\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

3^{ème} Cas : (Si $\Delta > 0$)

❖ Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
 $= a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemple: Factoriser l'expression $2x^2 - 3x - 2$

$$\text{on a } (a = 2 ; b = -3 \text{ et } c = -2) \text{ et } \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0 \text{ donc } \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

L'equation (E): $2x^2 - 3x - 2 = 0$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-(-3) + 5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) - 5}{4} = -\frac{1}{2}. \text{ D'où } 2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

6) Le discriminant réduit :

(E) : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Si $b=2b'$ alors Le nombre $\Delta' = b'^2 - ac$ est appelé discriminant réduit de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

1^{ère} Cas : (Si $\Delta' < 0$)

❖ L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racine réelle. $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Exemple: (E): $-4x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0$ on a ($a = -4$; $b = 2\sqrt{3} = 2b'$ et $c = -3$)

$$(a = -4; b' = \sqrt{3} \text{ et } c = -3) \Delta' = b'^2 - ac = \sqrt{3}^2 - (-4) \times (-3) = 3 - 12 = -9 < 0$$

Donc L'équation (E) n'admet pas de racine réelle. $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

2^{ème} Cas : (Si $\Delta' = 0$)

❖ L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule racine dite « double ». $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{b'}{a}\}$

Exemple: (E): $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ on a ($a = 4$; $b = 2 \times (-2\sqrt{3}) = 2b'$ et $c = 3$)

$$(a = 4; b' = -2\sqrt{3} \text{ et } c = 3) \Delta' = b'^2 - ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 = 12 - 12 = 0$$

L'équation (E) admet une seule racine dite « double ».

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = -\frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

3^{ème} Cas : (Si $\Delta' > 0$)

❖ L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

$$\text{donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \right\}$$

Exemple: (E): $x^2 + 8x + 6 = 0$ on a ($a = 1$; $b = 2 \times 4 = 2b'$ et $c = 6$)

$$(a = 1; b' = 4 \text{ et } c = 6) \Delta' = 4^2 - 6 = 16 - 6 = 10 > 0$$

L'équation (E) admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{10}}{1} = -4 + \sqrt{10}$ et $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{10}}{1} = -4 - \sqrt{10}$

$$\text{donc } S_{\mathbb{R}} = \{ -4 + \sqrt{10}, -4 - \sqrt{10} \}$$

Remarques : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

a) Si $ac < 0$ alors $\Delta > 0$ et l'équation (E) admet deux racines distinctes de signe contraires

$$(\text{car } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} < 0)$$

b) Si $a + b + c = 0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$ sont deux racines distinctes de (E) $S_{\mathbb{R}} = \{ 1, \frac{c}{a} \}$.

Exemple: (E): $2x^2 - 9x + 7 = 0$ on a ($a = 2$; $b = -9$ et $c = 7$)

$$a + b + c = 2 - 9 + 7 = 0 \text{ alors } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{7}{2} \text{ sont deux racines distinctes de (E) } S_{\mathbb{R}} = \left\{ 1, \frac{7}{2} \right\}.$$

c) Si $a - b + c = 0$ alors $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$ sont deux racines distinctes de (E) $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -1, -\frac{c}{a} \right\}$.

Exemple: (E): $3x^2 + 4x + 1 = 0$ on a ($a = 3$; $b = 4$ et $c = 1$)

$$a - b + c = 3 - 4 + 1 = 0 \text{ alors } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \text{ sont deux racines distinctes de (E) } S_{\mathbb{R}} = \left\{ -1, -\frac{1}{3} \right\}$$

7) Somme et produit des racines d'une équation De second degré :

Soit (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ une équation de second degré admet deux racines distinctes x_1 et x_2

$$\text{On pose } S = x_1 + x_2 \text{ et } P = x_1 x_2 \text{ alors } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Conséquence :

❖ Si x_1 est une racine de (E) on peut déterminer l'autre racine x_2 en utilisant $S = x_1 + x_2$ ou $P = x_1 x_2$ si $x_1 \neq 0$

Exemple : Soit (E) : $2x^2 + (\sqrt{3}-2\sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

1) Sans calculer le discriminant Δ montrer que l'équation (E) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 de signes contraires

2) Vérifier que $\sqrt{2}$ est une racine de l'équation (E)

3) Déterminer alors sans calculer le discriminant Δ l'autre racine.

Réponse : Soit (E) : $2x^2 + (\sqrt{3}-2\sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$ ($a=2$; $b=\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ et $c=-\sqrt{6}$)

1) $ac = -2\sqrt{6} < 0$ alors $\Delta > 0$ et l'équation (E) admet deux racines distinctes de signe contraires

(car $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} < 0$)

2) $2(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-2\sqrt{2})\sqrt{2} - \sqrt{6} = 4 + \sqrt{6} - 4 - \sqrt{6} = 0$ donc $\sqrt{2}$ est une racine de l'équation (E)

3) On a $x_1 = \sqrt{2}$ est une racine de l'équation (E) on peut déterminer l'autre racine x_2 en utilisant

$S = x_1 + x_2$ ou $P = x_1 x_2$

1^{ère} méthode :

(E) : $2x^2 + (\sqrt{3}-2\sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$ ($a=2$; $b=\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ et $c=-\sqrt{6}$)

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2} \text{ et } x_1 = \sqrt{2} \text{ sig}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2} - x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{D'où } S_{IR} = \left\{ \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

2^{ème} méthode :

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{6}}{2} \text{ et } x_1 = \sqrt{2} \text{ sig } x_2 = \frac{-\sqrt{6}}{x_1} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{D'où } S_{IR} = \left\{ \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

8) Recherche de deux réels x et y connaissant leur Somme S et leur produit P :

❖ Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système suivant :
$$\begin{cases} x + y = S \\ x y = P \end{cases}$$

Soit S et P deux réels

1^{ère} Cas : Si $S^2 - 4P < 0$ alors il n'existe aucun couple (x, y) tel que
$$\begin{cases} x + y = S \\ x y = P \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$$

2^{ème} Cas : Si $S^2 - 4P \geq 0$ alors il existe deux réels x et y tel que
$$\begin{cases} x + y = S \\ x y = P \end{cases}$$

Avec x et y sont deux racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

$$S_{\mathbb{R}^2} = \{(x, y); (y, x)\}$$

Exemple 1 :

Trouver deux réels x et y tel que :
$$\begin{cases} x + y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ x y = 1 \end{cases}$$

Réponse : On pose $S = x + y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $P = x y = 1$

On a $S^2 - 4P = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{18}{4} - 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$ donc il existe deux réels x et y tel que
$$\begin{cases} x + y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ x y = 1 \end{cases}$$

Avec x et y sont deux racines de l'équation $X^2 - SX + P = X^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}X + 1 = 0$ on a

$$(a = 1; b = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ et } c = 1) \quad \Delta = S^2 - 4P = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{18}{4} - 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$$

$$x_1 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right); \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

Exemple 2 :

Trouver deux réels x et y tel que :
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x y = 5 \end{cases}$$

Réponse : On pose $S = x + y = 4$ et $P = x y = 5$

On a $S^2 - 4P = (4)^2 - 4 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$

alors il n'existe aucun couple (x, y) tel que
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x y = 5 \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$$

II) Inéquations du second degré à une inconnue réelle:

1. Définitions : Les inéquations du type $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ qu'on appelle inéquation du second degré à une inconnue réelle.

Exemple : $5x^2 + 3x - 4 \geq 0$ est une inéquation du second degré à une inconnue réelle x

2. Résolution de l'inéquation du second degré à une inconnue x :

- ❖ Résoudre une inéquation du second degré à une inconnue x , c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à x pour que l'inégalité soit juste.
- ❖ En étudiant le signe de $ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, on pourra résoudre les inéquations du type $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.
- ❖ Le signe de $ax^2 + bx + c$ dépend de signe de a et du signe de Δ

Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$: avec $a \in \mathbb{R}^*$

1^{ère} Cas : (Si $\Delta < 0$)

- ❖ Si $\Delta < 0$ alors le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.



Exemples :

a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-4x^2 + 5x - 3 < 0$ on a ($a = -4 < 0$; $b = 5$ et $c = -3$)

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-4) \times (-3) = 25 - 48 = -23 < 0$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $-4x^2 + 5x - 3 < 0$ (car $a = -4 < 0$).

$$\text{D'où } S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-4x^2 + 5x - 3 \geq 0$ on a ($a = -4 < 0$; $b = 5$ et $c = -3$)

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-4) \times (-3) = 25 - 48 = -23 < 0$$

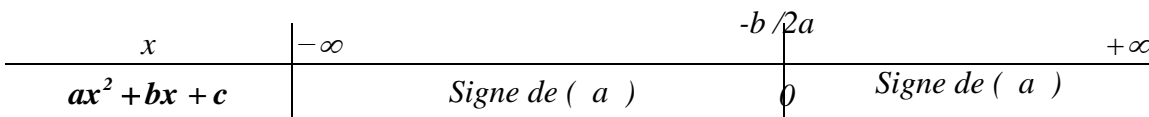
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $-4x^2 + 5x - 3 < 0$ (car $a = -4 < 0$).

$$\text{D'où } S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

2^{ème} Cas : (Si $\Delta = 0$)

- ❖ si $\Delta = 0$ alors L'équation (E): $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule racine double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

et $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$ alors le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a .



Exemples :

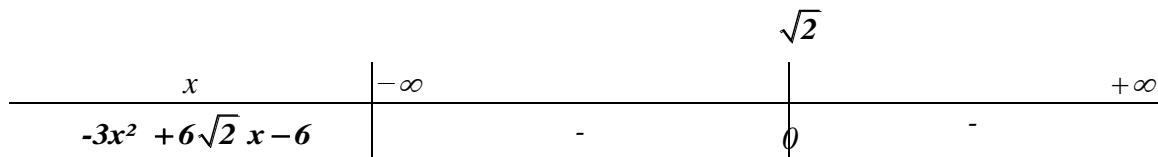
a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 < 0$.

On a : ($a = -3 < 0$; $b = 6\sqrt{2}$ et $c = -6$)

$\Delta = (6\sqrt{2})^2 - 4 \times (-3) \times (-6) = 72 - 72 = 0$ alors L'équation $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 = 0$ admet une seule racine

double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6\sqrt{2}}{2 \times (-3)} = \sqrt{2}$ et $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 = -3(x - \sqrt{2})^2$ alors le signe de

$-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6$ est celui de $a = -3 < 0$



Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 \leq 0$ D'où $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 \leq 0$ D'où $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

c) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 \geq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 \leq 0$ D'où $S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt{2}\}$

d) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 \leq 0$.

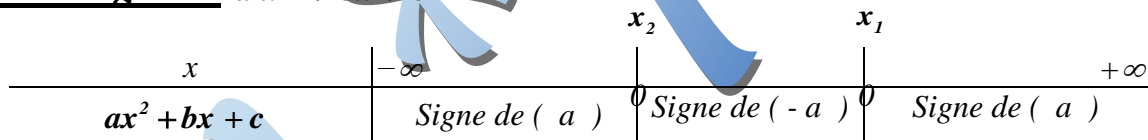
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $-3x^2 + 6\sqrt{2}x - 6 \leq 0$ D'où $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

3^{ème} Cas : (Si $\Delta > 0$)

Si $\Delta > 0$ L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

on suppose que $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} > x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Tableaux de signes : $ax^2 + bx + c$



Exemples :

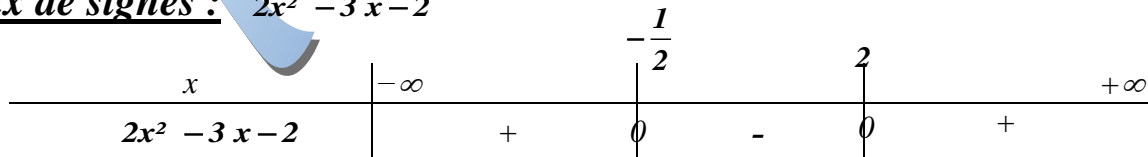
a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 < 0$

on a ($a = 2 > 0; b = -3$ et $c = -2$) et $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$ donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

L'équation (E): $2x^2 - 3x - 2 = 0$ admet deux racines distinctes

$x_1 = \frac{-(-3) + 5}{4} = \frac{8}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-3) - 5}{4} = -\frac{1}{2}$. D'où $2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)(x + \frac{1}{2})$

Tableaux de signes : $2x^2 - 3x - 2$



$$S_{\mathbb{R}} = \left] -\frac{1}{2}, 2 \right[$$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$: $S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{1}{2}, 2 \right]$

c) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$: $S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] 2, +\infty \right[$

d) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 > 0$: $S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] 2, +\infty \right[$

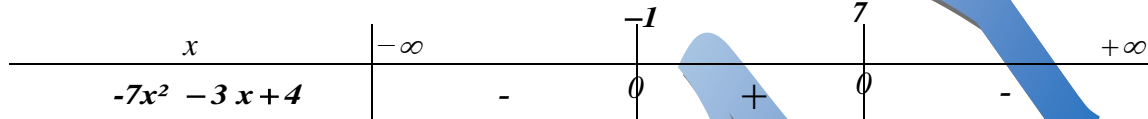
Exemples :

- a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-7x^2 - 3x + 4 < 0$
on a ($a = -7 < 0; b = -3$ et $c = 4$)

$a - b + c = -7 - (-3) + 4 = 0$ alors $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{4}{-7} = \frac{4}{7}$ sont deux racines distinctes

de l'équation (E): $-7x^2 - 3x + 4 = 0$. D'où $-7x^2 - 3x + 4 = -7(x+1)\left(x - \frac{4}{7}\right)$

Tableaux de signes : $-7x^2 - 3x + 4$



$$S_{\mathbb{R}} =] -\infty, -1[\cup \left] \frac{4}{7}, +\infty \right[$$

- b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-7x^2 - 3x + 4 \leq 0$: $S_{\mathbb{R}} =] -\infty, -1] \cup \left[\frac{4}{7}, +\infty \right[$

- c) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-7x^2 - 3x + 4 \geq 0$: $S_{\mathbb{R}} = \left[-1, \frac{4}{7} \right]$

- d) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-7x^2 - 3x + 4 > 0$: $S_{\mathbb{R}} = \left] -1, \frac{4}{7} \right[$

RECAPITULATIF COMPLET DU CHAPITRE Equations et Inéquations du 2^{ème} degré à une inconnue

$P(x) = ax^2 + bx + c$ est un trinôme du second degré ($a \neq 0$), et $\Delta = b^2 - 4ac$ est son discriminant.

Sa forme canonique est $ax^2 + bx + c = a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$

	Si $\Delta < 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta > 0$																								
Racines (solutions de $ax^2 + bx + c = 0$)	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racine réelle. $S_{IR} = \emptyset$.	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule racine double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ donc $S_{IR} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ donc $S_{IR} = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$																								
Factorisation $ax^2 + bx + c$	on ne peut pas factoriser. $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$	$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ $= a(x - x_1)(x - x_2)$																								
Tableaux de signes $P(x) = ax^2 + bx + c$	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Signe de $P(x)$</td> <td colspan="2" style="padding: 5px; text-align: center;">signe de a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	Signe de $P(x)$	signe de a		<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">α</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Signe de $P(x)$</td> <td style="padding: 5px;">signe de a</td> <td style="padding: 5px;">signe de a</td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">$\alpha = -\frac{b}{2a}$</p>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	Signe de $P(x)$	signe de a	signe de a		<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">x_1</td> <td style="padding: 5px;">x_2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Signe de $P(x)$</td> <td style="padding: 5px;">signe de a</td> <td style="padding: 5px;">opposé du signe de a</td> <td style="padding: 5px;">opposé du signe de a</td> <td style="padding: 5px;">signe de a</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$</p>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	Signe de $P(x)$	signe de a	opposé du signe de a	opposé du signe de a	signe de a
x	$-\infty$	$+\infty$																									
Signe de $P(x)$	signe de a																										
x	$-\infty$	α	$+\infty$																								
Signe de $P(x)$	signe de a	signe de a																									
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																							
Signe de $P(x)$	signe de a	opposé du signe de a	opposé du signe de a	signe de a																							

*N * M Y*