Chapitre M4

Algèbre 11

FONCTIONS LOGARITHMES. FONCTIONS EXPONENTIELLES

Capacités	Connaissances
Etudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme népérien, sur un intervalle donné.	Fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$. Définition du nombre e. Propriétés opératoires de la fonction logarithme népérien.
Etudier les variations et représenter graphiquement la fonction logarithme décimal, sur un intervalle donné. Exploiter une droite tracée sur du papier semi-logarithmique.	Fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$. Propriétés opératoires de la fonction logarithme décimal.
Interpréter e^b comme la solution de l'équation $\ln x = b$. Etudier les variations et représenter graphiquement la fonction $x \mapsto e^x$ sur un intervalle donné.	La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Propriétés opératoires de la fonction exponentielle de base e.
Etudier les variations des fonctions $x \mapsto e^{ax}$ (a réel non nul).	Dérivée des fonctions $x \mapsto e^{ax}$ (a réel non nul).
Résoudre des équations du type $e^{ax} = b$ et des inéquations du type $e^{ax} \geq b$ (ou $e^{ax} \leq b$). résoudre des équations du type $\ln(ax) = b$ (avec a>0) et des inéquations du type $\ln(ax) \geq b$ (ou $\ln(ax) \leq b$) (avec a>0).	Processus de résolution d'équations du type $e^{ax} = b$ et d'inéquations du type $e^{ax} \geq b$ (ou $e^{ax} \leq b$). Processus de résolution d'équations du type $\ln(ax) = b$ (avec a>0) et des inéquations du type $\ln(ax) \geq b$ (ou $\ln(ax) \leq b$) (avec a>0).

<u>Contenu du dossier :</u>

- ☐ **Cours**
- ☐ **Exercices (Livre Chapitre 5 pages 65-78)**
- ☐ **Corrigé des exercices**
- ☐ **Evaluation EM4**
- ☐ **Corrigé de l'évaluation EM4**

TBP M4 A&B

Partie A : Fonctions logarithmes

A.I Fonction logarithme népérien

A.I.1. Tracé et observation de la fonction logarithme

Activité 1

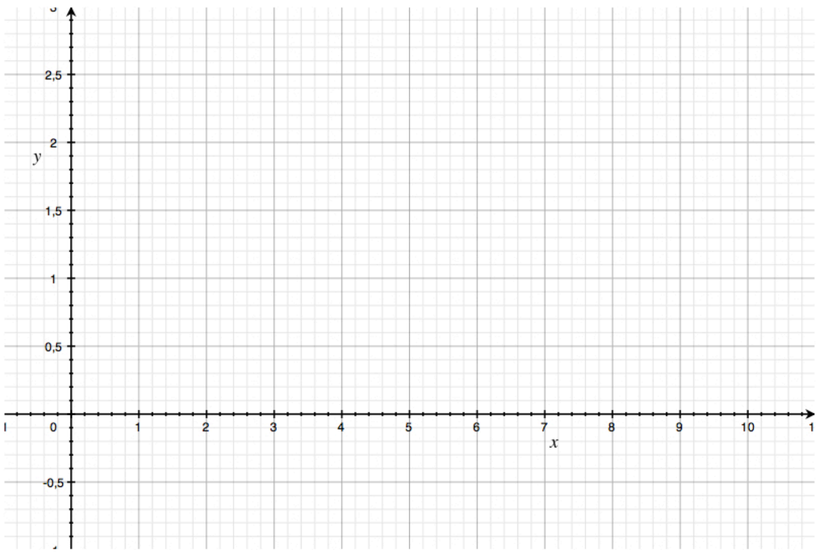
La séquence calculatrice $\boxed{\ln}\boxed{(}\ 5\ \boxed{)}\boxed{\text{EXE}}$ permet d'obtenir une valeur approchée d'un nombre que l'on appelle le **logarithme népérien** du nombre 5.

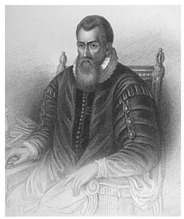
Vérifier que $\ln 5 \approx 1{,}609$.

En utilisant la touche ln de la calculatrice, compléter, dans le tableau ci-dessous, les colonnes pour lesquelles c'est possible (résultats arrondis à 0,01 près).

x	- 20	-5	0	0,2	0,6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
$\ln x$																	

Placer les points (x ; ln x) dans le repère ci-dessous. **Tracer** la courbe représentative.





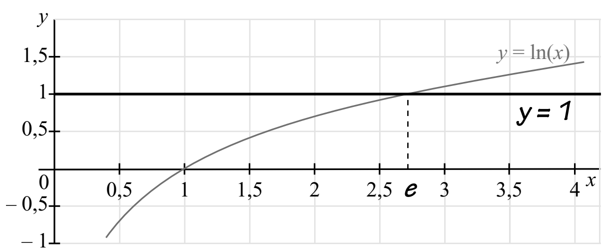
John Napier
1550-1617

A partir du tableau et du graphique précédent, on peut supposer que la fonction **ln** est définie pour tout réel $\boxed{\text{strictement positif}}$ / $\boxed{\text{strictement négatif}}$ c'est-à-dire sur l'intervalle

$\boxed{]0\ ;+\infty[}$ / $\boxed{]-\infty ; 0[}$.

On constate que ln (1) = ... et que ln (............) ≈ 1

A.I.2. Découvrir le nombre e



L'équation ln (x) = 1 a une solution dans $]0;+\infty[$.
Cette solution est notée e.
Ainsi, ln(e) = 1

Activité 2

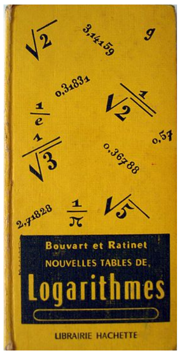
Chercher la valeur approchée à 10^{-7} de e:

e ≈ ....

A.I.3. Connaître la dérivée, le sens de variation et le signe de la fonction ln

Sur]0; + ∞ [, la fonction dérivée de la fonction ln est la fonction inverse, pour tout $x > 0$:

$\ln'(x) =$



Déduire le tableau de variation et de signe de la fonction logarithme népérien.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	
$\ln(x)$	
signe de $\ln(x)$	

Activité 3

Calculer la dérivée de la fonction f telle que $f(x) = 4\ln(x)$

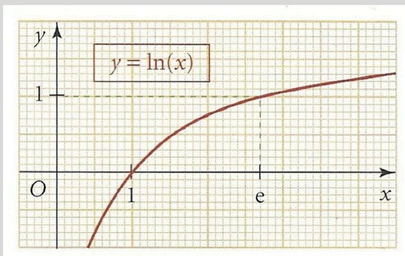
$f'(x) =$........

Fonction logarithme népérien

- La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie pour tout x>0, telle que ln(1) = 0 et sa dérivée est la fonction inverse.

  Si $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Elle est croissante ; ln(e) = 1 ; e $\approx$ 2,718.

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖	+	+	
$f(x) = \ln(x)$	‖	0 ↗	1 ↗	



A.I.4. Propriétés algébriques de la fonction ln

A.I.4.1 Transformer le logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance

Activité 5

Calculer et **comparer**:

ln (6) = ln (2×3)≈..............; ln(2) + ln(3) ≈ ....donc ln (2×3)....ln(2) + ln(3)

ln $\left(\frac{2}{3}\right)$≈...............; ln 2 − ln 3≈................ donc ln $\left(\frac{2}{3}\right)$ .... ln 2 − ln 3

ln 9 = ln 3^2 ≈..............; 2×ln 3≈...........; donc ln 3^2 .... 2×ln 3

Propriétés à retenir:

$\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$ (avec $e \approx 2{,}718$)

$\ln (a \times b) = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$\ln a^n = n \ln a$ donc $\ln e^n = n$

A.I.4.2 Comment modifier l'écriture d'un nombre où figure ln ?

Méthode 1:

Etape 1 : Identifier la (ou les propriétés) du paragraphe **A.I.1.4** à appliquer

Etape 2 : Appliquer la (ou les) propriété (s).

Activité 5

a) ln(14) en fonction de ln(2) et de ln(7);

ln(14) = ...

b) $\ln\left(\frac{7}{3}\right)$ en fonction de ln(3) et de ln(7);

$\ln\left(\frac{7}{3}\right)$ = ...

c) $\ln(2^9)$ en fonction de ln(2);

$\ln(2^9)$ = ...

d) $\ln\left(\frac{1}{13}\right)$ en fonction de ln(13)

$\ln\left(\frac{1}{13}\right)$ = ...

e) $\ln\left(\frac{25}{16}\right)$ en fonction de ln(2) et de ln(5);

$\ln\left(\frac{25}{16}\right)$ = ...

f) $\ln(11e^{-2})$ en fonction de ln(11).

$\ln(11e^{-2})$ = ...

Exercices : ☐ **5 p 66** ☐ **6 p 66** ☐ **7 p 66** ☐ **8 p 66**

☐ **11 p 66** ☐ **13 p 66** ☐ **15 p 66**

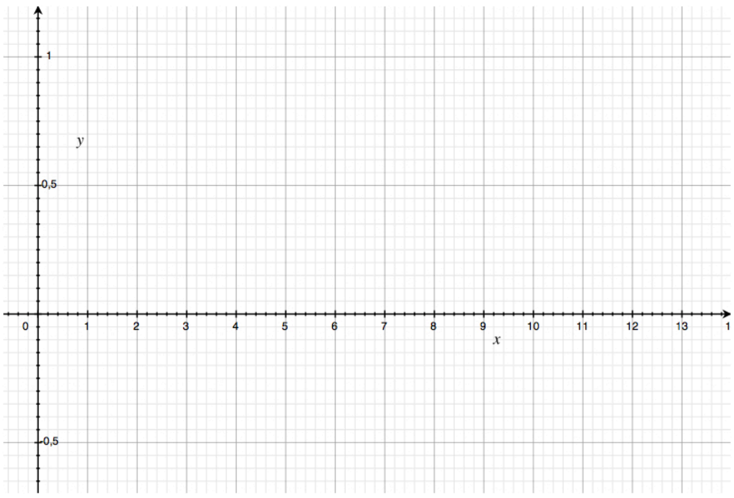
A.II. Fonction logarithme décimal

A.II.1. Tracé et observation de la fonction logarithme décimal

Utiliser la touche $\boxed{\textbf{log}}$ de la calculatrice, pour **compléter** les cases du tableau (résultats arrondis à 0,01 près).

x	- 20	-5	0	0,2	0,6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
log *x*																	

Placer les points (*x* ; log *x*) dans le repère ci-dessous. **Tracer** la courbe représentative.



A.II.2. Transformer le logarithme décimal d'un produit, d'un quotient, d'une puissance

A retenir:

$\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$

$\log (ab) = \log a + \log b$

$\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$ donc $\log \dfrac{1}{a} = -\log a$

$\log a^n = n \log a$ donc $\log 10^n = n$

Activité 6

1. Calculez chacun des nombres suivants (pensez aux puissances de 10).

log(1) = ...;

log(10) = ...;

log(100) = ...;

log(1 000) = ...;

log(0,1) = ...;

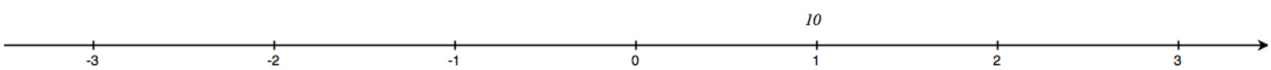
log(0,01) = ...;

log(0,001) =............................

2. La droite graduée ci-dessous possède une graduation linéaire.

En italique, écrire les nombres qui ont pour logarithmes décimaux -3, -2, -1 …

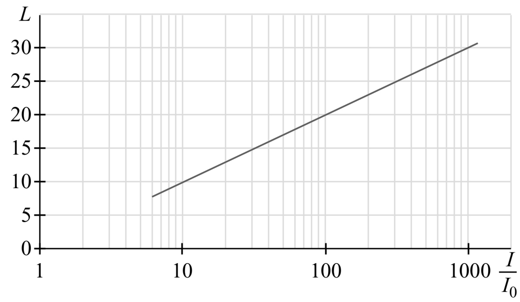
Exemple: log 10 =1



On obtient ainsi, au-dessus de l'axe, une "graduation logarithmique".

A.II.3. Comment exploiter une droite tracée sur papier semi-logarithmique?

Le segment de droite tracé ci-contre sur l'intervalle [5 ; 1200] est la courbe représentative, sur papier semi-logarithmique, de la fonction niveau d'intensité acoustique L en dB (décibel), en fonction du rapport $\frac{I}{I_0}$ de l'intensité acoustique I à l'intensité I_0 du seuil auditif de l'oreille humaine.



Déterminer l'équation de cette droite.

1. On écrit l'équation générale :

$L(\frac{I}{I_0}) = a\ \mathbf{log}\ (\frac{I}{I_0}) + b$

2. On cherche les coefficients a et b.
3. On écrit l'équation de la droite

1. ....

....

2. ....

....

....

....

....

3. ....

La **fonction logarithme décimal**, notée log, est définie pour $x > 0$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Ainsi, log(1) = 0 et log(10) = 1.

Un tracé de la courbe représentative de cette fonction (à compléter) est donné ci-dessous.

La fonction log est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Exercices : ☐ **23 p 67** ☐ **24 p 67** ☐ **26 p 67** ☐ **27 p 67**

Partie B : Fonctions exponentielles

Activité 7 *sans calculatrice*

1. Relier chaque nombre de la 1[ère] colonne à sa simplification.

$7^2 \times 7^3$ •	• 7^{-1}	$\frac{2^5}{2^3}$ •	• 2^{-2}
$7^3 \times 7^3$ •	• 7^6	$\frac{2^5}{2^{-3}}$ •	• 2^{-8}
$7^{-2} \times 7^3$ •	• 7^1	$\frac{2^{-5}}{2^3}$ •	• 2^2
$7^2 \times 7^{-3}$ •	• 7^5	$\frac{2^{-5}}{2^{-3}}$ •	• 2^8

2. Rayer la réponse inexacte

a) $3{,}1^{12}$ est égal à :	$\boxed{3{,}1^4 \times 3{,}1^7}$	$\boxed{(3{,}1^4)^3}$	$\boxed{(3{,}1^{-6})^{-2}}$
b) 5^{10} est égal à :	$\boxed{5^8 \times 5^2}$	$\boxed{(5^{-2})^{-5}}$	$\boxed{(5^{-5})^2}$
c) $4{,}5^{-6}$ est égal à :	$\boxed{\frac{4{,}5^{-2}}{4{,}5^{-3}}}$	$\boxed{(4{,}5^{-2})^3}$	$\boxed{(4{,}5^3)^{-2}}$

3. Compléter

$\ln(e^2)$ = ...; $\ln(e^{42})$ = ...; $\ln(e^{-24})$ = ...;

B.I. Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$

B.I.1. Définition

Soit b un nombre réel le nombre e^b est le seul nombre solution, dans $]0; +\infty[$, de l'équation $\ln(x) = b$.

Ainsi, $e^b > 0$ et $\ln(e^b) = b$.

Du fait de la définition de e^b pour tous réels a et b, où $a > 0$, $a = e^b$ équivaut à $\ln(a) = b$.

Activité 8

•*sans calculatrice :*

$e^{\ln(0,4)}$ = ...; $e^{\ln(1,7)}$ = ...; $e^{\ln(3,5)}$ = ...; $e^{\ln(12)}$ = ...;

***Vérifier** les résultats à l'aide de la calculatrice*

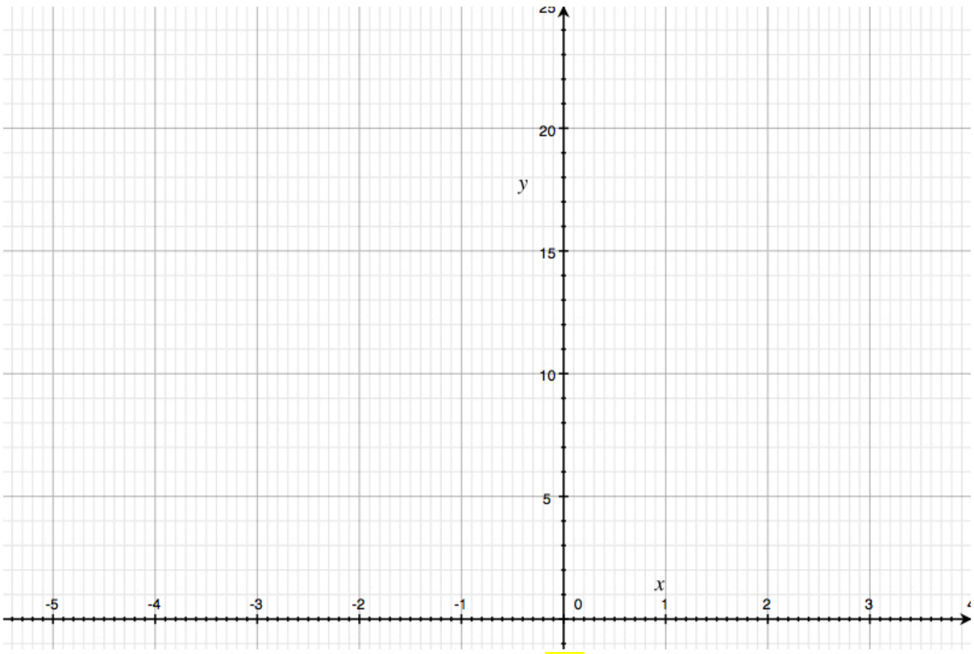
Ainsi, $e^{\ln(b)} = b$.

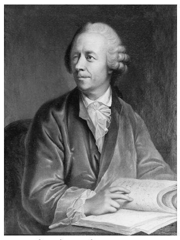
B.I.2. Tracé et observation de la fonction e^x

Utiliser la touche $\boxed{e^x}$ de la calculatrice, pour **compléter** les cases du tableau (résultats arrondis à 0,1 près).

x	- 20	-5	-2	-1	0	0,5	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4	5	6
e^x																	

Placer les points (x ; e^x) dans le repère ci-dessous. **Tracer** la courbe représentative.




Léonhard EULER*
1707-1783

**: Euler a introduit la notion de fonction et a été le premier à écrire f (x) pour désigner la fonction f appliquée à l'argument x, en 1734. Il a également introduit la notation moderne des fonctions trigonométriques, la lettre e pour la base du logarithme naturel (également connue sous le nom de nombre d'Euler) en 1727, la lettre grecque Σ pour désigner une somme en 1755 et la lettre i pour représenter l'unité imaginaire, en 1777. L'utilisation de la lettre grecque π pour désigner le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre a également été popularisée par Euler, mais celui-ci n'est pas à l'origine de la notation.*

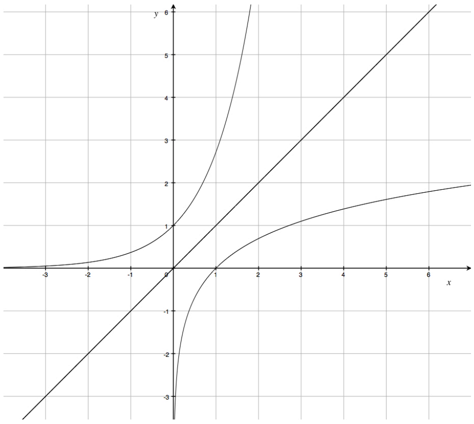
Activité 9 : Rayer les encadrés inexacts**.**

a) La courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$ est située $\boxed{\text{au-dessus}}$ / $\boxed{\text{au-dessous}}$ de l'axe des abscisses, donc, pour tout nombre réel x, e^x $\boxed{> 0}$ / $\boxed{< 0}$

b) La courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$, donc $\boxed{\text{« monte »}}$ / $\boxed{\text{«descend »}}$ donc cette fonction est strictement $\boxed{\text{croissante}}$ / $\boxed{\text{décroissante}}$ sur ℝ.

c) La fonction $x \mapsto e^x$ étant strictement $\boxed{\text{croissante}}$ / $\boxed{\text{décroissante}}$ sur ℝ, elle est strictement $\boxed{\text{croissante}}$ / $\boxed{\text{décroissante}}$ sur tout intervalle I de nombres réels

Le tracé ci-contre représente les 3 fonctions :
$x \mapsto e^x$; $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$.
On remarque que, si le repère est orthonormal, la courbe de la fonction .... est symétrique de celle de la fonction .... par rapport à la droite d'équation .... On dit que les fonctions .... et .... sont des fonctions ....:
Si $\ln(a) = b$ alors, $a =$ ....



B.II.Propriétés algébriques de la fonction ln

B.II.1. Transformer l'exponentielle d'une somme, d'une différence, du produit d'un réel par un entier relatif

Activité 10

Calculer et **comparer** :

$e^{2+3} = e^5 \approx$ ....; $e^2e^3 \approx$ .... donc : e^2e^3 .... e^{2+3}

$e^{2-3} = e^{-1} \approx$ ....; $\frac{e^2}{e^3} \approx$ .... donc : $\frac{e^2}{e^3}$ .... e^{2-3}

$e^{2\times3} = e^6 \approx$ ....; $(e^2)^3 \approx$ .... donc $(e^2)^3$ .... $e^{2\times3}$

Propriétés à retenir:

$e^0 = 1$; $e^1 = e$ (avec $e \approx 2{,}718$)
$e^{a+b} = e^ae^b$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ *donc* $\frac{1}{e^b} = e^{-b}$
$(e^a)^b = e^{ab}$
$e^{\ln(b)} = b$.

B.II.2. Comment modifier l'écriture d'un nombre où figure des puissances de e ?

Méthode 2:

Etape 1 : Identifier la (ou les propriétés) du paragraphe **B.II.1**. à appliquer
Etape 2 : Appliquer la (ou les) propriété (s).

Activité 11

Simplifier les écritures

a) $e^{2,4}e^{1,5}$ = ...

b) $e^{2,4}e^{-1,3}$ = ...

c) $(e^{7,6})^3$ = ...

d) $\frac{e^{2,1}}{e^{0,9}}$ = ...

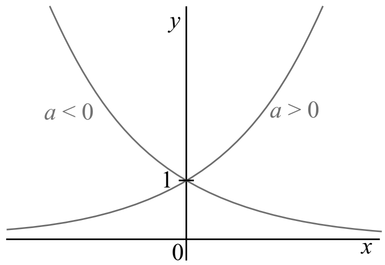
e) $\frac{1}{e^{-4,9}}$ = ...

f) $\left(\frac{e^{1,3}}{e^{2,1}}\right)e^{0,8}$ = ...

B.III.Fonctions exponentielles $x \mapsto e^{ax}$, où a est un nombre réel non nul

B.III.1. Sens de variation et signe de la fonction $x \mapsto e^{ax}$

Soit la fonction exponentielle telle que $x \mapsto e^{ax}$ avec a un nombre réel non nul.



• Cette fonction est :

- strictement décroissante si a 0
- strictement croissante si a 0

• Pour tout x et a réels, e^{ax} 0

Activité 12

Soit les fonctions f, g, h et k telles que:

$f(x) = e^{0,8x}$; $g(x) = e^{-1,5x}$; $h(x) = e^{2,5x}$; $k(x) = e^{-0,5x}$.

1. Quelles sont les fonctions croissantes ? ....

2. Quelles sont les fonctions décroissantes ? ....

B.III.2. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ax}$

Sur ℝ la fonction dérivée de la fonction $f(x) = e^{ax}$ est la fonction f' telle que :

$$f'(x) = (e^{ax})' = \text{...............}$$

Activité 13

Calculer la dérivée de la fonction f telle que $f(x) = e^{-3x}$

$f'(x)$ =.. puisque pour tout x et a réels, e^{ax} ....0, alors :

$f'(x)$ 0

Quel est le coefficient de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -3?

....

Déduire le tableau de variation et de signe de la fonction f (x) = e^{-3x}.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$ =	
$f(x) = e^{-3x}$	
signe de $f(x) = e^{-3x}$	

Exercices : ☐ 31 p 68 ☐ 33 p 68 ☐ 34 p 68 ☐ 35 p 68 ☐ 37 p 68 ☐ 41 p 68

Partie C : Résolution d'équations

C.I. Equations du type ln $(ax) = b$ (avec a > 0) et des inéquations du type ln $(ax) \geq b$ (ou ln$(ax) \leq b$) (avec $a > 0$).

Méthode 3 :

Etape 1 : Transformer l'équation sous la forme ln $(ax) = b$ (ln $(ax) \geq b$)

Etape 2 : Prendre l'exponentielle de chaque coté de l'équation (ou de l'inéquation)

Etape 3 : Utiliser les propriétés du **II.1.** et **isoler** x suivant les règles de la résolution des équations (inéquations).

Etape 4 : Présenter la (ou les) solution (s).

Activité 14

1. Résoudre l'équation suivante 2ln $(3x) = 9$

Etape 1 : On transforme l'équation 2ln $(3x) = 9$:   ln $(3x)$ = ...

Etape 2 : On écrit l'exponentielle de chaque terme de l'équation: ....

Etape 3 : On utilise la propriété, $e^{\ln(b)} = b$.: ....

....

....

....

Etape 4 : la solution de l'équation est: x = ...

2. Résoudre l'inéquation suivante ln $(5x) > 6$

Etape 1 : L'inéquation ln $(5x) > 6$ est déjà sous la forme **ln $(ax) \geq b$**.

Etape 2 : On écrit l'exponentielle de chaque terme de l'équation: ....

Etape 3 : On utilise la propriété $e^{\ln(b)} = b$: ....

....

....

....

Etape 4 : les solutions de l'inéquation sont: $x \in$ ....

C.II.Equations du type $e^{ax} = b$ et des inéquations du type $e^{ax} \geq b$ (ou $e^{ax} \leq b$).

Méthode 4:

Etape 1 : Transformer l'équation sous la forme $e^{ax} = b$ ($e^{ax} \geq b$)

Etape 2 : prendre le **ln** de chaque coté de l'équation (ou de l'inéquation)

Etape 3 : Utiliser les propriétés du **II.1.** et isoler x suivant les règles de la résolution des équations (inéquations).

Etape 4 : Présenter la (ou les) solution (s).

Activité 15

1. Résoudre l'équation suivante $2e^{3x} = 9$

Etape 1 : On transforme l'équation $2e^{3x} = 9$: $e^{3x} =$ ....

Etape 2 : On écrit le ln de chaque terme de l'équation: ....

Etape 3 : On utilise la propriété $\ln(e^b) = b$ ....

....

....

....

Etape 4 : la solution de l'équation est: $x =$ ....

2. Résoudre l'inéquation suivante $e^{2x} > 10$

Etape 1 : L'inéquation $e^{2x} > 10$ est déjà sous la forme ....

Etape 2 : On écrit le ln de chaque terme de l'équation: ....

Etape 3 : On utilise la propriété $\ln(e^b) = b$ ....

....

....

....

Etape 4 : les solutions de l'inéquation sont: $x \in$ ....

Exercices :	☐ **45 p 69**	☐ **46 p 69**	☐ **47 p 69**	☐ **48 p 69**
	☐ **49 p 69**	☐ **51 p 69**		
Problèmes :	☐ **53 p 70**	☐ **54 p 70**	☐ **59 p 71**	☐ **68 p 70**
	☐ **72 p 75**			