Chapitre M6

Géométrie 7

TRIGONOMETRIE

Capacités	Connaissances
Etablir des liens entre vecteurs de Fresnel d'une tension ou d('une intensité sinusoïdale de la forme $\boldsymbol{asinin\ (\omega t+\varphi)}$et la courbe représentative de la fonction qui à t associe $\boldsymbol{asinin\ (\omega t+\varphi).}$	Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale.
Placer sur le cercle trigonométrique les points « images » des réels $-x, \pi - x, \frac{\pi}{2} - x$, et $\pi + x$ connaissant « l'image » du réel x. Utiliser le cercle trigonométrique pour écrire les cosinus et sinus des réels $-\pi, \frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} + x$ et $\pi + x$ en fonction des cosinus et sinus du réel x.	Angles associés : supplémentaires, complémentaires, opposés et angles dont les mesures sont différentes de π. Courbe représentative de la fonction cosinus.

<u>Contenu du dossier :</u>

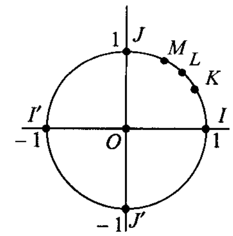
☐ **Cours**
☐ **Exercices (livre Chapitre 6 pages 79-86)**
☐ **Correction exercices**
☐ **Evaluation EM6**
☐ **Correction évaluation EM6**

TBP M6 (G7)

Activité 1: On a représenté sur le cercle trigonométrique les points images de certains nombres.

1.Compléter le tableau.

Nombre	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
Point						M		



2.Placer sur le cercle les points N et P, images de $-\frac{\pi}{3}$ et de $2\frac{\pi}{3}$

3.Cocher les cases correspondant aux réponses exactes.

Le point M est aussi image de :

☐ $\frac{\pi}{3}+\pi$ ☐ $\frac{\pi}{3}+2\pi$ ☐ $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}$ ☐ $\frac{\pi}{3}-2\pi$ ☐ $\frac{\pi}{3}$ $2k\times\pi$ ou $k\in\mathbb{Z}$

4. Cocher les cases correspondant aux réponses exactes

L'abscisse du point M est égale à ☐ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$=0,5 ☐ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

L'ordonnée du point M est égale à ☐ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$=0,5 ☐ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

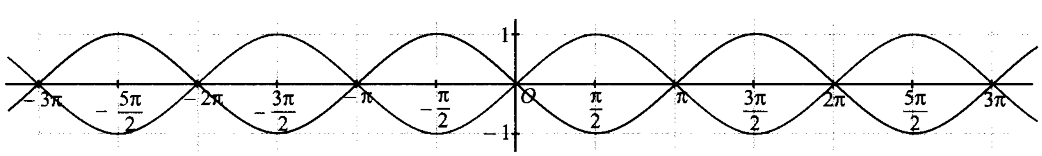
5. Compléter le tableau.

Nombre p	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
Cos (p)				$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$		
Sin (p)				$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		

6. Compléter le tableau de conversion de mesures d'angles géométriques.

Radians	π	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$	
Degrés	180		60		30

Activité 2: Colorer la courbe représentative de la fonction sinus:



Activité 3 : Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de :

1. $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ +\frac{\pi}{2}\right]$ tel que sin (x) = 0,2 : ....

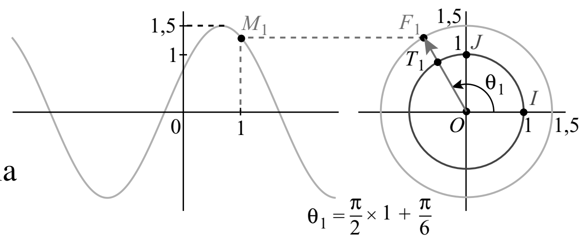
2. $x \in [0;\ \pi]$ tel que cos (x) = -0,8 : ....

I. Représentation d'une grandeur sinusoïdale

I.1. Comprendre la représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

Une grandeur sinusoïdale g est définie, en fonction du temps t, par une expression de la forme $g(t) = a \sin(\omega\, t + \varphi)$, où l'amplitude a et la pulsation ω sont des nombres strictement positifs, φ étant la phase à l'origine du temps.

Exemple:



Une tension sinusoïdale u est définie en fonction du temps t par $u(t) = 1{,}5 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Sur la courbe représentative de la fonction u est placé le point M_1 d'abscisse 1, dont l'ordonnée est la valeur instantanée de la tension u à l'instant 1 :

$u(1) = 1{,}5 \sin\left(\frac{\pi}{2}\times 1 + \frac{\pi}{6}\right) = 1{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Le point T_1 est l'image du nombre $\frac{2\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique de centre O.

Le point F_1 appartient à la demi-droite [OT_1) et au cercle de centre O et de rayon

L'ordonnée de F_1 est égale à celle de M_1 : $1{,}5 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

La mesure en radians de l'angle du vecteur $\overrightarrow{OI}$ au vecteur $\overrightarrow{OF_1}$ (dans cet ordre et lue dans le sens positif du cercle trigonométrique) est $\theta_1 = \frac{\pi}{2}\times 1 + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

(Pour $\theta_1 < 0$, on lirait la mesure dans le sens négatif du cercle trigonométrique.)

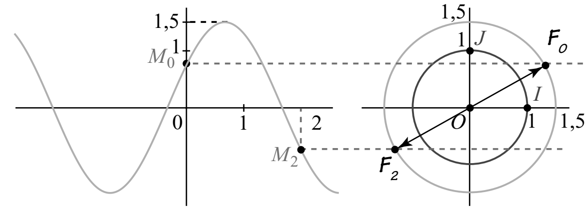
Ausgustin Fresnel (1788-1827)

Au point M_1 de la courbe de la fonction u, on fait correspondre le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OF_1}$.

Représentation de Fresnel de *u* : pour tout instant t, on fait correspondre au point M_1 d'abscisse t de la courbe de u le vecteur $\overrightarrow{OF_t}$, construit comme $\overrightarrow{OF_1}$. ci-dessus :

sa norme est $\|\overrightarrow{OF_t}\| = 1{,}5$ et la mesure en radians de l'angle de $\overrightarrow{OI}$ à $\overrightarrow{OF_t}$ est $\theta_t = \frac{\pi}{2}\times t + \frac{\pi}{6}$

Activité 4:



La fonction u est celle de l'exemple ci-dessus:

$u(t) = 1{,}5 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$. Complétez.

1. $u(t)$ est de la forme $a \sin(\omega\, t + \varphi)$,, avec a = ...,
ω = ..., φ = ...

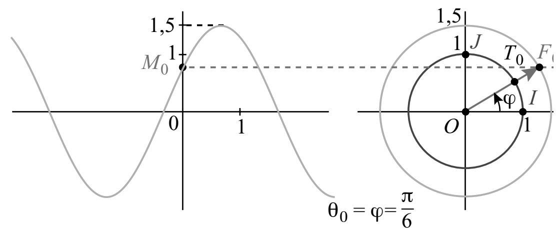
2.. $\overrightarrow{OF_0}$ et $\overrightarrow{OF_2}$ sont les vecteurs correspondants aux points M_0 et M_2, d'abscisses 0 et 2, dans la représentation de Fresnel de u.

Donner les mesures θ_0 et θ_2 en radians, des angles du vecteur $\overrightarrow{OI}$ aux vecteurs $\overrightarrow{OF_0}$ et $\overrightarrow{OF_2}$

$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \times \ldots\ldots + \frac{\pi}{6} = \qquad .$

$\theta_2 = \frac{\pi}{2} \times \ldots\ldots + \frac{\pi}{6} = \qquad .$

I.2. Obtenir le vecteur de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale



Exemple

On reprend $u(t) = 1{,}5 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Le vecteur de Fresnel de u est le vecteur $\overrightarrow{OF_0}$ correspondant à l'instant 0, dans la représentation de Fresnel de u : sa norme est a = ... et la mesure en radians de l'angle du vecteur $\overrightarrow{OI}$ au vecteur $\overrightarrow{OF_0}$ est $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \times \ldots\ldots + \frac{\pi}{6} = \ldots\ldots\ldots = \varphi$

Pour g définie par $g(t) = a \sin(\omega\, t + \varphi)$, le vecteur de Fresnel de g est le vecteur $\overrightarrow{OF_0}$ correspondant à l'instant 0 dans la représentation de Fresnel de u :

sa norme $\|\overrightarrow{OF_0}\|$ est égale à .... et la mesure en radians de l'angle de $\overrightarrow{OI}$ à $\overrightarrow{OF_0}$ est ....

Activité 5:

Une intensité sinusoïdale i est définie par $i(t) = 1{,}6 \sin\left(60t - \frac{\pi}{3}\right)$..

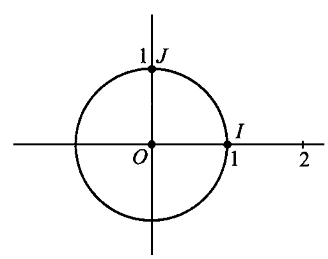
1. Pour chaque question, cochez la case correspondant à la réponse exacte.

Pour tracer le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OF_0}$ de cette intensité i,

1.1. on place sur le cercle trigonométrique le point T_0 image du nombre φ égal à :

☐ 1,6 ☐ 60 ☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ $-\frac{\pi}{3}$

1.2. on trace le cercle de centre O et de rayon :



☐ 1,6 ☐ 60 ☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ $-\frac{\pi}{3}$

2. Tracer le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OF_0}$ de l'intensité i.

I.3. Comment déterminer une grandeur sinusoïdale d'expression $a \sin(\omega t + \varphi)$ connaissant ω et son vecteur de Fresnel ?

Méthode 1

Étape 1: Avec les données sur le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OF_0}$ (figure, données algébriques, …), déterminer φ, qui est la mesure, dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, de l'angle de $\overrightarrow{OI}$ à $\overrightarrow{OF_0}$, où O est le centre du cercle trigonométrique et I son point de coordonnées (1 ; 0).

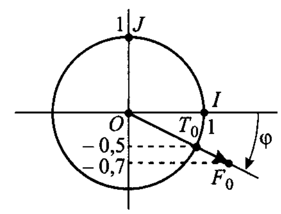
Étape 2: De même, déterminer a, qui est la norme $\|\overrightarrow{OF_0}\|$ du vecteur $\overrightarrow{OF_0}$.

Exemple:

On a tracé le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OF_0}$ d'une tension sinusoïdale u, définie en fonction du temps t par $u(t) = a \sin(0{,}5t + \varphi)$. Déterminez φ et a.

Étape 1: Sur la figure, à partir du point T_0 sur le cercle trigonométrique, on constate que $\sin(\varphi)$ =………… Et que $\frac{\pi}{2} < \varphi <$……… , donc φ =………….

Étape 2: On a $OF_0 \sin(\varphi) = -0{,}7$, c'est-à-dire $a \times$ (…………) = - 0,7, d'où a = ……………… .

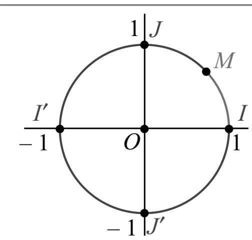


II. Liens entre cosinus et sinus; angles associés

II.1. Placer sur le cercle trigonométrique les point images de $-x$, $\pi-x$, $\frac{\pi}{2}-x$, $\frac{\pi}{2}+x$ et $\pi+x$, et écrire leurs cosinus et sinus.

Soit x un nombre réel, dont le point M est l'image sur le cercle trigonométrique.

• Dans chacune des cinq figures suivantes, le point M' est l'image successive des nombres $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$.



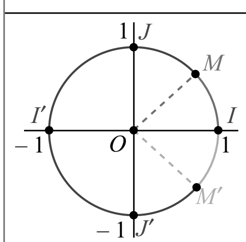
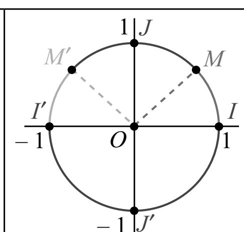
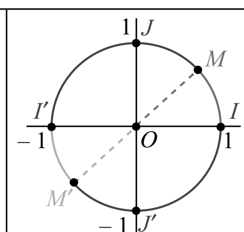
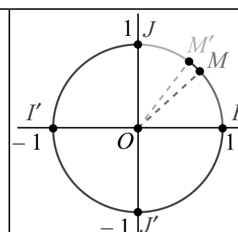
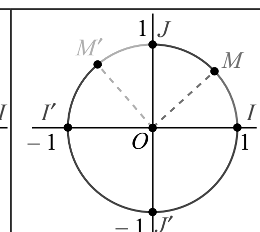
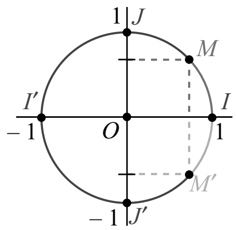
				

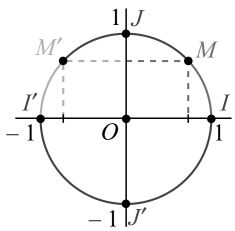
Image de $-x$	Image de $\pi - x$	Image de $\pi + x$	Image de $\frac{\pi}{2} - x$	Image de $\frac{\pi}{2} + x$

Cosinus et sinus de ces nombre



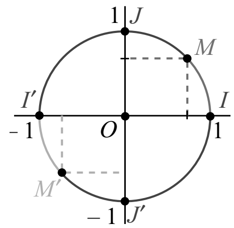
cos(-x)=......................

sin(-x)=......................



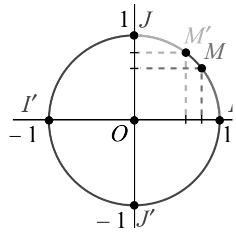
cos(π-x)=......................

sin(π -x)=......................



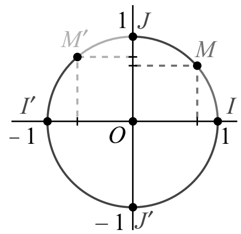
cos(π+x)=......................

sin(π +x)=......................



$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$=......................

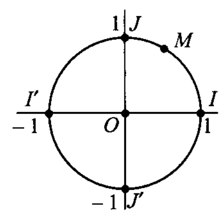
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$=......................



$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$=......................

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$=......................

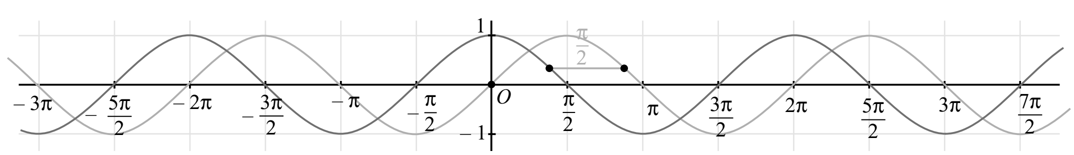
Activité 6 :



Sur le cercle trigonométrique ci-contre, le point M est l'image du nombre $\frac{\pi}{3}$.
Placez sur ce cercle les points M' et M", images des nombres $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$

II.2. Obtenir la courbe représentative de la fonction cosinus

L'égalité cos(x) = $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ permet d'obtenir la courbe représentative de la fonction cosinus (en rouge) à partir de celle de la fonction sinus (en vert) :



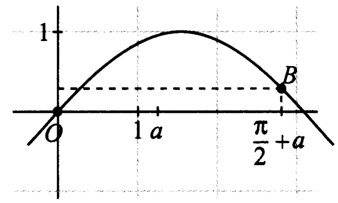
Activité 7 :

1.Compléter.

1.1. Le point B d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ + a de la courbe représentative de la fonction sinus a pour ordonnée ....$\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$

b) Le point A d'abscisse *a* de la courbe représentative de la fonction cosinus a pour ordonnée cos (..............) .
c) Or, cos (*a*) = sin (............), donc les points A et B ont la même ....

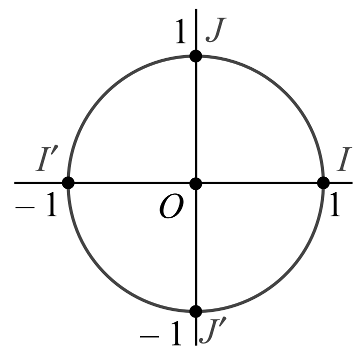
2. a) Placez le point A sur la figure.
b) Complétez. La longueur AB est égale à ....



III. Cosinus et sinus de la somme de deux nombres

III.1. Calculer cos (*a* + *b*) et sin (*a* + *b*) en fonction de cos (*a*), cos (*b*), sin (*a*) et sin (*b*)

Activité 8:
On utilisera le cercle trigonométrique pour compléter les tableaux des questions **1. b)** et **2. b)**.



1. On considère les nombres a = $\frac{\pi}{2}$ et b = π
a) Complétez.
Le point image de *a* sur le cercle est .... et celui de *b* est.............. .
b) Complétez le tableau.

a	cos (*a*)	sin (*a*)	*b*	cos (*b*)	sin (*b*)	*a* + *b*	cos (*a* + *b*)	sin (*a* + *b*)
$\frac{\pi}{2}$			π					

c) Cochez la case correspondant à la réponse exacte.
cos (*a*) cos (*b*) – sin (*a*) sin (*b*) = ☐ – 1 ☐ 0 ☐ 1

donc on constate que, pour cet exemple, l'égalité

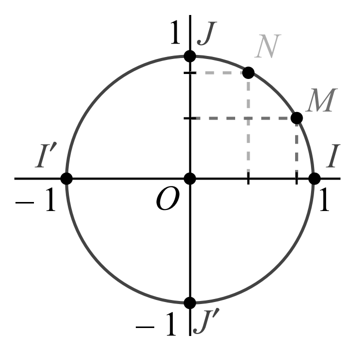
....

d) Cochez la case correspondant à la réponse exacte.

sin (*a*) cos (*b*) + cos (*a*) sin (*b*) = ☐ – 1 ☐ 0 ☐ 1

donc on constate que, pour cet exemple:

....



2. On considère les nombres $a = \frac{\pi}{6}$ et $b = \frac{\pi}{3}$
a) Complétez.
Le point image de *a* sur le cercle est .... et celui de *b* est.............. .
b) Complétez le tableau.

a	cos (*a*)	sin (*a*)	*b*	cos (*b*)	sin (*b*)	*a* + *b*	cos (*a* + *b*)	sin (*a* + *b*)
$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{3}$					

c) Complétez.

cos (a) cos (b) – sin (a) sin (b) = ...

donc on constate que, pour cet exemple:

....

d) Complétez.

sin (a) cos (b) + cos (a) sin (b) = ...

donc on constate que, pour cet exemple:

....

a et *b* sont des nombres réels quelconques.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

IV. Équations trigonométriques

IV.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation cos (x) = a et l'équation sin (x) = a

Solutions de l'équation cos (x) = a dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, pour certaines valeurs de a :

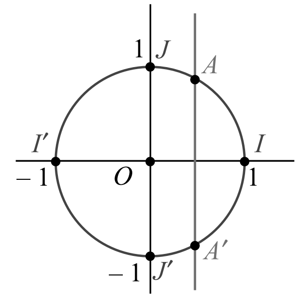
a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Solutions									

Solutions de l'équation sin (x) = a dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, pour certaines valeurs de a :

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Solutions									

Pour obtenir les solutions dans $\mathbb{R}$ de ces équations, on ajoute aux solutions précédentes tous les nombres de la forme $k \times 2\pi$, où k est un nombre entier relatif.

Activité 9:



1. a) Rayez les encadrés inexacts.

Pour résoudre l'équation cos $(x) = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, on a tracé le cercle trigonométrique et la droite d'équation $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ / $\boxed{y = \frac{1}{2}}$

A et A' sont les points d'intersection du cercle et de la droite.

Ils ont pour $\boxed{\text{ordonnée}}$ / $\boxed{\text{abscisse}}$ $\frac{1}{2}$

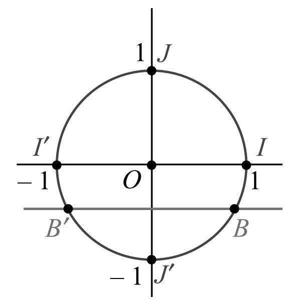
Sur la figure, A est l'image sur le cercle de $\boxed{\frac{\pi}{3}}$/ $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$ et A' celle de $\boxed{\frac{\pi}{3}}$/ $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$.

b) Complétez. Les solutions de l'équation cos $(x) = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ sont ....et ....

Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont les nombres .... $+ k \times 2\pi$ et .... $+ k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. a) Rayez les encadrés inexacts.

Pour résoudre l'équation sin $(x) = -\frac{1}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, on a tracé le cercle trigonométrique et la droite d'équation $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$ / $\boxed{y = -\frac{1}{2}}$



B et B' sont les points d'intersection du cercle et de la droite.

Ils ont pour $\boxed{\text{ordonnée}}$ / $\boxed{\text{abscisse}}$ $-\frac{1}{2}$

Sur la figure, B est l'image sur le cercle de $\boxed{\frac{\pi}{6}}$/ $\boxed{-5\frac{\pi}{6}}$ et B' celle de $\boxed{\frac{\pi}{6}}$/ $\boxed{-5\frac{\pi}{6}}$.

b) Complétez. Les solutions de l'équation sin $(x) = -\frac{1}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ sont ....et ....

Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont les nombres .... $+ k \times 2\pi$ et .... $+ k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

IV.2. Comment résoudre dans un intervalle I, l'équation sin $(\omega t + \varphi) = a$, où $\omega \neq 0$?

Méthode 2

Les valeurs de a sont -1; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$;1

Étape 1: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation sin $(x) = a$, d'inconnue x (voir **IV.1**).

Étape 2: Pour toute solution x_0 de l'équation $\sin(x) = a$, résoudre l'équation $\omega t + \varphi = x_0$, d'inconnue t.

Étape 3: Écrire toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation sin $(\omega t + \varphi) = $ a, d'inconnue t, qui sont toutes les solutions obtenues à l'étape 2

Étape 4: Conclure, en ne gardant que les solutions de l'étape 3 appartenant à I.

Exemple:

Résolvez l'équation: $\sin(2t + 6) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle [- 1 ; 1]

On résout d'abord l'équation : $\sin(\text{.........}) = \frac{1}{2}$.

L'équation, $\sin(\text{.........}) = \frac{1}{2}$ d'inconnue t à une seule solution dans [- 1 ; 1], le nombre

$\frac{\pi}{\ } - \quad + \pi$, dont la valeur approchée à 10^{-1} près est ....

Exercices

☐ ***1 p 80***	☐ ***2 p 80***	☐ ***5 p 80***	☐ ***7 p 80***
☐ ***13 p 81***	☐ ***18 p 81***	☐ ***26 p 81***	☐ ***29 p 81***
☐ ***40 p 82***	☐ ***41 p 82***	☐ ***42 p 82***	☐ ***45 p 82***
☐ ***56 p 83***	☐ 59 ***p 83***	☐ ***61 p 84***	