COMPOSITION DE MATHEMATIQUES N°2

☞ ***Seule la calculatrice personnelle est autorisée.*** *Les exercices sont indépendants.*
Tout résultat fourni par l'énoncé peut être admis pour poursuivre. Bon travail !

■ Exercice 1 ....(pour tous ; 6 points)

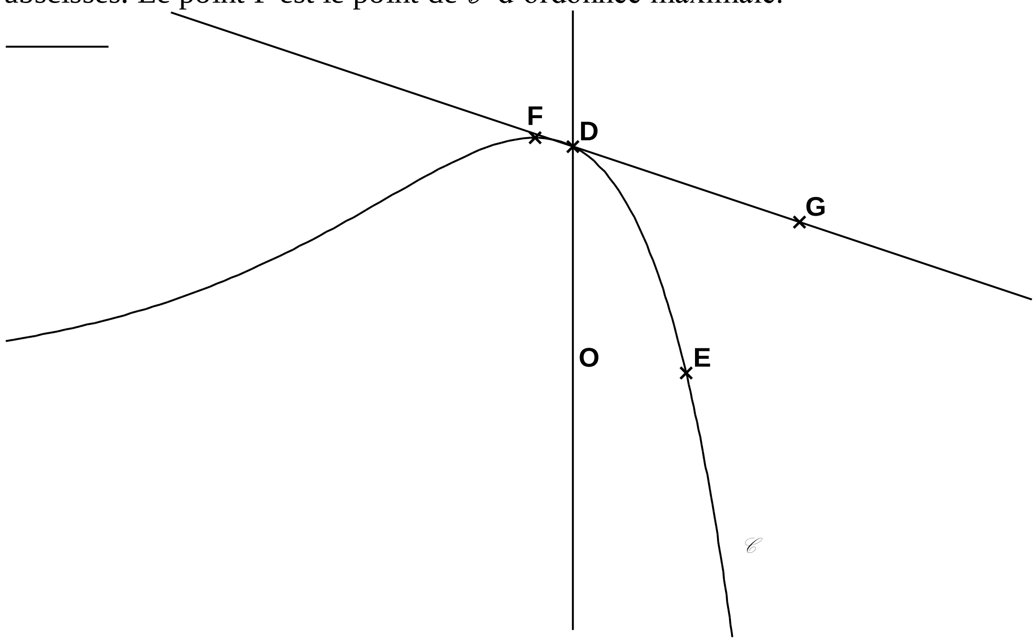
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3 - 2x)e^{\frac{x}{2}}$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Calculez la valeur exacte de $f(0)$, de $f(-2)$ et de $f(2)$.
Donnez, de plus, une valeur approchée à 10^{-2} près si nécessaire.

2. Montrez que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(-\frac{1}{2} - x\right)e^{\frac{x}{2}}$.

3. Déduisez-en les variations de f sur $\mathbb{R}$. (Les limites ne sont pas demandées.)

4. Un dessin de la courbe $\mathscr{C}$ est donné ci-dessous. Les unités ont été effacées. Le point D est l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées et le point E est l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Le point F est le point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.



a. Donnez la valeur exacte des coordonnées des points D, E et F.
b. Soit G le point de coordonnées (3 ; 2). La droite (DG) est-elle tangente à $\mathscr{C}$ en D ?
Justifiez la réponse.

5. Montrez que, sur l'intervalle [0 ; 2], l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α puis donnez sans justifier un encadrement de α au centième près.

6. Donnez l'expression de la dérivée seconde de f. Déduisez-en la convexité de f.

■ Exercice 2 .... (pour tous ; 5 points)

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
Parmi ceux qui ne veulent pas une pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On choisit au hasard au hasard dans le lycée.
On note L l'événement « l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi » et C l'événement « l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire ».
Si nécessaire, arrondissez les résultats obtenus à 10^{-4} près.

1. Décrivez cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Calculez la probabilité $\mathrm{P}(L \cap C)$ de l'événement $L \cap C$.

3. Montrez que $\mathrm{P}(C) = 0{,}5675$.

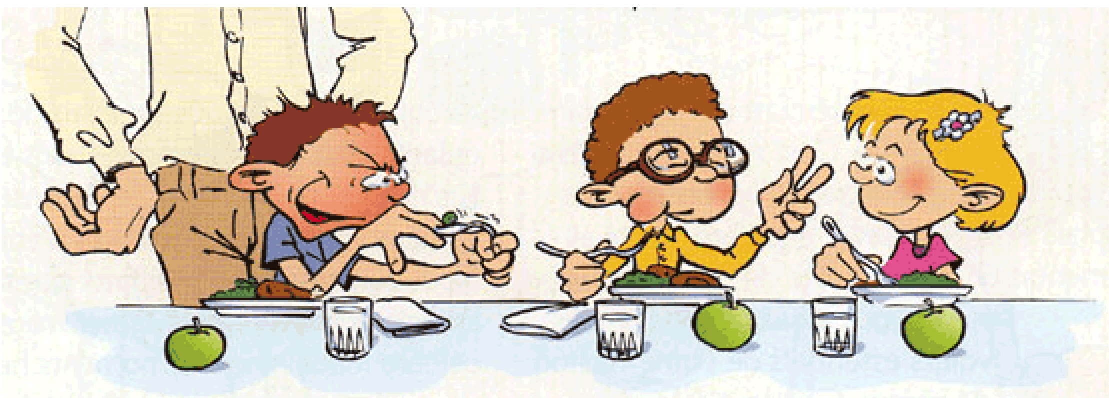
4. Calculez $\mathrm{P}_C(L)$, la probabilité de l'événement L sachant l'événement C réalisé.

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.

b. Calculez la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

c. Calculez la probabilité qu'exactement deux des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.



■ Exercice 3 .... (pour les non-spécialistes de ES et les L ; 5 points)

Les élèves de spécialité ES remplaceront cet exercice par celui proposé par M Dutrievoz.

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied. Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule ce qui fait que sa performance diminue de 1 % tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note d_n la distance en kilomètres parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculez les distances d_1, d_2 et d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

2. a. Expliquez pourquoi, pour tout entier naturel n non nul :

$$d_{n+1} = 0{,}99d_n.$$

b. Déduisez-en la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n.

3. Calculez en fonction de n le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours, c'est-à-dire :

$$L_n = d_1 + d_2 + ... + d_n.$$

4. Déduisez-en la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Le globe-trotter peut-il gagner son pari ?

5. Que représente le résultat fourni par l'algorithme ci-après ? Implantez-le sur votre calculatrice et donnez sans justifier le résultat fourni.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  L EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 1
  d PREND_LA_VALEUR 50
  L PREND_LA_VALEUR 50
  TANT_QUE (L<4999) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    d PREND_LA_VALEUR 0.99*d
    L PREND_LA_VALEUR L+d
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

■ Exercice 4 .... (pour tous ; 4 points)

Le gérant d'un hôtel situé dans la ville de Lyon étudie la fréquentation de son établissement afin de prévoir au mieux son budget pour les années futures. Le 5 décembre 1998, le site historique de Lyon a été inscrit au patrimoine mondial de l'UNESCO et l'hôtel a vu son nombre de clients augmenter significativement comme l'indique le tableau ci-dessous :

Année	1997	1998	1999	2000
Nombre de clients	950	1 105	2 103	2 470

1. Déterminez le pourcentage d'augmentation du nombre de clients entre 1997 et 2000.

Par ailleurs, depuis le 1er janvier 2000, une étude statistique a permis de mettre en évidence que, chaque année, l'hôtel compte 1 200 nouveaux clients et que 70 % des clients de l'année précédente reviennent.

On modélise cette situation par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_n représente le nombre total de clients durant l'année $2000 + n$. On a ainsi :

$$u_0 = 2\,470 \text{ et, pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1\,200.$$

2. Déterminez le nombre total de clients durant l'année 2001.

3. Le gérant de l'hôtel souhaite déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de clients annuel dépassera 3 900.

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul donne l'année correspondante ; précisez lequel sans justifier et indiquez l'année cherchée sans justifier.

ALGORITHME 1 :

```
U prend la valeur 2 470
N prend la valeur 0
Tant Que U < 3 900
| U prend la valeur 0,7 × U + 1 200
| N prend la valeur N+1
Fin Tant Que
Afficher 2 000 + N
```

ALGORITHME 2 :

```
U prend la valeur 2 470
N prend la valeur 0
Tant Que U > 3 900
| U prend la valeur 0,7 × U + 1 200
| N prend la valeur N+1
Fin Tant Que
Afficher 2 000 + N
```

ALGORITHME 3 :

```
U prend la valeur 2 470
N prend la valeur 0
Tant Que U < 3 900
| U prend la valeur 0,7 × U + 1 200
| N prend la valeur N+1
Fin Tant Que
Afficher U
```

4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$ et précisez son premier terme.

b. Exprimez le terme général v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

c. Déduisez-en que, pour tout entier naturel n : $u_n = 4\,000 - 1\,530 \times 0{,}7^n$.

5. A long terme, déterminez le nombre de clients que le gérant de l'hôtel peut espérer avoir chaque année.

Corrigé 1 ....(Bac La Réunion 2008)

1. $f(0) = 3e^0$ d'où : $\boxed{f(0) = 3}$. $\quad f(-2) = (3 - 2 \times (-2))\,e^{-\frac{2}{2}}$ d'où : $\boxed{f(-2) = 7e^{-1} = \frac{7}{e} \approx 2{,}58}$.

$f(2) = (3 - 2 \times 2)\,e^{\frac{2}{2}}$ d'où : $\boxed{f(2) = -e \approx -2{,}72}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$u(x) = 3 - 2x \qquad v(x) = e^{\frac{x}{2}} \quad ; \qquad u'(x) = -2 \qquad v'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$f'(x) = -2e^{\frac{x}{2}} + (3-2x)\times\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \left(-2+\frac{3}{2}-x\right)e^{\frac{x}{2}}$ d'où : $\boxed{\text{pour tout réel } x : f'(x) = \left(-\frac{1}{2}-x\right)e^{\frac{x}{2}}}$.

3. Pour tout réel x : $e^{\frac{x}{2}} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-\frac{1}{2}-x$. $\quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}-x > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ (cohérent avec la courbe donnée !).

4. a) D'après **1.** : $\boxed{D(0 ; 3)}$. $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(3-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\frac{1}{4}} = 4e^{-\frac{1}{4}}$ donc : $\boxed{F\left(-\frac{1}{2} ; 4e^{-\frac{1}{4}}\right)}$.

N.B. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ (cohérent avec la courbe donnée !). On obtient ce tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^{\frac{1}{4}}}$	$\searrow$	$-\infty$

L'abscisse x de E vérifie : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (3-2x)e^{\frac{x}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ d'où : $\boxed{E\left(\frac{3}{2} ; 0\right)}$.

b) Le coefficient directeur de la droite (DG) est : $\frac{y_G - y_D}{x_G - x_D} = \frac{2-3}{3-0} = -\frac{1}{3}$.

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en D est : $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Ces coefficients directeurs sont différents donc $\boxed{\text{la droite (DG) n'est pas tangente à } \mathscr{C} \text{ en D}}$.

5. f est continue sur $[0 ; 2]$ et strictement décroissante sur $[0 ; 2]$. D'après les valeurs de $f(0)$ et $f(2)$ trouvées au **1.**, 2 est compris entre $f(0)$ et $f(2)$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 2 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [0 ; 2]}$.

$f(0{,}84) \approx 2{,}009$ et $f(0{,}85) \approx 1{,}998$ donc $f(0{,}85) < f(\alpha) < f(0{,}84)$; or f est strictement décroissante sur $[0 ; 2]$ donc : $\boxed{0{,}84 < \alpha < 0{,}85}$.

6. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

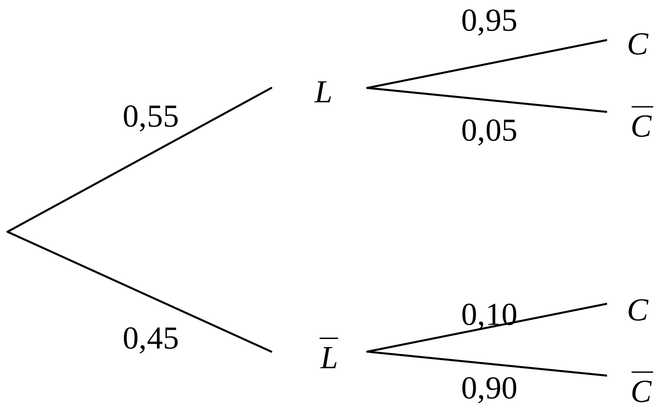
$f''(x) = -e^{\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}-x\right)\times\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ d'où : $\boxed{\text{pour tout réel } x : f''(x) = \left(-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}}}$.

Pour tout réel x : $e^{\frac{x}{2}} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x$. $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$.

f est donc convexe sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right]$ **et concave sur** $\left[-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$; la courbe présente donc un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{5}{2}$ (cohérent avec la courbe donnée !).

Corrigé 2 ....(Bac Antilles-Guyane 2015)

1.



2. $P(L \cap C) = P(L) \times P_L(C) = 0{,}55 \times 0{,}95$ d'où : $\boxed{P(L \cap C) = 0{,}5225}$.

3. C est la réunion des deux événements incompatibles $C \cap L$ et $C \cap \overline{L}$. D'après la formule des probabilités totales : $P(C) = P(C \cap L) + P(C \cap \overline{L})$.

Or : $P(C \cap \overline{L}) = P(\overline{L}) \times P_{\overline{L}}(C) = 0{,}45 \times 0{,}1 = 0{,}045$.

D'où : $P(C) = 0{,}5225 + 0{,}045$ soit : $\boxed{P(C) = 0{,}5675}$.

4. $P_C(L) = \frac{P(C \cap L)}{P(C)} = \frac{0{,}5225}{0{,}5675}$ soit : $\boxed{P_C(L) \approx 0{,}9207 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$.

5. a. On répète 4 fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès (l'élève est favorable à une répartition des cours plus étalée) est : $P(C) = 0{,}5675$. $\boxed{X \text{ suit donc la loi binomiale de paramètres } n = 4 \text{ et } p = 0{,}5675.}$

Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et 4 : $P(X = k) = \binom{4}{k} \times 0{,}5675^k \times 0{,}4325^{4-k}$.

b. $P(X = 0) = \binom{4}{0} 0{,}5675^0 0{,}4325^4 = 0{,}4325^4$.

La probabilité qu'aucun des quatre élèves ne soit favorable à une répartition plus étalée est donc : $0{,}4325^4$ soit 0,0350 à 10^{-4} près.

c. $P(X = 2) = \binom{4}{2} 0{,}5675^2 \times 0{,}4325^2$.

La probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition plus étalée est donc : $6 \times 0{,}5675^2 \times 0{,}4325^2$ soit 0,3615 à 10^{-4} près.

Corrigé 3 ....(Bac Polynésie 2006)

1. Le globe-trotter peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée donc la distance parcourue le premier jour est : $\boldsymbol{d_1 = 50}$.

D'un jour au suivant, la performance diminue de 1 % donc est multipliée par 0,99 donc les distances en km parcourues durant les deuxième et troisième jours sont respectivement :

$$d_2 = 0{,}99d_1 = 0{,}99 \times 50 \text{ d'où : } \boldsymbol{d_2 = 49{,}5} \text{ ;}$$

$$d_3 = 0{,}99d_2 = 0{,}99 \times 49{,}5 \text{ d'où : } \boldsymbol{d_3 = 49{,}005}.$$

2. a) D'un jour au suivant, la performance diminue de 1 % donc est multipliée par 0,99 donc pour tout entier naturel n non nul :

$$\boldsymbol{d_{n+1} = 0{,}99d_n}.$$

b) La suite (d_n) est donc géométrique de raison q = 0,99.

Pour tout entier naturel n non nul : $d_n = d_1 \times q^{n-1}$ d'où : $\boldsymbol{d_n = 50 \times 0{,}99^{n-1}}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours est :

$$L_n = d_1 + d_2 + ... + d_n = d_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 50 \times \frac{1-0{,}99^n}{1-0{,}99} = 50 \times \frac{1-0{,}99^n}{0{,}01}$$

d'où : $\boldsymbol{L_n = 5\,000(1 - 0{,}99^n)}$.

4. $0 < 0{,}99 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0{,}99^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1-0{,}99^n\right) = 1$ donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = 5\,000}$.

Le globe-trotter ne peut pas en toute rigueur gagner son pari car, comme $0{,}99^n$ n'est pas nul, L_n n'est jamais égal à 5 000 ; mais, comme (L_n) tend vers 5 000, **le globe-trotter peut s'approcher aussi près qu'il le souhaite de cette distance de 5 000 km**.

5. Cet algorithme fournit le nombre minimal de jours qui lui sont nécessaires pour parcourir 4 999 km. On trouve que 848 jours lui sont nécessaires.

Corrigé 4 ....(Bac Amérique du Sud, novembre 2016)

1. Le pourcentage d'augmentation du nombre de clients entre 1997 et 2000 est :

$$100 \times \frac{2\,470 - 950}{950} = \mathbf{160\ \%}.$$

2. Le nombre total de clients durant l'année 2001 est :

$$u_1 = 0{,}7u_0 + 1\,200 = 0{,}7 \times 2\,470 + 1\,200 = \mathbf{2\,929}.$$

3. A la sortie de l'algorithme3, on affiche U, c'est-à-dire un nombre de clients, alors qu'on veut une année ; cet algorithme est à rejeter. Dans l'algorithme 2, la condition de la boucle est « Tant que U > 3 900 » ; or U est initialisé à 2 470 donc on n'entre jamais dans cette boucle et cet algorithme est à rejeter aussi.

L'algorithme qui convient est l'algorithme 1 et il donne que la première année à partir de laquelle le nombre de clients a dépassé 3 900 est 2008.

4. a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000 = 0{,}7u_n + 1\,200 - 4\,000$
$= 0{,}7u_n - 2\,800 = 0{,}7(u_n - 4\,000) = 0{,}7\,v_n$.

Variante : $v_{n+1} = 0{,}7u_n - 2\,800 = 0{,}7(v_n + 4\,000) - 2\,800 = 0{,}7\,v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,7 et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 4\,000 = 2\,470 - 4\,000 = \mathbf{-1\,530}.$$

b) Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n$ d'où : $\boldsymbol{v_n = -1\,530 \times 0{,}7^n}$.

c) Pour tout entier naturel n : $u_n = v_n + 4\,000$ d'où : $\boldsymbol{u_n = 4\,000 - 1\,530 \times 0{,}7^n}$.

5. $-1 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4\,000$.

A long terme, le gérant de l'hôtel peut espérer avoir chaque année près de 4 000 clients.