Calcul mental, symbolisme arithmétique et résolution de problèmes :

quelques apports récents de la psychologie cognitive et culturelle

Rémi Brissiaud(*)

Un vaste mouvement de réformes pédagogiques s'est développé dans la deuxième moitié du XX^{e} siècle en mathématiques comme en français. Or, depuis plusieurs années, des personnes de sensibilités politiques, de fonctions et de statuts divers s'organisent en vue d'obtenir un retour aux pratiques pédagogiques d'avant ce mouvement. En mathématiques, elles prônent un retour aux programmes de 1923 ou 1945, ceux qui ont eu cours jusqu'en 1970, date de la réforme dite des mathématiques modernes. Elles exigent en particulier le retour à un enseignement formel de la division dès le cycle 2 (avant le CE2, donc). Or certains travaux récents en psychologie cognitive et culturelle, notamment ceux qui ont été menés au sein de l'équipe « Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances » de Paris-8(1), n'incitent absolument pas à un tel retour aux pratiques pédagogiques anciennes. Dans ce texte, après avoir présenté les arguments utilisés par les personnes favorables aux pratiques d'antan, celles-ci seront analysées à la lumière de ce que l'on sait aujourd'hui de l'articulation entre le calcul mental, le symbolisme arithmétique et la résolution de problèmes.

Quels arguments en faveur du retour à l'enseignement formel de la division au cycle 2?

Jean-Pierre Demailly, président du Groupe de Recherche Interdisciplinaire sur les Programmes (GRIP) et membre de l'Académie des Sciences, défend depuis longtemps cette idée d'un retour à l'enseignement de la division tel qu'il se pratiquait en 1923. On retrouve d'ailleurs cette recommandation dans l'Avis que l'Académie des sciences a remis au ministre en janvier 2007. C'est, pour ce mathématicien, un moyen de remédier à un diagnostic qu'il fait à partir de son expérience de Professeur d'Université : on assisterait ces dernières années à une dégradation importante des compétences mathématiques des jeunes français, y compris les étudiants dans les Grandes Écoles.

(*) MC de Psychologie Cognitive - IUFM de Versailles - Laboratoire Paragraphe.
Équipe : « Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances ».
http://paragraphe.univ-paris8.fr/crac/

(1) Ces travaux récents feront l'objet d'une présentation plus détaillée au colloque « Vygotski et les recherches en éducation et en didactique des disciplines » à Albi les 23 et 24 avril 2007 et dans une session en hommage à Jean-François Richard durant le prochain congrès annuel de la Société Française de Psychologie, à Nantes les 13–15 septembre 2007.

Une commission parlementaire s'est récemment livrée à un examen approfondi de la question et s'est étonnée d'un tel diagnostic. Elle n'a pas cru devoir le retenir. Pas plus, d'ailleurs, qu'un récent rapport de l'Inspection Générale concernant les élèves de cycle 3. Les membres du GRIP ne peuvent donc pas s'appuyer sur cet argument pour préconiser le retour à l'enseignement formel de la division au cycle 2.

Mais ce motif d'une prétendue « baisse de niveau » n'est pas le seul que les membres du GRIP évoquent. Divers commentateurs de l'Avis des Académiciens l'ont bien noté : il flotte dans ce texte comme un parfum de nostalgie de l'école d'avant 1970, jusque dans les expressions utilisées, celle de « nombres concrets », par exemple. Un des arguments favoris des membres du GRIP consiste à exhiber des cahiers de CP d'avant 1970 sur lesquels on voit, vers la fin de l'année, des divisions posées, par 2 notamment. De leur point de vue, ne plus demander aux élèves de le faire correspond nécessairement à une baisse d'exigence de l'école : les élèves seraient capables de poser des divisions et l'école ne le leur demanderait plus ! C'est, pour eux, le symbole même du manque d'ambition de l'école d'aujourd'hui, qui, tôt ou tard, doit se traduire par une « baisse du niveau ».

Or, les réponses que mes collègues mathématiciens ou didacticiens font à cet argument d'une école qui aurait renoncé à ses ambitions peuvent ne pas apparaître très convaincantes. Bien sûr, on peut dire que la division est une opération complexe et que son apprentissage doit donc s'étendre sur toute la durée de l'école primaire, qu'il doit même se continuer au collège. Mais un tel discours est très général, il ne rassure pas ceux qui craignent une « baisse du niveau ». Il pourrait même les conforter dans leurs craintes parce qu'un tel argument pourrait conduire à regrouper l'enseignement formel de la division en toute fin d'école élémentaire. Rappelons en effet que dans les dernières pages des documents d'application des programmes de 2002, on trouve des « éléments d'aide à la programmation » des différentes activités et qu'il y est proposé, concernant la division posée, qu'elle soit « *approchée, préparée* » jusqu'au CM1, « *construite, structurée* » au CM2 et « *consolidée, utilisée* » au collège. À titre de comparaison, dans les mêmes documents, la « consolidation » et l'« utilisation » de l'addition en colonnes commencent en CE2 : il y a donc effectivement 3 ans de décalage dans la programmation du calcul posé des deux opérations suggérée par les documents officiels. C'est de toute évidence trop important et, s'il me semble raisonnable que l'enseignement formel de la division ne commence qu'en CE2, la « construction, structuration » de la division posée doit, tout aussi raisonnablement, démarrer dès cette classe.

Un argument plus précis contre le retour aux pratiques pédagogiques anciennes est le suivant : il faut remarquer que des enfants de maternelle ou de CP sont capables de réaliser un partage de 15 jetons en 3 parts égales, par une procédure de distribution (ils dessinent ou imaginent 3 silhouettes et ils donnent un jeton à chacune, puis un autre…) mais, dans ce cas, pour obtenir la solution, les enfants comptent finalement le nombre de jetons d'une des parts et le fait de poser la division en « potence » par exemple ne leur sert à rien puisqu'ils ont déjà la solution numérique. Quoique plus précis, un tel argument peut ne pas être plus convaincant : est-on sûr qu'à l'école on ne fait écrire des additions et des soustractions, en ligne par exemple, que lorsque ces écritures ont une fonction dans l'obtention du résultat numérique ? Par ailleurs, les membres du GRIP pourraient très bien défendre cet usage précoce du symbolisme arithmétique : répartir ainsi spatialement, grâce à la « potence » (on appelle ainsi le signe de la division posée), les différents nombres en jeu dans le problème (le nombre à répartir, le nombre de parts, la valeur d'une part et le reste) aide les enfants à prendre conscience de diverses propriétés des nombres en jeu : le reste doit être inférieur au nombre de parts, par exemple. Est-on sûr que ce soit inutile ?

Dans un texte précédent(2), j'ai développé un autre argument, *a priori* plus convaincant : il est facile de montrer qu'avant 1970, les enseignants avaient le plus souvent renoncé, au CP et au CE1, à enseigner la division comme une opération permettant de résoudre *à la fois* des problèmes de partage (32 gâteaux partagés en 5 parts égales) et de groupement-mesure (avec 32 € combien d'objets à 5 € peut-on acheter ? ou, plus généralement : *en a, combien de fois b ?*). Devant les difficultés de leurs élèves à comprendre qu'une même opération peut avoir deux significations aussi différentes, les maîtres, à l'époque, avaient le plus souvent décidé de ne plus retenir que la signification la plus triviale, à savoir le partage. Avant 1970, tout au long de ce qui est devenu aujourd'hui le cycle 2, on enseignait donc le plus souvent que diviser = partager. Si l'on admet que, pour comprendre une opération arithmétique comme la division, il faut comprendre pourquoi une même procédure de solution (la division posée, par exemple) permet de traiter des situations dont les significations pragmatiques apparaissent très différentes (partage *vs* groupement-mesure), pourquoi vouloir enseigner à nouveau au cycle 2 ce que des générations de maîtres ont échoué à faire ?

Mais cet argument est lui aussi assez facile à retourner sous la forme suivante : si l'enseignement des différentes significations de la division n'est pas possible au cycle 2, pourquoi ne pas enseigner le partage seulement comme le faisaient les maîtres avant 1970 ? Comme l'écrivent les académiciens : « *nul n'ignore que le problème du partage des bonbons se pose dès l'école maternelle et constitue un apprentissage de la division !* » Il suffirait donc de dire aux élèves que lorsqu'ils partagent, ils font des divisions (comme Monsieur Jourdain, sans s'en rendre compte, faisait de la prose). Pourquoi le fait de mettre un mot savant (le mot « diviser ») sur une pratique quotidienne (le partage) n'aiderait-il pas au progrès ? Et quel mal y aurait-il à poser les divisions correspondantes s'il s'agit seulement de familiariser les enfants avec ce mode de disposition des nombres en jeu dans la division ? Dans cette optique, c'est plus tard, au CE2, que l'enseignant amène les élèves à comprendre que la division permet aussi de résoudre les problèmes de groupement-mesure. En quoi cette approche de la division où, dès le départ, les élèves en utilisent le symbolisme (le mot « divisé », les différents signes) mais dans les seules situations typiques de division (celles de partage), serait-elle condamnable ?

C'est à cette question, d'apparence anodine, qu'il est en fait le plus difficile de répondre. Or, il n'est guère possible de le faire de manière précise sans exposer ce que l'on sait du fonctionnement cognitif des élèves qui progressent normalement en résolution de problèmes arithmétiques. C'est en effet le seul moyen d'expliquer

(2) Calcul et résolution de problèmes arithmétiques : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu. http://www.cafepedagogique.net/dossiers/contribs/brissiaud2.php.

pourquoi la pratique pédagogique précédente a pour conséquence de faire dysfonctionner un nombre important d'élèves.

Aussi commencera-t-on par présenter une modélisation du fonctionnement cognitif des élèves lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes arithmétiques dont l'énoncé est donné verbalement (oral ou écrit). Selon ce modèle, quand les données numériques s'y prêtent, les élèves réussissent à résoudre *mentalement* les principaux problèmes arithmétiques dont l'énoncé parle d'une action (ajout, retrait, partage ou groupement)(3). De plus, ce modèle, parce qu'il se fonde sur la distinction entre connaissances quotidiennes (savoir partager, par exemple) et connaissances scolaires (savoir diviser) semble particulièrement approprié pour éclairer le débat sur l'introduction du symbolisme de la division. Dans un second temps, on montrera qu'un tel modèle permet de comparer diverses façons d'introduire le symbolisme de la soustraction et de la division à l'école, certaines d'avant 1970 et d'autres actuelles. Il ne faut pas être étonné de l'irruption de la soustraction dans ce texte : fondamentalement, les problèmes pédagogiques posés par la division et la soustraction ont beaucoup de similitudes et l'examen de ceux posés par l'une aide à comprendre ceux posés par l'autre.

Distinguer, à la manière de Vygotski, deux sortes de problèmes(4)

À la base du modèle qui va être présenté, il y a la distinction de deux sortes de problèmes, distinction qui s'inspire de celle que fait Vygotski entre « concepts quotidiens » et « concepts scolaires » :

– Des Q-problèmes (où Q signifie « quotidien ») qui sont assez bien résolus mentalement avant tout enseignement des opérations arithmétiques à l'école. Par exemple, le Q-problème *Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ?* a été résolu correctement par 75 % d'une population d'« enfants de la rue » d'une dizaine d'années qui n'avaient jamais été scolarisés et qui vivaient de petits commerces divers dans les rues de Recife, au Brésil (Schliemman et coll., 1998)(5).
– Des E-problèmes (où E signifie « École » ou « Enseignement »), qui ne sont bien résolus que lorsque les enfants ont fréquenté l'école et y ont reçu un enseignement des opérations arithmétiques. Par exemple, le E-problème *Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?* a été résolu correctement par 0 % de la même population d'« enfants de la rue » !

On remarquera que, pour un adulte instruit, les deux sortes de problèmes sont aussi faciles l'un que l'autre à résoudre mentalement : il remplace le calcul de 50 fois 3 par celui de 3 fois 50. En fait, ce qu'on appellera E-problèmes ici ne recouvre pas

(3) Dans la typologie des problèmes d'addition et de soustraction avancée par Gérard Vergnaud, les problèmes correspondants sont ceux de « changements d'états » et dans la typologie des problèmes multiplicatifs avancée par Greer (1992), ce sont ceux de groupement-mesure. Les problèmes additifs et multiplicatifs de comparaison (*combien de plus ? et combien de fois plus ?*, par exemple) fonctionnent différemment d'un point de vue psychologique.

(4) Vygotski, L. (1934/1997), *Pensée et Langage*, La Dispute : Paris.

(5) Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M.A., Macedo, S. & Nicéas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422-435.

l'ensemble des problèmes qui ne sont réussis qu'à condition d'avoir fréquenté l'école (*Quel est le prix de 482 objets à 247 cruzeiros l'un ?* est évidemment un E-problème !). Nous nous intéressons seulement ici à des E-problèmes particuliers, ceux dont la solution numérique, pour un adulte instruit, s'obtient par un calcul mental qui est aussi facile que celui nécessité par le Q-problème correspondant : le calcul de 50 fois 3 est en effet aussi facile que celui de 3 fois 50, pour quelqu'un qui a appris la multiplication à l'école et a utilisé la commutativité de cette opération tout au long de sa scolarité.

Ce phénomène de réussites et échecs massifs à des problèmes, qui pourtant ne semblent pas plus difficiles les uns que les autres aux adultes instruits, s'observe également lorsqu'on remplace la relation : « l'enfant fréquente l'école *vs* il ne fréquente pas l'école » par la relation « l'enfant a étudié l'opération arithmétique à l'école *vs* il n'a pas encore étudié l'opération arithmétique à l'école ». Ainsi, pour chacun des principaux types de problèmes scolaires(6) qui, à terme, doivent être résolus par une soustraction, une multiplication ou une division, il est possible, en changeant seulement les valeurs numériques (comme dans les deux problèmes de prix en cruzeiros précédents dont les énoncés utilisent les mêmes mots) de produire des Q-problèmes qui sont assez bien réussis avant tout enseignement de ces opérations et des E-problèmes pour lesquels l'échec est massif avant cet enseignement.

Par exemple, en octobre au CE1(7), le Q-problème de groupement *Avec 40 gâteaux, on fait des paquets de 10 gâteaux. Combien peut-on faire de paquets ?* a un taux de réussite de 48% alors que les élèves n'ont jamais entendu à l'école le mot « division », et qu'ils n'y ont jamais étudié le signe « ÷ », ni tracé une « potence ». Pour le E-problème *Avec 40 gâteaux, on fait des paquets de 4 gâteaux. Combien peut-on faire de paquets ?*, le taux de réussite n'est que de 15% alors que l'énoncé décrit une même situation, qu'il utilise les mêmes mots et que la taille du groupe y est plus petite (4 au lieu de 10) !

Ce phénomène s'explique de la manière suivante. De nombreuses recherches ont étudié ce qu'on appelle les « procédures informelles » de résolution des problèmes dont l'énoncé parle d'une action : les premières procédures observées consistent en une sorte de simulation, avec des jetons par exemple, de ce qui est dit dans l'énoncé. Puis on observe une « mentalisation » de ces procédures qui se traduit par un comptage mental de 1 en 1 ou de n en n ou bien encore par l'utilisation de relations numériques simples qui sont bien connues de l'élève. Dans une situation où celui-ci n'a qu'une minute pour répondre, ce sont ces deux dernières sortes de stratégies (comptage mental ou utilisation de relations numériques connues) qui permettent

(6) Exceptés ceux de comparaison.

(7) Les données utilisées dans la suite du texte sont extraites de : Brissiaud, R., & Sander, E. (2003). Conceptualisation arithmétique, résolution de problèmes et enseignement des opérations arithmétiques à l'école : une étude longitudinale au CE1. *Acte du Colloque « Les processus de conceptualisation en débat : Hommage à Gérard Vergnaud »*. Clichy-La Garenne. 28-31 Janvier 2004. 10 pages.
On les trouve aussi dans : Brissiaud R. (2004) *La résolution de problèmes arithmétiques : une étude longitudinale au CE1*. In ARDM (Ed) Séminaire national de didactique des mathématiques 2004. Les actes, p. 223-228.

d'obtenir la solution numérique dans le cas des Q-problèmes. Concernant le Q-problème *Avec 40 gâteaux, on fait des paquets de 10 gâteaux. Combien peut-on faire de paquets ?*, par exemple, l'enfant simule le groupement grâce à un comptage de 10 en 10. Il se dit « 10 » en sortant 1 doigt, « 20 » (2 doigts), « 30 » (3 doigts) et « 40 » (4 doigts). Concernant ce Q-problème, la procédure de simulation qui est activée donne donc presque immédiatement la solution numérique.

En revanche, concernant le E-problème *Avec 40 gâteaux, on fait des paquets de 4 gâteaux. Combien peut-on faire de paquets ?*, l'enfant tente également de simuler l'action décrite dans l'énoncé, mais cette procédure informelle a moins de chances d'aboutir. En effet, l'enfant dit « 4 » en sortant 1 doigt, « 8 » (2 doigts), « 12 » (3 doigts)… Mais, pour un enfant de début de CE1, ce long comptage de 4 en 4 est difficile à contrôler et, soit il s'interrompt, soit il se trompe. Comment un adulte ayant fréquenté l'école et ayant profité de sa scolarisation résout-il ce E-problème ? Il calcule 40 divisé par 4 sous la forme « 40 partagé en 4 ». Le passage d'une interprétation (groupement, celle qui résulte de la lecture de l'énoncé) à l'autre (partage, celle qui conduit à un calcul simple) est tellement automatisé que la personne n'a plus conscience qu'elle calcule le résultat d'un partage en 4 parts égales alors que l'énoncé du problème parle d'un groupement en paquets de 4 !

Le modèle hiérarchique des stratégies de résolution des problèmes(8)

En fait, il est facile de construire des E-problèmes et des Q-problèmes d'un type donné lorsqu'on connaît les principales caractéristiques des procédures informelles qui se fondent sur une simulation de l'action décrite dans l'énoncé :

- lorsque l'énoncé parle d'un ajout, cela active une procédure de parcours de la file numérique mentale « en avançant » et lorsqu'il parle d'un retrait une procédure de parcours de cette file numérique « en reculant » (procédure de comptage à rebours) ;
- la simulation mentale d'une action décrite dans l'énoncé respecte toujours la structure temporelle de cet énoncé ;
- lorsque la simulation mentale d'une action est complexe (simuler une distribution 1 à 1, par exemple, dans le cas d'un partage), une stratégie informelle alternative consiste à se représenter mentalement la situation à laquelle aboutit cette action (imaginer que le partage est réalisé et tester des solutions numériques plausibles, par exemple).

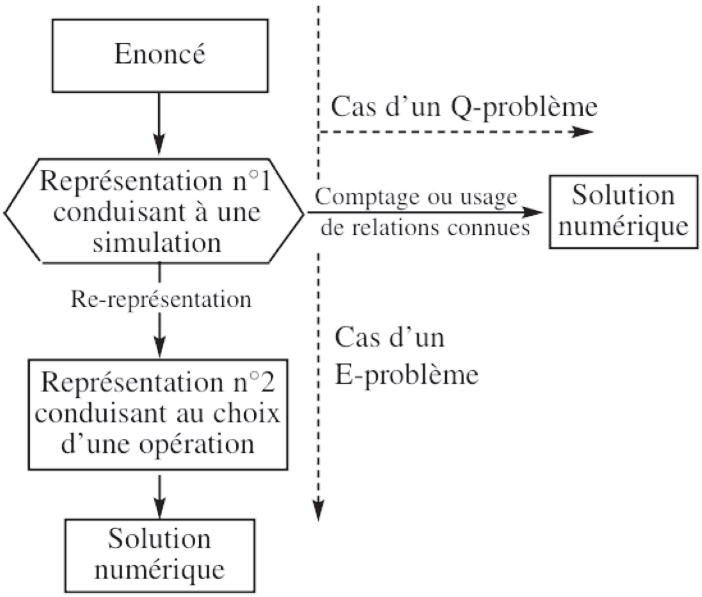
Pour rendre compte du fait qu'avant tout enseignement d'une opération arithmétique donnée, les Q-problèmes correspondants sont mieux réussis que les E-problèmes, il suffit donc de considérer que la résolution des Q-problèmes arithmétiques est du type « mentalisation d'une résolution par l'action ».

Mais un modèle de la résolution arithmétique des problèmes doit rendre compte d'un deuxième fait, aussi bien établi que le premier : après l'enseignement des opérations arithmétiques, et pendant une longue période, les Q-problèmes restent mieux résolus que les E-problèmes. Considérons, par exemple, les problèmes de

(8) Le modèle est justifié et décrit de manière détaillée dans un article en préparation : Brissiaud R. & Sander E. *A hierarchical model of strategies for arithmetic word problem solving: evidences from a longitudinal study.*

multiplication suivants qui sont respectivement des Q et des E-problèmes : *Combien y a-t-il de gâteaux dans 3 paquets de 10 gâteaux ? et Combien y a-t-il de gâteaux dans 10 paquets de 3 gâteaux ?* Les taux de réussite en début de CE1 sont respectivement de 48% et 17% ; en fin de CE1, c'est-à-dire après l'apprentissage de la multiplication, ils sont de 73% et 53%. En fin d'année, le taux de réussite au E-problème (53%) s'est donc rapproché de celui du Q-problème (73%) mais sans le rejoindre.

Il existe un moyen simple d'expliquer qu'après l'enseignement d'une opération arithmétique, les Q-problèmes restent mieux résolus que les E-problèmes, c'est de considérer que leur résolution commence de la même manière (une « mentalisation d'une résolution par l'action ») et que la résolution des E-problèmes, en revanche, nécessite une étape supplémentaire. C'est l'idée qu'explicite la notion de « modèle *hiérarchique* des stratégies de résolution des problèmes arithmétiques », dont on présente ci-dessous un résumé sous forme de schéma.



Un argument important en faveur d'un tel modèle est le fait que le Q-problème *Dans sa tirelire Leila a 27 euros. Elle y ajoute d'autres euros et après elle a 31 euros. Combien a-t-elle ajouté d'euros ?* a, en fin de CE1 (après un an et demi environ d'apprentissage de la soustraction), un taux de réussite de 68% alors que le E-problème *Dans sa tirelire, Leila a 31 euros. Elle en sort 27 euros pour s'acheter un jouet. Combien lui reste-t-il d'euros dans sa tirelire ?* a un taux de réussite de 38%. De toute évidence, les élèves ne résolvent pas le premier problème (recherche d'un complément) en calculant la soustraction $31 - 27$ car ils auraient un taux de réussite bien moindre.

En fait, le modèle hiérarchique de stratégies est cohérent avec un grand nombre de résultats expérimentaux obtenus ces quinze dernières années(9). Un tel modèle peut sembler banal : il rend notamment compte du fait que pour résoudre le problème de complément *Dans sa tirelire Leila a 27 euros. Elle y ajoute d'autres euros et après elle a 31 euros…*, un enfant qui a appris la soustraction à l'école n'a nullement besoin de penser à cette opération arithmétique pour obtenir la solution numérique. Mais ce modèle dit bien plus que cela : lors de la résolution du même problème avec les nombres 4 et 31, l'enfant qui sait résoudre ce problème n'accède pas directement à la soustraction car sa représentation initiale du problème est la même que celle qu'il utilisait avant d'apprendre les opérations arithmétiques à l'école. Il se pourrait même que, pour un tel problème (*Combien faut-il ajouter à 4 € pour avoir 31 € ?*), l'adulte instruit n'accède jamais *directement* à la soustraction !(10) D'une certaine façon, on peut considérer que la démarche de résolution suivie lors de chaque résolution de problème est une sorte de résumé du développement : la première représentation mentale construite reste analogue à celle qui conduisait à l'usage de procédures informelles durant la première phase du développement (avant l'apprentissage des stratégies appropriées aux E-problèmes) ; c'est dans un second temps seulement de la résolution que l'enfant est susceptible d'accéder à l'opération arithmétique.

Un mode d'introduction du symbolisme de la soustraction qu'il convient d'éviter

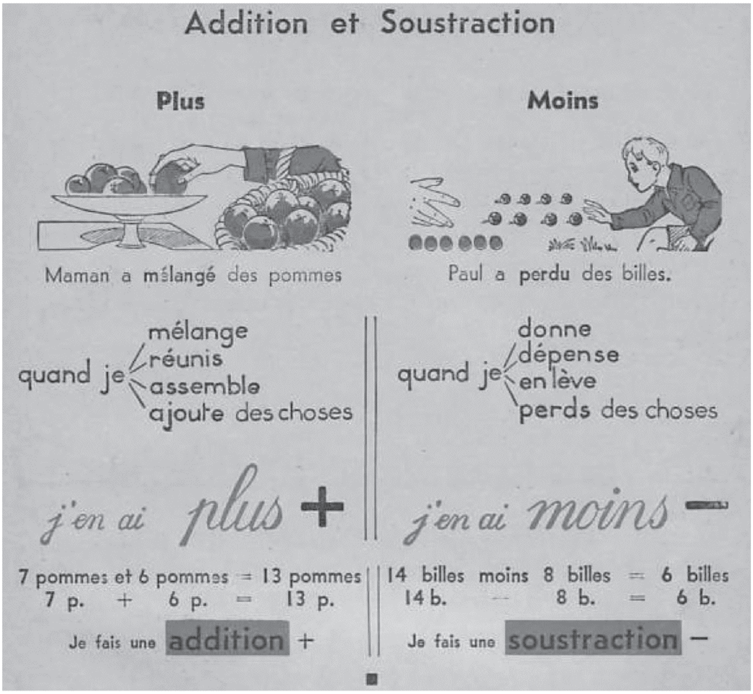
Venons-en maintenant au rôle du symbolisme arithmétique dans ce développement. Et, avant d'aborder le domaine de la division, intéressons-nous au cas très éclairant de l'addition et de la soustraction en analysant le mode d'introduction du symbolisme qui est celui de la pédagogie traditionnelle. L'addition y est définie comme l'opération qu'on utilise lorsqu'on ajoute, gagne, réunit, … et la soustraction lorsqu'on enlève, dépense, perd, … Dès que, dans un énoncé, la signification d'un verbe est du côté d'une quantité qui croît (respectivement décroît), les enfants sont ainsi incités à penser que l'addition (respectivement la soustraction) est l'opération qui permet d'obtenir la solution du problème.

Par ailleurs, lorsqu'on se contente d'inviter les enfants à apprendre « par cœur » les résultats des soustractions élémentaires et lorsque la soustraction a été ainsi définie comme un retrait, la procédure que les enfants utilisent spontanément pour trouver ces résultats est le comptage en reculant (décomptage). Or, pour calculer $9 - 7$, on n'a évidemment pas intérêt à compter à rebours à partir de 9, il vaut mieux faire : 7, 8 (1), 9 (2). Mais de nombreuses recherches attestent du fait que, lorsque les enfants ne l'apprennent pas à l'école, peu d'élèves le découvrent précocement(11). Outre une mémorisation peu efficace des résultats des soustractions élémentaires, ce procédé pédagogique a pour conséquence d'associer le symbolisme « $a - b$ » à la procédure de comptage en reculant.

(9) Brissiaud R. (1994) Teaching and Development : Solving " Missing Addend " Problems Using Substraction. In Schneuwly & Brossard (Eds) : Learning and development: contributions from Vygotsky. *European Journal of Psychology of Education*, 9 (4), 343-365.

(10) Des recherches sont en cours sur cette question.

(11) Voir, par exemple : Svenson O. & Sjöberg K. (1979) Strategies used by children when solving simple substractions. *Acta Psychologica*, 43, 477-489.



Le calcul quotidien CE1 (p. 13)

Mais ce mode d'introduction n'est pas seulement celui de la pédagogie d'avant 1970. Il reste aujourd'hui fréquemment utilisé dans les classes, sous une forme modernisée. On peut même considérer que c'est celui qui est recommandé dans les documents d'application des programmes de 2002. Lorsque les enseignants choisissent cette version moderne d'un choix pédagogique très ancien, les enfants commencent par déplacer un jeton sur une piste numérique formée d'une succession de cases numérotées. Pour déterminer le déplacement de leur jeton, ils utilisent deux dés selon les règles suivantes :

– un dé ordinaire qui indique le nombre de cases dont le jeton pourra se déplacer,
– un autre dé avec 3 faces contenant l'indication d'avancer et les 3 autres contenant celle de reculer.

Considérons le cas d'un enfant qui, à un moment donné, a son jeton sur la case numéro 4, qui fait 3 sur le dé normal et qui tire « avance » sur l'autre dé. Le numéro de la case d'arrivée de son jeton est le résultat du calcul de 4 + 3. Lorsque son jeton est sur la case numéro 9, lorsqu'il a tiré le nombre 3 sur le dé normal et lorsque l'autre dé indique de « reculer », la situation sert de mode d'introduction en classe de l'écriture : 9 – 3 = 6. Avec cette introduction du signe « – », le comptage en avançant sur la suite des nombres est encore plus fortement associé à l'addition et le comptage en reculant encore plus fortement associé à la soustraction que dans la pédagogie d'avant 1970. En effet, ces associations sont alors enseignées de manière plus explicite.

Quelles sont les conséquences d'un tel mode d'introduction de la soustraction ? Considérons le problème suivant : *Dans un autocar, il y a 37 personnes. À un arrêt, d'autres personnes montent dans l'autocar et après il y a 81 personnes en tout dans l'autocar. Combien de personnes sont montées à cet arrêt ?* L'élève de CE1 ou CE2 qui, comme le prédit le modèle hiérarchique de stratégies, essaie de simuler la situation décrite dans l'énoncé, est conduit à faire : 37 (les personnes présentes au départ) puis en levant un à un les doigts : « 38, 39, 40, 41, 42, … » Un tel comptage en avançant est trop long pour qu'il ait des chances de conduire à la solution et, toujours comme le prédit le modèle hiérarchique, l'élève est conduit à changer de stratégie. Il peut notamment sélectionner l'une des opérations arithmétiques qu'il a apprises à l'école. Mais la seule opération qu'il connaisse et qui soit compatible avec le comptage en avançant de 1 en 1 qu'il a amorcé est … l'addition et il calcule 37 + 81. La « correction » du travail des élèves par le maître laisse généralement un certain nombre d'entre eux dans un grande perplexité : jusqu'ici, quand l'énoncé d'un problème parlait d'une quantité qui croît, il fallait faire une addition ; apparemment, cela dépend des jours…

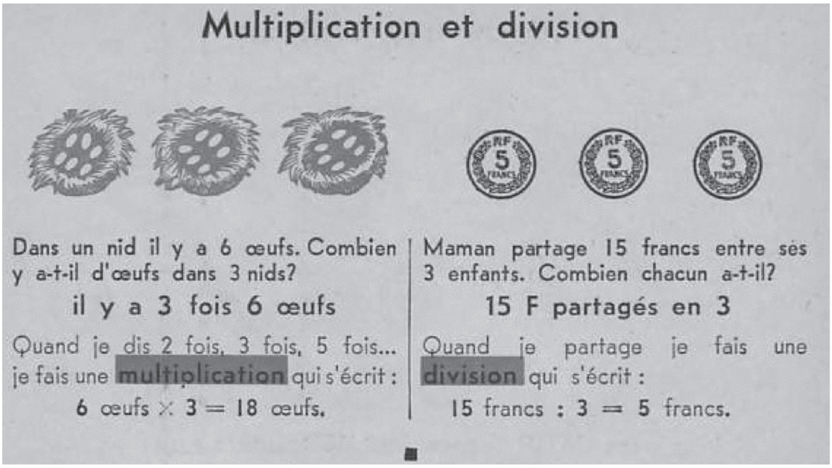
C'est typiquement ce genre de séance qui conduit certains enfants à avoir un comportement scolaire du type « âge du capitaine » : ils sélectionnent une opération à partir d'indices contextuels isolés (mots-clefs, opération qui est en cours d'étude, …). Dès lors, le comportement de ces élèves sort du fonctionnement décrit par le modèle hiérarchique de stratégies : ils ne cherchent même plus à simuler ce qui est dit dans l'énoncé.

Bien sûr, les enseignants, au cycle 3, mettent d'autres outils intellectuels à la disposition des élèves pour les aider à progresser en résolution de problèmes, ils leur parlent de la différence de deux grandeurs notamment. Mais en CM2, environ 20% des élèves choisissent toujours de calculer 37 + 81 pour résoudre le problème de l'autocar(12). Il est très vraisemblable que le mode d'introduction traditionnel de l'addition et de la soustraction, sous sa forme ancienne ou moderne, soit l'une des principales causes d'un tel taux d'échecs durables : les enseignants spécialisés dans la remédiation des difficultés scolaires savent combien il est difficile de faire en sorte qu'un élève qui « joue à l'écolier » en essayant de deviner les réponses attendues par l'enseignant retrouve un rapport aux activités scolaires qui lui permette de s'approprier des savoirs opératoires.

Un mode d'introduction du symbolisme de la division qu'il convient d'éviter

Les dangers d'une introduction précoce du formalisme de la division pour traiter seulement les situations de partage, s'analysent exactement de la même manière à l'aide du modèle hiérarchique des stratégies de résolution des problèmes. Une différence, cependant, est que pour se rappeler ce qu'est la pédagogie traditionnelle de la division, il faut consulter des ouvrages anciens. Elle n'a plus cours aujourd'hui, et c'est ce que les membres du GRIP regrettent.

(12) Riley M. & Greeno J. (1988) Developmental Analysis of Understanding Langage About Quantities and of Solving Problems, *Cognition and Instruction*, 5(1), 49-101.



Le calcul vivant CE1 (page 39)

Quelles sont les conséquences d'un mode d'introduction de la division où, longtemps, cette opération est associée au seul partage ? Considérons le problème suivant qui est un problème de groupement et donc un problème de division, bien qu'il ne soit pas un problème de partage : *Combien de paquets de 8 gâteaux peut-on former avec 50 gâteaux ?*.

L'élève de CE2 qui, comme le prédit le modèle hiérarchique de stratégies, essaie de simuler la situation décrite dans l'énoncé, est conduit à compter de 8 en 8. Il se dit « 8 » (1 paquet), « 16 » (2 paquets), « 24 » (3), … Un tel comptage mental de 8 en 8, en début de CE2, est difficile et l'élève sera vraisemblablement conduit à changer de stratégie et à sélectionner l'une des opérations arithmétiques qu'il a apprises. Or, dans le cadre de la pédagogie traditionnelle, la seule opération qu'il connaisse et qui soit compatible avec le comptage en avançant de 8 en 8 qu'il a amorcé est … la multiplication par 8. En effet, un partage en 8 parts égales, lui, conduirait l'élève à s'imaginer chacune des 8 personnes et à chercher : « 8 fois combien ? », c'est-à-dire 8 fois un nombre inconnu plutôt qu'« un nombre de fois 8 » comme dans le comptage de 8 en 8.

Là encore, la « correction » du travail des élèves par le maître laissera un grand nombre d'entre eux très perplexes : jusqu'ici, on leur avait dit que la division sert à partager et là, ils ne comprennent pas quel lien la situation des gâteaux peut avoir avec un partage. Perplexité dont les conséquences s'analysent exactement comme dans le cas de la soustraction.

Il est opportun de revisiter la pédagogie du calcul mental à l'école … mais pas ainsi que le préconise l'Avis de l'Académie

De manière évidente, comme le dit Guy Brousseau[13], il est opportun de revisiter aujourd'hui la pédagogie du calcul mental à l'école. Ainsi, la manière dont l'introduction du signe « – » est suggérée dans les documents officiels de 2002 n'aide

(13) http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/place-du-calcul-enseignement-primaire/resolveUid/6b20427f770f11257e7103327bca10c3

ni au calcul mental, ni à la résolution de problèmes relevant de cette opération. Mais les académiciens, dans l'Avis qu'ils ont rédigé, se trompent de remède : revenir à un enseignement formel de la division dès le cycle 2 en l'associant uniquement aux situations de partage, ce serait traiter la division comme l'est aujourd'hui la soustraction, ce serait aggraver la situation plutôt que l'améliorer.

En préconisant un retour à l'enseignement traditionnel, les académiciens pensent orienter l'école vers plus de rigueur, ils pensent l'inciter à mieux assumer ses responsabilités. Ces objectifs sont louables, mais le remède qu'ils préconisent est inadapté. En associant de manière précoce les symboles arithmétiques aux situations typiques (soustraction = retrait ; division = partage) et aux modes de calcul typiques (soustraire = décompter ; diviser = partager), on enseigne une toute petite partie de ce que les élèves devront comprendre et apprendre à faire. En fait, on enseigne la partie qu'ils apprendraient, même s'ils ne fréquentaient pas l'école (en utilisant la monnaie, par exemple). Et dans le même temps, on crée un obstacle à l'apprentissage de ce que les enfants n'apprendraient pas s'ils ne fréquentaient pas l'école.

On n'a jamais intérêt, à l'école, à mettre l'accent sur ce que les enfants apprendraient sans y aller. Il faut, par son enseignement, favoriser les progrès futurs des élèves et non se contenter de mettre un vernis qui « fait savant » sur les connaissances actuelles des élèves. Par exemple, il faut éviter de leur dire que, quand ils cherchent le résultat d'un retrait, ils font une soustraction et que, s'ils cherchent le résultat d'un partage équitable, ils font une division. Vygotski disait que les maîtres doivent s'employer à créer des *zones de développement prochain* en enseignant des concepts scolaires qui permettent aux enfants de repenser, restructurer leurs concepts quotidiens et pas seulement de les renommer.

Des progressions pédagogiques s'inscrivant dans une telle perspective existent tant pour la soustraction que pour la division. Pour la soustraction, par exemple, le grand pédagogue belge Cuisenaire introduisait cette opération dans une situation de comparaison et la progression correspondante échappe aux écueils décrits dans ce texte. Concernant la division une progression qui a la même propriété est présentée dans un texte que j'ai rédigé il y a 8 mois sur le même thème : « Calcul et résolution de problèmes : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu »(14).

Par ailleurs, divers cadres théoriques existent permettant de créer d'autres progressions : le modèle hiérarchique des stratégies de résolution des problèmes dynamiques, bien sûr, mais aussi le cadre théorique de l'organisation des situations de soustraction en réseau sémantique (Richard et Sander, 2000)(15), sans parler, évidemment, de la théorie des situations de Guy Brousseau.

Pour conclure, qu'il me soit permis de souligner les dangers qu'il y aurait à ne pas associer aujourd'hui les psychologues spécialistes du domaine à l'aménagement des programmes qui est en cours. Aucun d'entre eux n'a été sollicité en 2002 alors qu'il est certain qu'ils auraient, dès cette époque, mis en garde contre certains choix très contestables au regard des savoirs disponibles concernant le fonctionnement cognitif des élèves confrontés aux tâches arithmétiques élémentaires.

(14) http://www.cafepedagogique.net/dossiers/contribs/brissiaud2.php.

(15) Richard, J.F., & Sander, E. (2000). Activités d'interprétation et de recherche de solution dans la résolution de problème. In J.N. Foulin et C. Ponce Eds *Lire, écrire, compter, apprendre : les apports de la psychologie des apprentissages*. Bordeaux : CRDP d'Aquitaine.