Université Paul Sabatier **Mécanique des Solides**
L2 - Physique mardi 13 mars 2018

Contrôle continu
Durée : 1 h 30
Aucun document autorisé - Calculatrice autorisée

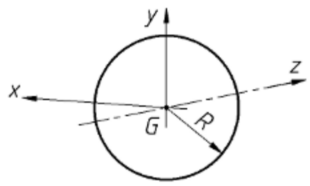
Exercice 1 : Moment d'inertie de la Terre

1) *Question préliminaire* : soit un solide de forme a priori arbitraire et non nécessairement homogène. Un point A quelconque de ce solide est repéré par ses coordonnées dans un repère orthonormé $(Oxyz)$. On note $\rho(A)$ la masse volumique du matériau au point A, $J_{(Ox)}$ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Ox et des notations similaires par rapport aux axes Oy et Oz. Démontrer que

$$J_{(Ox)} + J_{(Oy)} + J_{(Oz)} = 2J_O = 2\iiint \rho(A)\, OA^2\, \mathrm{d}\tau.$$

J_O est le moment d'inertie du solide par rapport au point O [τ est le volume élémentaire autour du point A]. Il est en général plus facile à calculer surtout si le solide a une forme sphérique autour de O...

La formule précédente pourra être admise et utilisée sans démonstration dans la suite.



2) La Terre est assimilée dans un premier temps à *une boule sphérique homogène* de masse volumique ρ_T.

a) Relier ρ_T à la masse M et au rayon R de la Terre.

b) En utilisant les symétries, calculer le moment d'inertie J_Δ de la Terre par rapport à l'axe des pôles (Δ), supposé passer par son centre, en fonction de M et R.

Le moment d'inertie de la Terre peut s'obtenir grâce à des mesures astronomiques (petites variations de la période de rotation par exemple). Sa valeur expérimentale est telle que $J_\Delta/(MR^2) = 0,33$. Commenter ce résultat et discuter l'hypothèse initiale.

3) On suppose maintenant que la Terre est formée de deux parties : un noyau sphérique de centre O et de rayon R_n et un manteau occupant tout le reste de la planète. Noyau et manteau sont fait de deux matériaux homogènes de masses volumiques respectives ρ_n et ρ_m inconnues. La sismologie (étude des tremblements de terre) permet d'estimer le rayon du noyau R_n.

a) Montrer que la masse M et le moment d'inertie de la Terre autour de l'axe des pôles satisfont maintenant le système d'équations :

$$\begin{aligned} M &= \frac{4\pi}{3}\left[\rho_n R_n^3 + \rho_m(R^3 - R_n^3)\right] \\ J_\Delta &= \frac{8\pi}{15}\left[\rho_n R_n^5 + \rho_m(R^5 - R_n^5)\right] \end{aligned}$$

b) En notant $a_n = R_n/R$ et ρ_T la masse volumique moyenne de la Terre, montrer d'après les résultats précédents que

$$\rho_T = \rho_n a_n^3 + \rho_m(1 - a_n^3) \qquad (1)$$

$$0,33\rho_T = \frac{2}{5}\left[\rho_n a_n^5 + \rho_m(1 - a_n^5)\right] \qquad (2)$$

c) On donne $M = 6.10^{24}$ kg, $R = 6400$ km et $R_n = 3500$ km.
Calculer numériquement ρ_m et ρ_n.
De quel matériau est fait principalement le noyau ?

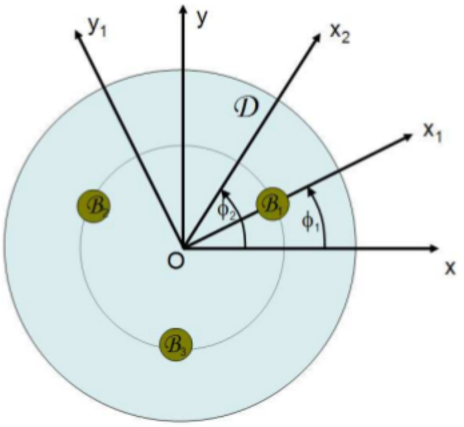
IL Y A UN AUTRE EXERCICE AU VERSO !

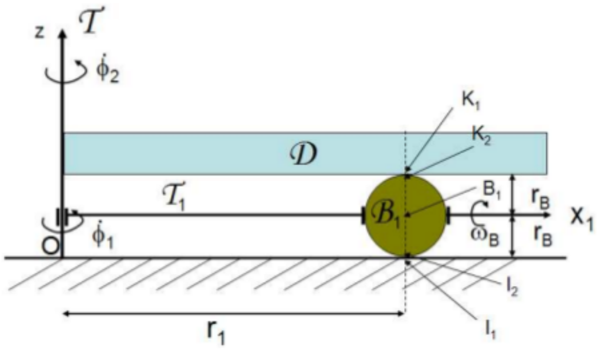
Exercice 2 : Mouvement du plateau d'un four à micro-ondes

Dans un four à micro-ondes, les plats sont posés sur un plateau $\mathcal{D}$ assimilé à un disque homogène de masse M_P et de rayon d.
Il est mis en rotation autour d'un axe vertical $\mathcal{T} = (Oz)$ par un système de trois billes $\mathcal{B}_i$ identiques de masse m_B et de rayon r_B, enfilées sur trois tiges $\mathcal{T}_i$ de rayon négligeable ($i = 1, 2, 3$). Les centres des billes sont fixés aux tiges à la distance $r_1 =$ cste de l'axe de rotation $\mathcal{T}$ du plateau. La bille $\mathcal{B}_i$ peut tourner autour de l'axe de la tige $\mathcal{T}_\rangle$ avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}_B = \omega_B\,\vec{e}_{x1}$ (voir figure droite).

Dans tout l'exercice, on ne s'intéresse qu'à la bille $\mathcal{B}_1$ fixée à la tige $\mathcal{T}_1$ qui peut par ailleurs tourner autour de l'axe $\mathcal{T}$ de façon *indépendante* du plateau.

On note $\mathcal{R}$ le référentiel lié au four d'axes $(Oxyz)$. La position de la tige $\mathcal{T}_1$ est repérée par l'angle $\phi_1(t)$ qu'elle fait avec l'axe Ox. On note $\mathcal{R}_1 = (Ox_1y_1z)$ le repère lié à la tige $\mathcal{T}_1$. Un point A quelconque du plateau est repéré par l'angle ϕ_2 que fait le rayon vecteur $\overrightarrow{OA}$ avec Ox (voir figure gauche).





1) Quel est le mouvement du référentiel $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$?
En déduire la vitesse, par rapport à $\mathcal{R}$, du centre de masse de la bille $\mathcal{B}_1$. On exprimera les composantes de ce vecteur dans la base de $\mathcal{R}_1$.

2) Exprimer, toujours dans la base de $\mathcal{R}_1$, les vitesses par rapport à $\mathcal{R}$ des points I_2 et K_2 de la bille en contact respectivement avec la base du four et avec le plateau $\mathcal{D}$ (cf. figure 2) en fonction de r_1, r_B, $\dot{\varphi}_1$ et ω_B.

3) Calculer enfin la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ du point K_1 du plateau $\mathcal{P}$ en contact avec la bille $\mathcal{B}_1$ en fonction de r_1 et $\dot{\phi}_2$.

4) Exprimer les conditions de roulement sans glissement aux deux points de contact de la bille et montrer que

$$\omega_B = -\frac{r_1}{r_B}\,\dot{\phi}_1 \qquad \text{et} \qquad \dot{\phi}_2 = 2\dot{\phi}_1.$$

5) On rappelle que le moment d'inertie de la bille autour de la tige $\mathcal{T}_1$ est $J = (2/5)m_B\,r_B^2$.
Évaluer l'énergie cinétique de la bille $\mathcal{B}_1$ en fonction de m_B, r_B et $\dot{\phi}_1$.