Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

C1 Soit le nombre complexe $z = 2 + i(3 - 7i)$

Développons : $z = 2 + 3i - 7i^2 = 2 + 3i + 7 = 9 + 3i$.
On en déduit:

A- La partie réelle de z est 9
B- z a pour image le point M(9 ;3)
C- La partie imaginaire de z est 3
D - Le conjugué de z est $\bar{z} = 9 - 3i$
E - Le module de z est $|z| = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

Il fallait donc cocher les cases : B-C

C2 Soit le nombre complexe $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{i}$

Multiplions et divisons z par le conjugué $-i$ du dénominateur :
$z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})(-i)}{i(-i)} = \dfrac{-i+i^2\sqrt{3}}{-i^2} = -\sqrt{3} - i$. Donc :

A- La forme algébrique de z est : $z = -\sqrt{3} - i$
B- $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$
C- En mettant le module de z en facteur dans la forme algébrique :
$z = 2[(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}) + i(\dfrac{-1}{2})] = 2(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6})$ et arg(z) = $\dfrac{7\pi}{6}$ (mod 2π)
D- Le point M image de z est l'un des deux points d' intersection du cercle de centre O, de rayon 2 (puisque OM = $|z| = 2$), et de la droite d'équation y = -1 (puisque Im(z) = ordonnée de M = -1).
C'est celui dont l' abscisse est négative.
E- $|z^6| = |z|^6 = 2^6 = 64$ et $\arg(z^6) = 6\arg(z) = 6\,\dfrac{7\pi}{6} = 7\pi = \pi \pmod{2\pi}$
Donc $z^6 = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$

Il fallait donc cocher les cases : B-E

C3 L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie

A- $|z| = 2$ est le cercle de centre O et de rayon 2 car $|z| = OM$.

B- $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ (mod 2π) est la demi-droite ouverte]Oy)

car $\arg(z) = (\vec{u};\overrightarrow{OM})$ (mod 2π)

C- ($|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (mod 2π)) est l'ensemble constitué

du seul point M_1 d'affixe $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ soit

$z_1 = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

D- Ré(z) = - 1 est la droite d'équation $x = -1$ car $z = -1 + iy$
avec y réel quelconque.

E- ($|z| = 2$ et Im(z) = 1) est l'ensemble constitué des deux points
M_2 et M_3 d'intersection du cercle de centre O, de rayon 2, et de
la droite d'équation y = 1.
Les coordonnées (x;y) de ces points vérifient le système :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

les couples ($-\sqrt{3}$; 1) et ($+\sqrt{3}$; 1) sont les solutionsde ce système.
M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $z_2 = -\sqrt{3} + i$ et $z_3 = \sqrt{3} + i$

Il fallait donc cocher seulement la case : A

C4 Soit le nombre complexe $z = -3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

On peut écrire $z = 3[-\cos\frac{\pi}{6} + i(-\sin\frac{\pi}{6})]$ soit

$z = 3[\cos(\pi+\frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi+\frac{\pi}{6})] = 3(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$

On en déduit :

A- $\arg(z) = \frac{7\pi}{6}$ (mod 2π)

B- $|z| = 3$

C- Une forme trigonométrique de (– z) est $-z = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

D- $z = 3(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$

E- $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}[\cos(-\frac{7\pi}{6}) + i\sin(-\frac{7\pi}{6})] = \frac{1}{3}[\cos(-\frac{7\pi}{6}+2\pi) + i\sin(-\frac{7\pi}{6}+2\pi)]$

soit $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

Il fallait donc cocher les cases : B-C-D-E

C5 Soit les nombres complexes

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad z_3 = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{7\pi}{6}}$$

A- $z_1 z_2 = 2\,e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})} = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

B- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\,e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$

C- $z_1^3 = e^{i[3(\frac{\pi}{3})]} = e^{i\pi} = -1$

D- $z_1 z_2 z_3 = 2\sqrt{3}\,e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{6})} = 2\sqrt{3}\,e^{-i\pi} = -2\sqrt{3}$

E- $\overline{z_3} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{3}\,e^{i(\frac{7\pi}{6}-2\pi)} = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Il fallait donc cocher les cases : A-E

C6 Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

A- $z^2 = -3$ équivaut succéssivement à : $z^2 = 3\,i^2$, $z^2 - (i\sqrt{3})^2 = 0$,
$(z + i\sqrt{3})(z - i\sqrt{3}) = 0$, $z + i\sqrt{3} = 0$ ou $z - i\sqrt{3} = 0$.
Cette équation a donc deux solutions complexes conjuguées
$z_1 = -i\sqrt{3}$ et $z_2 = i\sqrt{3}$

B- $(z + 1)[(2 + i)z - 3] = 0$ équivaut à ($z + 1 = 0$ ou $(2+i)z - 3 = 0$)
$z + 1 = 0 \iff z = -1$
$(2+i)z - 3 = 0 \iff z = \frac{3}{2+i} = \frac{3(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i}{4-i^2} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$

C- $\frac{2z}{z+i} = i\,z$ équivaut, pour $z \neq -i$ à $2z = i\,z\,(z + i)$ soit à
$z\,(2 - i\,z - i^2) = 0$ ou $z\,(3 - i\,z) = 0$. De là il vient : $z = 0$ ou
$z = \frac{3}{i} = \frac{3(-i)}{-i^2} = -3i$

D- $z^2 - z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3$ soit $\Delta = 3\,i^2 = (i\sqrt{3})^2$
Δ réel < 0 donc l'équation admet deux solutions complexes cojuguées :

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

E- $z^3 + z + 2 = 0$ admet une solution imaginaire pure si et seulement si
il existe b réel tel que $(i\,b)^3 + i\,b + 2 = 0$ soit $i^3 b^3 + i\,b + 2 = 0$
ou $2 + i\,(b - b^3) = 0$. Ceci n'est jamais vérifié.

Il fallait donc cocher les cases : B-C-D-E

C7 On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 + (2\cos\alpha)z + 1 = 0$, où α est un paramètre réel.

A- Le discriminant $\Delta = (2\cos\alpha)^2 - 4 = 4\cos^2\alpha - 4$ soit $\Delta = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha$ ou encore $\Delta = (2i\sin\alpha)^2$

B- Δ réel < 0 donc l'équation admet deux solutions complexex cojuguées

Une solution de l'équation est $z_1 = \dfrac{-2\cos\alpha - 2i\sin\alpha}{2} = -\cos\alpha - i\sin\alpha$

soit $z_1 = \cos(\alpha+\pi) + i\sin(\alpha+\pi)$

C- L'autre solution est $z_2 = \overline{z_1}$

D- Pour l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a réel non nul, b et c réels), la somme des solutions est égale à $-\dfrac{b}{a}$ et le produit à $\dfrac{c}{a}$.

On en déduit : $z_1 + z_2 = -2\cos\alpha$

E- Le produit des solutions est $z_1 z_2 = +1$

Il fallait donc cocher les cases : B-C-D

C8 T est la transformation du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. Si l'on a :

A- $z' = z - 3 + i$ alors T est la translation de vecteur $-3\vec{u} + \vec{v}$

B- $z' = iz = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ alors T est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

C- $z' = \bar{z}$ alors T est la symétrie d'axe $(O\,;\vec{u})$

D- $z' = -z$ alors T est la symétrie de centre O.

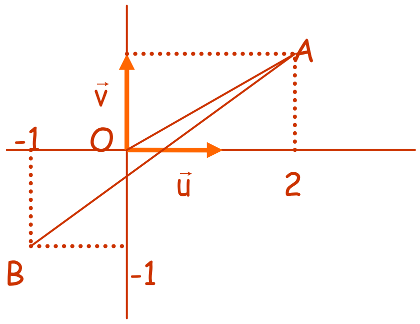
E- $z' - 2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-2)$ alors T est la rotation ayant pour centre le point A(2 ; 0) et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

En effet, en prenant comme nouvelle origine le point A(2 ; 0), et en notant Z et Z' les affixes respectives de M et M' dansle nouveau repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$, la relation précédente s'écrit : $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z$

Il fallait donc cocher les cases : B-E

C9

Les points A et B sont définis comme ci-contre :



L'ensemble des points M d'affixe z tels que :

A- $|z-2-i|=\sqrt{5}$ est le cercle de centre A et de rayon OA.
En effet cette relation est équivalente à $|z_M - z_A| = \sqrt{5}$ soit à
AM = $\sqrt{5}$ et OA = $\sqrt{5}$ d'après Pythagore.

B- $|z-2-i|=|z+1+i|$ est la médiatrice du segment [AB].
En effet cette relation équivaut à $|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$ soit à
AM = BM.

C- $\arg(z-2-i) = \frac{\pi}{2}$ (mod 2π) est la demi-droite ouverte]At)
ensemble des points M(x ;y) ` tels que x = 2 et y > 1.
En effet la relation donnée équivaut à $\arg(z_M - z_A) = \frac{\pi}{2}$ (mod 2π)

soit à $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}$ (mod 2π).

D- $\arg \frac{z-2-i}{z+1+i} = \frac{\pi}{2}$ (mod 2π) est le demi-cercle supérieur
de diamètre [AB] – {A;B}. En effet cette relation équivaut à
$\arg \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} = (\overrightarrow{MB}\ ,\ \overrightarrow{MA})$ (mod2π).
Rappelons que le 1$^{\text{èr}}$ membre de la relation donnée n'a de sens
que si z $\neq$ 2 + i et z $\neq$ - 1 – i soit si M $\neq$ A et M $\neq$ B.

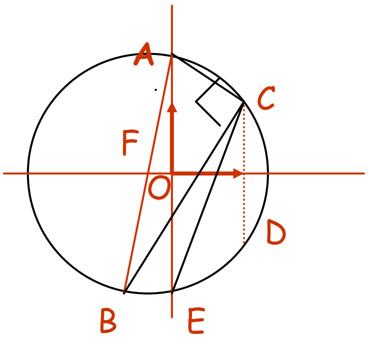
E- $Z = \frac{z-2-i}{z+1+i}$ est réel est la droite (AB) – {B}
En effet, Z est réel si et seulement si Z = 0 ou arg(Z) = kπ ,
avec k entier relatif.
Z = 0 si z = 2 + i soit si M est en A.

$\arg(Z) = k\pi$ si $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = k\pi$ soit si $M \in (AB) - \{A ; B\}$

Il fallait donc cocher les cases : A-B-E

C10

Les points A,B,C,D et E d' affixes respectives a, b, c, d et e sont sur le cercle de diamètre [AB] centré en F. On a alors :



A- Les points A et B ne sont pas symétriques par rapport au point O. Donc leurs affixes a et b ne sont pas opposées. Par suite $a + b \neq 0$.

B- $\arg \dfrac{b - c}{a - c} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{2} \ (\text{mod } 2\pi)$ car C est sur le cercle de diamètre [AB]. Donc $\dfrac{b - c}{a - c}$ est un imaginaire pur.

C- Les angles inscrits $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB})$ sont égaux car ils interceptent le même arc. Par suite :

$\arg \dfrac{b - a}{e - a} = \arg \dfrac{b - c}{e - c} \ (\text{mod } 2\pi)$ et donc

$\arg \dfrac{b - a}{e - a} = -\arg \dfrac{e - c}{b - c} \ (\text{mod } 2\pi)$

D- Lespoints C et D sont symétriques par rapport à $(O; \vec{u})$, de même que E et A donc $c = \overline{d}$ et $e = \overline{a}$. D' où $c - e = \overline{d} - \overline{a}$

E- $a + e + c + d = a + \overline{a} + \overline{d} + d = 2\,\text{Ré}(a) + 2\,\text{Ré}(d) = 2\,\text{Ré}(d) = 2.$

Il fallait donc cocher les cases : B-D-E