Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Antilles-Guyane Polynésie juin 2016 Corrigé

La calculatrice est autorisée.

Les annexes A et B sont à rendre avec la copie

EXERCICE 1 **5 points**

Un exploitant s'approvisionne en poussins chez un accouveur, personne qui fait éclore des œufs au moyen de couveuses artificielles. Dès l'éclosion, l'accouveur vaccine les poussins contre les maladies. Il n'existe pour cette exploitation que deux formes de pratiques de vaccinations : par injection ou par l'eau de boisson. On a constaté que :

- 30 % des poussins ont été vaccinés par l'eau de boisson ;
- 12 % de poussins vaccinés par injection ont été malades.

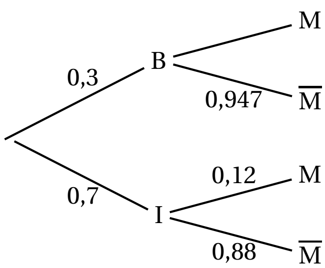
On choisit un poussin au hasard. On considère les évènements suivants :

B : « Le poussin a été vacciné par l'eau de boisson »

I : « Le poussin a été vacciné par injection »

M : « Le poussin a été malade »

1. Traduisons la situation par un arbre de probabilité (certaines branches resteront incomplètes).



2. La probabilité que le poussin n'ait pas été malade sachant qu'il a été vacciné par injection est notée $p_{\text{I}}\left(\overline{\text{M}}\right)$.

$p_{\text{I}}\left(\overline{\text{M}}\right)+p_{\text{I}}(\text{M})=1$ d'où $p_{\text{I}}\left(\overline{\text{M}}\right)=1-0{,}12=0{,}88$

3. $\text{I}\cap\overline{\text{M}}$ est l'évènement : « le poussin a été vacciné par injection et il n' a pas été malade ».

$\text{P}\left(\text{I}\cap\overline{\text{M}}\right)=p(\text{I})\times p_{\text{I}}\left(\overline{\text{M}}\right)=0{,}7\times 0{,}88=0{,}616$.

4. On a constaté aussi que 90 % des poussins n'ont pas été malades, c'est-à-dire $p\left(\overline{\text{M}}\right)=0{,}9$.

a. $\text{P}\left(\text{B}\cap\overline{\text{M}}\right)=\text{P}\left(\overline{\text{M}}\right)-\text{P}\left(\text{I}\cap\overline{\text{M}}\right)=0{,}9-0{,}616=0{,}284$.

b. $\text{P}\left(\text{B}\cap\overline{\text{M}}\right)=\text{P}(\text{B})\times\text{P}_{\text{B}}\left(\overline{\text{M}}\right)$ d'où $\text{P}_{\text{B}}\left(\overline{\text{M}}\right)=\dfrac{\text{P}\left(\text{B}\cap\overline{\text{M}}\right)}{\text{P}(\text{B})}=\dfrac{0{,}284}{0{,}3}=0{,}947$ à 10^{-3} près.

5. La meilleure vaccination pour cette exploitation semble être la vaccination par l'eau de boisson.

$\text{P}_{\text{I}}(\overline{\text{M}})<\text{P}_{\text{B}}\left(\overline{\text{M}}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donné en **ANNEXE A (à rendre avec la copie)**.
Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point.

Entourer, pour chaque proposition, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

EXERCICE 3 **5 points**

En 2015, l'exploitant a produit 16 tonnes de maïs. Il augmente sa production de 3 % par an à partir de 2015 dans le but de devenir autonome pour nourrir ses poulets.

On note u_n la masse, en tonnes, de maïs produite l'année $2015+n$.

1. $u_0 = 16$ puisque en 2015, l'exploitant a produit 16 tonnes de maïs.

   À un taux d'évolution t correspond un coefficient multiplicateur de $1 + t$.

   À un taux de 3 %, correspond un coefficient multiplicateur de 1,03.

   Par conséquent $u_1 = u_0 \times 1,03 = 16 \times 1,03 = 16,48$.

2. Puisque sa production augmente chaque année de 3 %, la production de l'année $n+1$ sera celle de l'année n multipliée par 1,03 d'où $u_{n+1} = 1,03u_n$.

3. Pour nourrir tous ses poulets, il lui faut produire une quantité de maïs de 21 tonnes.

   a. l'algorithme donné en **annexe B (à rendre avec la copie)** permettant de déterminer à partir de quelle année sa production personnelle sera supérieure à 21 est complété sur cette annexe.

   b. Déterminons, par la méthode de notre choix, la valeur affichée par l'algorithme.
   (u_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 16.
   Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
   $u_n = 16 \times (1,03)^n$. Résolvons alors $16 \times (1,03)^n \geqslant 21$

$$\begin{aligned}
16 \times (1,03)^n &\geqslant 21\\
(1,03)^n &\geqslant \frac{21}{16}\\
\ln(1,03)^n &\geqslant \ln\frac{21}{16}\\
n\ln 1,03 &\geqslant \ln\frac{21}{16}\\
n &\geqslant \frac{\ln\frac{21}{16}}{\ln 1,03}\\
\text{or } \frac{\ln\frac{21}{16}}{\ln 1,03} &\approx 9,200
\end{aligned}$$

   Par conséquent la valeur affichée par l'algorithme est 10.

   Nous pouvions traduire cet algorithme en un programme fonctionnant sur calculatrice, en sortie nous lisons 10.

4. Calculons la quantité totale, à la tonne près, de maïs produite de 2015 à 2025 par cet exploitant.

   $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=10} u_n = 16 \times \frac{1,03^{11}-1}{1,03-1} \approx 204,925.$

   Nous aurions pu modifier l'algorithme pour calculer la somme et sa valeur en sortie. Nous aurions obtenu 204,925.

   La quantité totale, à la tonne près, de maïs produite de 2015 à 2025 par cet exploitant est de 205 t.

EXERCICE 4 — 6 points

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près si nécessaire.

Début 2015, l'exploitant fait mesurer la masse de matière organique, en kg pour 100 kg de terre, présente dans la terre d'une de ses parcelles de maïs.
Pour pouvoir augmenter sa production de maïs, il décide d'enrichir sa terre. La masse de matière organique présente dans la terre est alors modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = 4 - \frac{4}{1+\mathrm{e}^{0,15t}}$$

exprimée en kg pour 100 kg de terre, où t est le temps écoulé, exprimé en années, à partir du jour où la mesure a été réalisée. Début 2015 correspond à $t = 0$.

1. Calculons le résultat de la mesure effectuée début 2015 c'est-à-dire $f(0)$.

   $f(0) = 4 - \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^0} = 4 - 2 = 2.$

2. On veut estimer l'évolution de cet enrichissement.

a. Calculons la limite de la fonction f en $+\infty$.

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 4 \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{4}{1+\mathrm{e}^{0,15t}} = 0$

b. Déterminons $f'(t)$.

$f'(t) = 0 - 4 \times \dfrac{-0,15\mathrm{e}^{0,15t}}{(1+\mathrm{e}^{0,15t})^2} = \dfrac{0,6\mathrm{e}^{0,15t}}{\left(1+\mathrm{e}^{0,15t}\right)^2}$.

c. La fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ puisque, pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[\quad f'(t) > 0$ comme quotient de termes positifs.

d. Donnons une interprétation des résultats obtenus en **2.a.** et en **2.c.** dans le contexte de cet exercice.

La masse de matière organique présente dans le sol en 2015 est de 2 kg pour 100 kg de terre. En en ajoutant chaque année, celle-ci augmente mais ne pourra dépasser le seuil de 4 kg pour 100 kg de terre.

On donne en **annexe B** la portion de la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle [5 ;15].

3. Le tracé de la courbe sur l'intervalle [0 ; 20] est complété en **annexe B (à rendre avec la copie)** .

4. On désigne par Q_m la masse moyenne de matière organique présente dans la terre entre la 5^e^ et la 10^e^ année.

On admet que $\mathrm{Q}_m = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_5^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.

À l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de Q_m arrondie au dixième est 3,0.

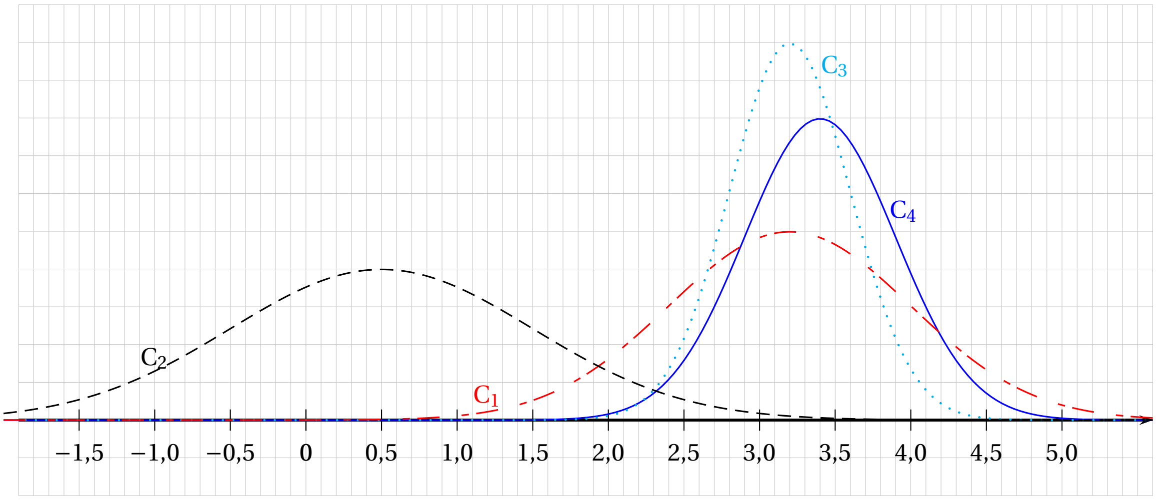
Puisque la courbe est proche d'un segment de droite, nous pouvons considérer Q_m *comme la hauteur du rectangle calculée au milieu de l'intervalle [5 ; 10]* $\mathrm{Q}_m \approx f(7,5)$ *c'est-à-dire* $\mathrm{Q}_m \approx 3,0$.

Autre possibilité, compter les carreaux donnant une approximation de l'aire comprise entre la courbe l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 5$ *et* $x = 10$. *Nous trouvons environ 75 carreaux soit 15 unités d'aire. Par conséquent* $\mathrm{Q}_m = \dfrac{1}{5} \times 15 = 3$

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2

Les quatre courbes représentées ci-dessous sont des courbes de GAUSS associées à des variables aléatoires distribuées suivant une loi normale.



On note X la variable aléatoire qui, à chaque grain de maïs (d'une certaine variété), associe sa masse en gramme. La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 3,4$ et d'écart-type $\sigma = 0,5$.

1. La courbe de GAUSS associée à la variable aléatoire X est

$\cancel{C_1}$ $\cancel{C_2}$ $\cancel{C_3}$ $\boxed{C_4}$

2. On prélève au hasard un grain de maïs. La probabilité d'avoir prélevé un grain de maïs dont la masse est comprise entre 2,4 et 3,4 grammes est à 10^{-2} près

$\boxed{0,48}$ $\cancel{0,5}$ $\cancel{0,95}$ $\cancel{1}$

3. On prélève au hasard un grain de maïs. Un grain de maïs est commercialisable quand sa masse est supérieure à 2,4 grammes.

La probabilité d'avoir prélevé un grain de maïs commercialisable est à 10^{-2} près

$\cancel{0,03}$ $\cancel{0,5}$ $\cancel{0,95}$ $\boxed{0,98}$

C_1 est associée à une variable aléatoire suivant la loi normale $N(\mu_1 ; \sigma_1)$ et C_3 est associée à une variable aléatoire suivant la loi normale $N(\mu_3 ; \sigma_3)$.

4. On peut dire que :

$\cancel{\mu_1 < \mu_3}$ $\cancel{\mu_3 < \mu_1}$ $\cancel{\sigma_1 < \sigma_3}$ $\boxed{\sigma_3 < \sigma_1}$

ANNEXE B (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 question 3.b.

Variables :
U réel
N entier naturel
Initialisation :
Affecter à N la valeur 0
Affecter à U la valeur 16
Traitement :
Tant que U<21
U prend la valeur 1,03 × U
N prend la valeur N+1
Fin du Tant que
Sortie :
Afficher N

EXERCICE 4 question 3