



Chapitre M4

Algèbre 7

DU PREMIER AU SECOND DEGRE

Capacités	Connaissances
Utiliser les TIC pour compléter un tableau de valeurs, représenter graphiquement, estimer le maximum ou le minimum d'une fonction polynôme du second degré et conjecturer son sens de variation sur un intervalle.	Expression algébrique, nature et allure de la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ (a réel non nul, b et c réels) en fonction du signe de a .
Résoudre algébriquement et graphiquement, avec ou sans TIC, une équation du second degré à une inconnue à coefficients numériques fixés. Déterminer le signe du polynôme $ax^2 + bx + c$ (a réel non nul, b et c réels).	Résolution d'une équation du second degré à une inconnue à coefficients numériques fixés.

Contenu du dossier :

- ☐ Cours
- ☐ Exercices (**Chapitre 5** pages 71-88)
- ☐ Correction exercices
- ☐ Evaluation **EM4**
- ☐ Correction évaluation EM4



PBP M4

Activité 1 Cochez la case correspondant à la bonne réponse.a) La solution de l'équation $-5x + 10 = 0$ est :

☐ 0 ☐ 2 ☐ -2 ☐ 0,5 ☐ -5

b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x + 3 > 0$ est :

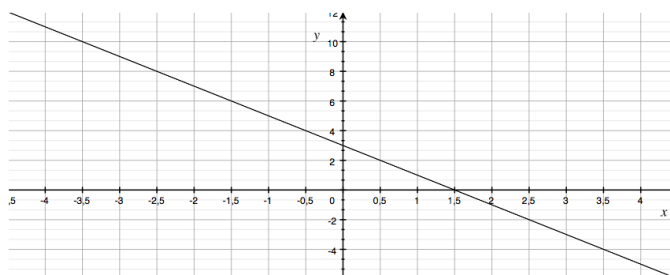
☐ $] -\infty; 3]$ ☐ $] 3; +\infty]$ ☐ $[3; +\infty]$ ☐ $] -\infty; 3[$

2 Cochez la ou les cases correspondant à une bonne réponse.a) Une solution de l'équation $x^2 - 9 = 0$ est:

☐ 0 ☐ 3 ☐ -3 ☐ 9 ☐ -9

b) Une solution de l'inéquation $x^2 - 9 > 0$ est:

☐ 0 ☐ 3 ☐ -3 ☐ 9 ☐ -9

3 On a tracé sur tableur la droite d'équation $y = -2x + 3$.a) **Utiliser** le graphique pour relier le début de chaque phrase à la fin qui lui correspond.

- | | | |
|---|---|-------------|
| La droite coupe l'axe des abscisses pour | • | • $x < 1,5$ |
| La droite est située au-dessus de l'axe des abscisses pour | • | • $x = 1,5$ |
| La droite est située au-dessous de l'axe des abscisses pour | • | • $x > 1,5$ |

b) **Entourer** le tableau de signe de $-2x + 3$.

x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty;$
$-2x+3$	+	0	-

x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty;$
$-2x+3$	-	0	+

I. Fonctions polynômes du second degré

Une fonction polynôme du second degré est une fonction du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Exemple

On lance verticalement une balle. La hauteur, en mètres, atteinte par la balle est donnée en fonction du temps $x \geq 0$, en secondes, par $f(x) = -5x^2 + 15x + 1,55$

de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, ici $a = \dots\dots\dots$; $b = \dots\dots\dots$; $c = \dots\dots\dots$.

Activité 2

1. Tracer sur l'écran d'une calculatrice la parabole représentative de la fonction f définie dans l'exemple, pour les abscisses dans l'intervalle $[0 ; 3,1]$.

2. Rayer l'encadré inexact.

a) La parabole est orientée vers le / car $a \geq / \leq 0$

b) La fonction f a un / en $x = 1,5$

c) La fonction f est strictement / sur $[0 ; 1,5]$

d) La fonction f est strictement / sur $[1,5 ; 3,1]$

3. Compléter le tableau de valeurs de f .

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3,1
$f(x)$							

4. a) Quelle est la valeur du maximum de f sur l'intervalle $[0 ; 3,1]$?

b) Vérifier qu'il est atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$, c'est-à-dire $x = \dots\dots\dots$.

5. Utiliser le graphique ou le tableau de valeurs pour **relier** chaque début de phrase à la fin qui lui correspond.

- | | | |
|---|---|----------------|
| La balle est lancée d'une hauteur de | • | • 12,8 mètres |
| La hauteur atteinte par la balle au bout de 1 seconde est | • | • 1,55 mètres |
| La hauteur maximale atteinte par la balle est | • | • 3,1 secondes |
| La balle commence à redescendre au bout de | • | • 11,55 mètres |
| La balle atteint la hauteur 0 au bout de | • | • 1,5 secondes |

I.1. Comment étudier une fonction polynôme du second degré et tracer sa courbe représentative ?

Méthode 1

Soit f la fonction polynôme du second degré, telle que, pour x réel, $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels, avec $a \neq 0$.

Étape 1 Calculer $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et $y_0 = f(x_0)$.

Étape 2: Déterminer le signe de a , puis dresser le tableau de variation de f :

• **$a > 0$** : La fonction f est :

- strictement pour $x \leq x_0$,
- strictement pour $x \geq x_0$
- et présente un en x_0 .

x	x_0
$f(x)$	

• **$a < 0$** : La fonction f est:

- strictement pour $x \leq x_0$,
- strictement pour $x \geq x_0$,
- et présente un en x_0 .

x	x_0
$f(x)$	

Étape 3 Établir un tableau de valeurs de la fonction.

Étape 4 Tracer la courbe représentative de f ; contrôler ce tracé sur la calculatrice.

Exemple :

Soit f et g les fonctions définies sur $[-2; 1,5]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = -2x^2 + x + 1$.

Étudier les fonctions f et g , puis **tracer** leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère.

Étape 1 • Pour la fonction f : $x_0 = -\frac{b}{2a} = \dots$ et $y_0 = f(x_0) = \dots$

• Pour la fonction g : $x_0 = -\frac{b}{2a} = \dots$ et $y_0 = g(x_0) = \dots$

Étape 2 On dresse les tableaux de variation de f et de g .

• Pour f : $a = \dots\dots\dots$, donc $a \dots\dots 0$

• Pour g : $a = \dots\dots\dots$, donc $a \dots\dots 0$

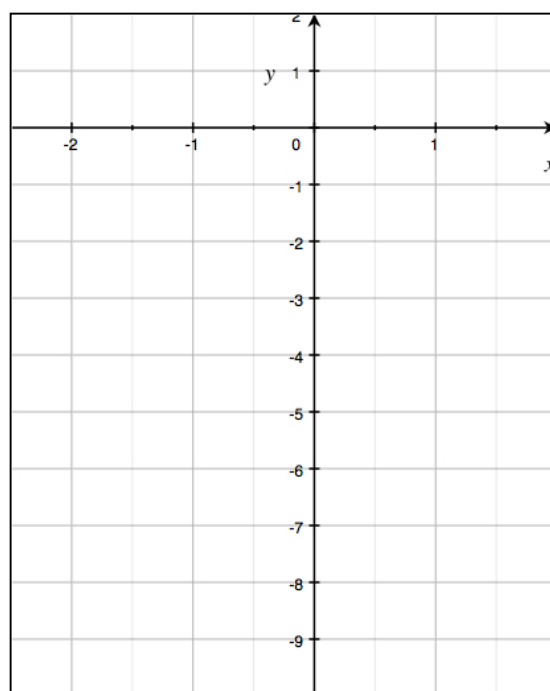
x	-2	$\dots\dots\dots$	1,5
$f(x)$			

x	-2	$\dots\dots\dots$	1,5
$g(x)$			

Étape 3 On établit un tableau de valeurs de f et de g à l'aide de la calculatrice.

Étape 4 On trace les courbes représentatives de f et de g .

x	$f(x)$	$g(x)$
-2		
-1,5		
-1		
-0,5		
0		
0,5		
1		
1,5		



Exercices : ☐ 1 page 71 ☐ 2 page 71

En résumé

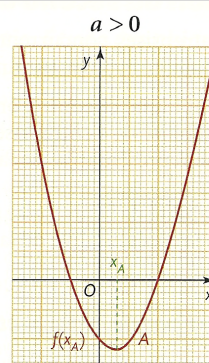
Une fonction polynôme du second degré est une fonction du type

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

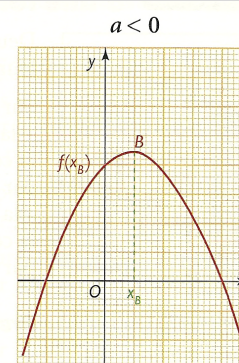
Sa courbe représentative est une parabole.

Si $a > 0$ la fonction admet un minimum ;

Si $a < 0$ la fonction admet un maximum.



La fonction admet en x_A un **minimum** $f(x_A)$.
La parabole est tournée « vers le haut ».



La fonction admet en x_B un **maximum** $f(x_B)$.
La parabole est tournée « vers le bas ».

II. Résolution d'une équation du second degré

II.1. Résolution graphique

Activité 3 :

Etude graphique

Avec votre calculatrice graphique, **tracer** les courbes représentatives des trois fonctions suivantes :

- ① $f(x) = x^2 - 4x + 3$
- ② $g(x) = 0,5x^2 - x + 0,5$
- ③ $h(x) = 2x^2 - 1,5x + 2$

x est compris entre -2,5 et 4 et y est compris entre -2 et 6,5.

Vous obtenez l'écran ci-contre.

En utilisant le graphique, **résoudre** les équations suivantes :

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

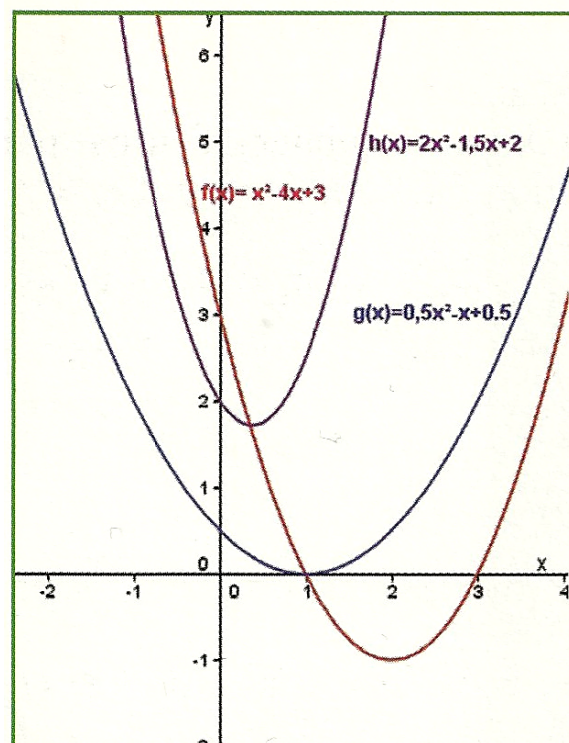
.....

b) $0,5x^2 - x + 0,5 = 0$

.....

c) $2x^2 - 1,5x + 2 = 0$

.....



II.2. Etude algébrique

Activité 4

Les équations précédentes sont de la forme $ax^2 + bx + c = 0$; pour chacune d'elles, on note Δ le nombre défini par $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ se lit « delta »).

1. Compléter le tableau suivant.

Pour compléter la dernière colonne, on utilisera les résultats de la première partie.

	Valeur de a, b et c			Valeur de Δ	Signe de Δ	Nombre de solutions
	a	b	c			
Equation $x^2 - 4x + 3 = 0$						
Equation $0,5x^2 - x + 0,5 = 0$						
Equation $2x^2 - 1,5x + 2 = 0$						

2. Quel lien peut-on observer entre le signe de Δ et le nombre de solutions de l'équation ?

- Si Δ est positif, l'équation a solution(s).
- Si Δ est égal à 0, l'équation a solution(s).
- Si Δ est négatif, l'équation a solution(s).

Exercices : ☐ 34 page 74 ☐ 35 page 74 ☐ 36 page 74
 ☐ 37 page 74 ☐ 38 page 74 ☐ 39 page 74
 ☐ 40 page 74 ☐ 41 page 74

3. En utilisant les formules générales données dans le Mémo en page 8, **retrouver** pour chaque équation les résultats obtenus dans la première partie.

- Equation $x^2 - 4x + 3 = 0$
-
-
-
-
-
-
-

➤ Equation $0,5x^2 - x + 0,5 = 0$

.....

.....

➤ Equation $2x^2 - 1,5x + 2 = 0$

.....

MEMO

Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

avec $a \neq 0$.

- Le nombre noté Δ (delta) défini par $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation.
- Le nombre de solutions de l'équation dépend de la valeur de Δ .

Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution : $x = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Exemples : Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 - 10x + 16 = 0$

$a =$ $b =$ $c =$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta =$

$\Delta =$

Δ 0 donc l'équation a solution(s)

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$x_1 =$

$x_2 =$

$S = \{ \dots ; \dots \}$

$x_1 =$

$x_2 =$

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = \dots$

$\Delta = \dots$

 $\Delta \dots 0$ donc l'équation a $\dots$ solution(s)

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$x = \dots \quad S = \{\dots\}$

$x = \dots$

c) $2x^2 + 4x + 4 = 0$

$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = \dots$

$\Delta = \dots$

 $\Delta \dots 0$ donc l'équation a $\dots$ solution(s)

$S = \dots$

Exercices

☐ 22 page 73☐ 28 page 73☐ 24 page 73☐ 29 page 73☐ 25 page 73

III. Signe du polynôme $ax^2 + bx + c$

III.1. Faire le lien entre le signe de $f(x)$ et la position de la parabole représentative de f

Soit f une fonction polynôme du second degré

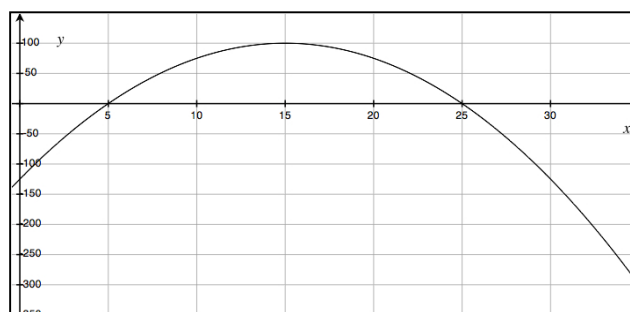
Le signe de $f(x)$ est déterminé par la position de la parabole représentative de f par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple

Un artisan d'art réalise et vend des objets d'un modèle donné ; il estime que le bénéfice réalisé pour la vente de x unités est égal, en centaines d'euros, à $B(x) = -x^2 + 30x - 125$

pour $0 \leq x \leq 35$.

Un tracé de la courbe représentative de la fonction B est présenté ci-contre :



Activité 5

1. Sur le graphique :

1.1.Marquer en noir les points de la courbe situés sur l'axe des abscisses ;

1.2.Surligner en bleu les points de la courbe situés au-dessous de cet axe ;

1.3.Surligner en vert les points de la courbe situés au-dessus de cet axe.

2. Rayer les encadrés inexacts.

2.1.Les points en noir ont des ordonnées / , donc, pour leurs abscisses x ,
 /

2.2.Les points en bleu ont leurs ordonnées / donc, pour tout nombre réel x de $[0 ; 5[$ ou de $]25 ; 35]$, / .

2.3.Les points en vert ont leurs ordonnées / , donc, pour tout nombre réel x de $]5 ; 25[$, / .

3. Compléter le tableau de signe suivant avec les signes – ou + .

x	0			35
$B(x)$				

4. Pour chaque proposition, entourer la réponse exacte (Vrai ou Faux).

4.1.L'artisan est déficitaire pour les 3 premières unités $B(x)$ vendues :

Vrai

Faux

4.2.L'artisan est déficitaire pour les 7 premières unités vendues :

Vrai

Faux

4.3.L'artisan est bénéficiaire des 6 aux 24 premières unités vendues :

Vrai

Faux

Exercices ☐ 42 page 75 ☐ 43 page 75 ☐ 44 page 75 ☐ 45 page 75

☐ 46 page 75 ☐ 47 page 75 ☐ 48 page 76 ☐ 49 page 76

☐ 50 page 76 ☐ 51 page 77 ☐ 52 page 77

III.2. Comment déterminer le signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$; x réel)?

Méthode 3

Étape 1: Tracer sur calculatrice ou sur tableur la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Étape 2: Dans le cas où la parabole a des points d'intersection avec l'axe des abscisses, résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, pour déterminer les abscisses de ces points.

Étape 3: Observer la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses et résumer les résultats dans un tableau de signe :

- pour les abscisses x pour lesquelles la parabole coupe cet axe $ax^2 + bx + c = 0$;
- pour les abscisses x pour lesquelles la parabole est au-dessus de l'axe, $ax^2 + bx + c > 0$;
- pour les abscisses x pour lesquelles la parabole est au-dessous de l'axe, $ax^2 + bx + c < 0$

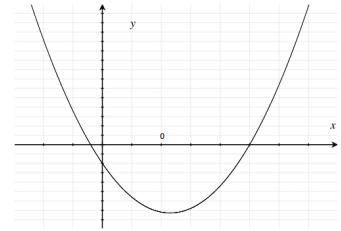
Exemples :

a) **Réaliser** un tableau de signe de $x^2 - 4,6x - 2$.

b) **Réaliser** un tableau de signe de $-2x^2 + x - 1$.

a) **Étape 1** On trace sur calculatrice la parabole d'équation

$y = \dots\dots\dots$ (tracé ci-contre).



Étape 2 Cette parabole coupant l'axe des abscisses, on résout l'équation $x^2 - 4,6x - 2 = 0$:

$\Delta = \dots\dots\dots$

Les solutions sont :

$x_1 = \dots\dots\dots$

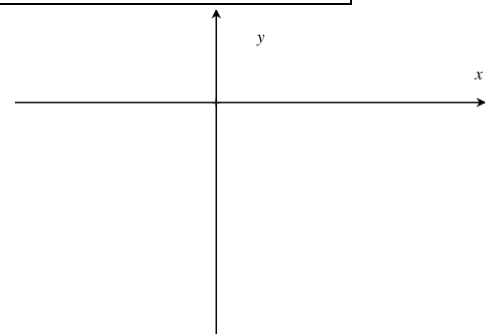
$x_2 = \dots\dots\dots$

Étape 3 En observant la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses, on complète le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$+\infty$
$x^2 - 4,6x - 2$	+	0	$\dots\dots\dots$	0 $\dots\dots\dots$

b) **Étape 1** On trace sur calculatrice la parabole d'équation

$y = \dots\dots\dots$.



On reproduit sommairement ce tracé ci-contre.

Étape 2 Cette parabole $\dots\dots\dots$ l'axe des abscisses, il $\dots\dots\dots$ d'équation à résoudre.

Étape 3 En observant la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses, on complète le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-2x^2 + x - 1$	$\dots\dots\dots$	.

Mémo

✓ Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 le polynôme est du signe contraire de a pour tout x compris entre x_1 et x_2 .

✓ Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas deux solutions distinctes, le polynôme est du signe de a pour tout réel x .

Exercices : ☐ 56 page 78 ☐ 57 page 78 ☐ 58 page 78 ☐ 59 page 78 ☐ 60 page 78
☐ 70 page 78 ☐ 71 page 78 ☐ 72 page 78 ☐ 73 page 78 ☐ 74 page 79
☐ 75 page 79 ☐ 76 page 79 ☐ 77 page 79

Application: Deux entreprises concurrentes FastDéco et GlobalDéco ont vu leur rentabilité évoluer sur une période de 4 ans.

Sur le graphique ci-contre, on a visualisé :

- la rentabilité de l'entreprise FastDéco (en milliers d'euros) par la courbe représentative de la fonction f , définie pour $0 \leq x \leq 4$, par $f(x) = x^2 - 4x + 3$;
- La rentabilité de l'entreprise GlobalDéco (en milliers d'euros) par la courbe représentative de la fonction g , définie pour $0 \leq x \leq 4$, par $g(x) = -x^2 + 3x$.

Première partie. Interprétation graphique

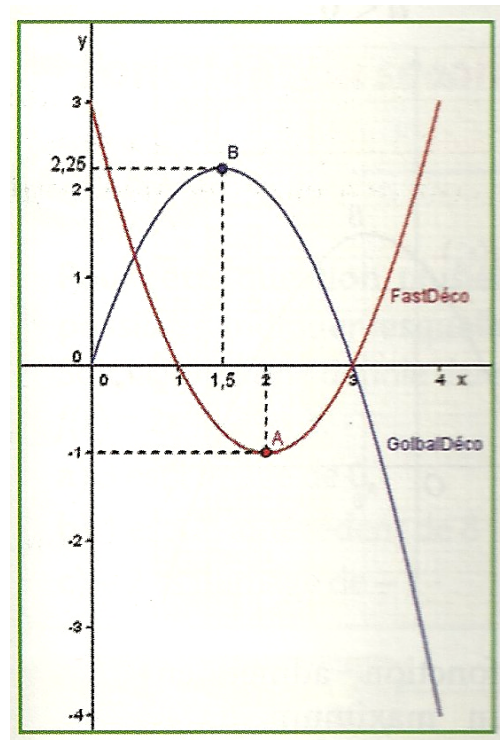
1. a) **Indiquer** sur quel intervalle la fonction f est décroissante, sur quel intervalle la fonction f est croissante.....

.....

- b) **Vérifier** que le coefficient de x^2 dans l'expression de $f(x)$ est positif et que f admet un minimum.

Préciser la valeur x_A pour laquelle f admet ce minimum $f(x_A)$. Donner $f(x_A)$

.....



2. a) **Indiquer** sur quel intervalle la fonction g est croissante, sur quel intervalle la fonction g est décroissante.

 b) **Vérifier** que le coefficient de x^2 dans l'expression de $g(x)$ est négatif et que g admet un maximum.
Préciser la valeur x_B pour laquelle g admet ce maximum $g(x_B)$. Donner $g(x_B)$.

3. a) **Déterminer** les deux valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$

- b) Quel est le signe de la fonction f sur quel intervalle ?

4. a) **Déterminer** les deux valeurs de x pour lesquelles $g(x) = 0$

- b) Sur quel intervalle la fonction g est-elle strictement positive ?

Deuxième partie. Signe du polynôme $ax^2 + bx + c$

1. a) Quelles sont les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$?

- c) **Donner** l'intervalle de x pour lequel $x^2 - 4x + 3 < 0$

2. a) Quelles sont les solutions de l'équation $-x^2 + 3x = 0$?

b) **Donner** l'intervalle de x pour lequel $-x^2 + 3x > 0$

.....
.....
.....

3. A partir des réponses obtenues aux questions précédentes :

a) **Déterminer** la période pendant laquelle l'entreprise FastDéco est déficitaire.

.....
.....
.....

b) **Déterminer** la période pendant laquelle l'entreprise GlobalDéco est bénéficiaire.

.....
.....
.....
.....

Problèmes : ☐ 92 page 80

☐ 95 page 82

☐ 96 page 82