Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole-Antilles-Guyane-Réunion juin 2014 Correction

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **6 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

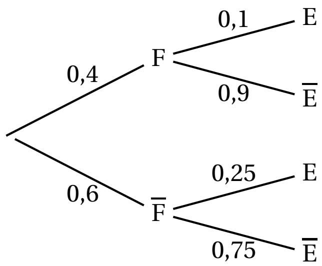
On souhaite implanter un parc éolien dans une région et pour cela on réalise un sondage sur la population proche.
Les résultats obtenus sont les suivants :

— 60 % de la population interrogée est contre l'implantation de ce parc éolien dans leur région et parmi eux 25 % se définissent écologistes.

— Parmi la population interrogée favorable à l'implantation de ce parc, 10 % se définissent écologistes.

On interroge au hasard une personne issue de cette population.
On note F l'événement « la personne interrogée est favorable à l'implantation de ce parc éolien ».
On note E l'événement « la personne interrogée se définit écologiste ».

1. Construisons un arbre de probabilités décrivant cette situation, en précisant sur chaque branche la valeur des probabilités.



2. La probabilité que la personne interrogée se définisse écologiste et soit contre l'implantation du parc éolien dans sa région est notée $p\left(\overline{\text{F}} \cap \text{E}\right)$. Calculons cette probabilité.

$$p\left(\overline{\text{F}} \cap \text{E}\right) = p\left(\overline{\text{F}}\right) \times p_{\overline{\text{F}}}(\text{E}) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$$

3. Montrons que $p(\text{E}) = 0,19$.

$$p(E) = p(\text{F} \cap \text{E}) + p\left(\overline{\text{F}} \cap \text{E}\right) = 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}19.$$

4. Calculons $p_{\text{E}}\left(\overline{\text{F}}\right)$.

$$p_{\text{E}}\left(\overline{\text{F}}\right) = \frac{p\left(\text{E} \cap \overline{\text{F}}\right)}{p(\text{E})} = \frac{0{,}15}{0{,}19} \approx 0{,}79$$

Parmi les personnes se définissant écologistes, la probabilité qu'il soit contre l'implantation du parc éolien est de 0,79.

PARTIE B On s'intéresse à la rentabilité énergétique d'un parc d'éoliennes dans une région.

Les relevés météorologiques sur une année montrent que la probabilité d'avoir des conditions optimales de fonctionnement de ce parc est de 0,45.
On admettra que les conditions météorologiques sont indépendantes d'une année sur l'autre.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'années pour lesquelles ces conditions optimales de fonctionnement sont réunies sur une période de 10 ans.
Tous les résultats numériques seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1. La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,45$ car il s'agit d'une répétition de 10 séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues : conditions optimales ou non et la probabilité que la condition soit optimale est 0,45.
Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,45) d'où $p(X = k) = \binom{10}{k}(0{,}45)^k(0{,}55)^{10-k}$.

2. Calculons la probabilité pour que les conditions optimales de fonctionnement de ce parc ne soient jamais atteintes durant cette période c'est-à-dire calculons $p(X=0)$.

$$p\big(X=0\big)=\binom{10}{0}(0{,}45)^0(0{,}55)^{10}=0{,}55^{10}\approx 0{,}004$$

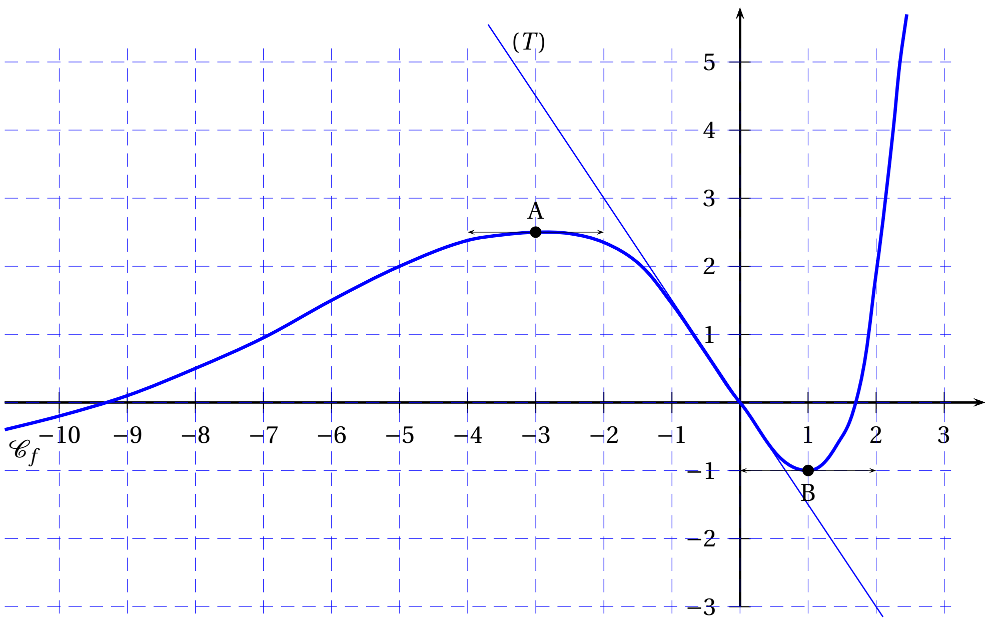
3. Calculons la probabilité pour que les conditions optimales de fonctionnement de ce parc soient atteintes au moins deux années durant cette période c'est-à-dire calculons $p(X\geqslant 2)$.

$$p(X\geqslant 2)=1-\big(p(X=0)+p(X=1)\big)=1-\left(0{,}004+\binom{10}{1}0{,}45\times 0{,}55^9\right)\approx 0{,}977.$$

La probabilité qu'il y ait au moins deux années de fonctionnement dans les conditions optimales est d'environ 0,976.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble des réels.
Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
La courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet que deux tangentes horizontales, l'une en A et l'autre en B, et la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.



À l'aide de cette représentation graphique et des données de l'énoncé, répondons aux questions suivantes en expliquant notre démarche.

1. $f(0)=0$, la courbe passe par l'origine.

2. $f'(0)=-\dfrac{3}{2}$, lecture du coefficient directeur de la droite T .

3. L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x)=0$ est $\{-3\ ;\ 1\}$ lorsque la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, le nombre dérivé est nul.

4. Déterminons la limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)=-1$ car la droite d'équation $y=-1$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

5. On note $I=\displaystyle\int_{-4}^{-1}f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrons que $5\leqslant I\leqslant 9$. Sur l'intervalle [-4 ; -1], $f>0$, I peut s'interpréter comme l'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-4$ et $x=-1$. Il y a au moins 5 carreaux et au plus 9 dans ce domaine.

EXERCICE 3 **9 points**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,3]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculons la limite de g en 0.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) + \lim_{x\to 0}(-2\ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

Lorsque x tend vers 0 la courbe est asymptote à l'axe des ordonnées.

2. a. Déterminons l'expression de la fonction dérivée de g.

$g'(x) = \dfrac{1}{2}(2x) + 1 - 2\dfrac{1}{x} = x + 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^2 + x + -2}{x}$.

b. Pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,3]$, $g'(x)$ est du signe de $x^2 + x - 2$.

En effet x étant strictement positif, le signe du quotient est donc le signe du numérateur.

c. Résolvons l'équation $x^2 + x - 2 = 0$ dans $]0\,;\,3]$.

$\Delta = 1^2 - 4(1)(-2) = 9$.

$\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ ou $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

Dans l'intervalle $]0\,;\,3]$, l'équation n'admet donc qu'une unique solution : 1

d. Dressons le tableau de variation de la fonction g sur $]0\,;\,3]$.

Déterminons d'abord le signe de $x^2 + x - 2$. D'après la question précédente, $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$. Comme x appartient à $]0\,;\,3]$, $x + 2$ est strictement positif, le trinôme a le signe de $x - 1$.

$x - 1 > 0 \iff x > 1$.

Par conséquent si x appartient à $]0\,;\,1[$ alors $g'(x) < 0$ et si x appartient à $]1\,;\,3]$ alors $g'(x) > 0$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $]0\,;\,1[$, $g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur cet intervalle

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. Sur $]1\,;\,3]$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

t	0		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{15}{2} - 2\ln 3$

3. a. Complétons le tableau de valeurs

x	0,25	0,5	0,75	1	2	2,5	3
$g(x)$	3,1	2,0	1,6	1,5	2,6	3,8	5,3

Les résultats numériques sont arrondis à 10^{-1} près

b. La courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g est tracée dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

4. a. Vérifions que la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + 2x - 2x\ln(x)$ est une primitive de la fonction g sur$]0\,;\,3]$.

G est une primitive de g lorsque $G' = g$. Déterminons la dérivée de G.

$$G'(x) = \frac{3x^2}{6} + \frac{2x}{2} + 2 - \left(2\ln x + 2x \times \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{2} + x - 2\ln x = g(x)$$

G est une primitive de g sur $]0\,;\,3]$

b. $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[G(x)\Big]_1^2 = G(2) - G(1) = \dfrac{4}{3} + 2 + 4 - 4\ln(2) - \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} + 2\right) = \dfrac{14}{3} - 4\ln 2.$

Une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-1} près est 1,9.

c. Sur $[1~;~2]$, $g(x) > 0$, l'intégrale peut s'interpréter géométriquement comme l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.