Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Polynésie juin 2014 Correction

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **6 points**

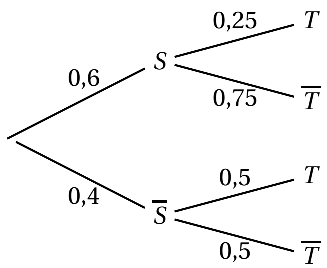
Dans le cadre d'une enquête auprès d'étudiants d'un lycée, on s'intéresse plus particulièrement à ceux possédant éventuellement un smartphone, une tablette tactile ou les deux.
Les résultats sont les suivants :

- 60 % des étudiants interrogés possèdent un smartphone ;
- Parmi ceux-ci, 25 % possèdent une tablette tactile ;
- 50 % des étudiants n'ayant pas de smartphone ne possèdent pas de tablette tactile.

On interroge au hasard un de ces étudiants.
On note S et T les événements suivants :
S : « L'étudiant possède un smartphone » ;
T : « L'étudiant possède une tablette tactile ».

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} *près si nécessaire.*

1. Décrivons cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités en précisant les valeurs des probabilités sur chaque branche.



2. **a.** Calculons

- $P(S \cap T)$: $P(S \cap T) = P(S) \times P_S(T) = 0{,}60 \times 0{,}25 = 0{,}15$.
- $P(\overline{S} \cap T)$: $P(\overline{S} \cap T) = P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(T) = 0{,}40 \times 0{,}5 = 0{,}20$.

b. La probabilité que l'étudiant possède une tablette tactile est notée $P(T)$.
$P(T) = P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T) = 0{,}15 + 0{,}20 = 0{,}35$.
La probabilité que l'étudiant possède une tablette tactile est bien de 0,35.

3. Dans cette question, on interroge un étudiant qui possède une tablette tactile. Sous cette condition, la probabilité qu'il possède un smartphone est notée $P_{\overline{T}}(S)$.
$P_{\overline{T}}(S) = \dfrac{P(S \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}35} \approx 0{,}429$.

4. On interroge au hasard et de façon indépendante 10 étudiants de cet établissement.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants possédant une tablette tactile parmi les 10.

a. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.
Le nombre n d'étudiants interrogés est 10 et la probabilité que l'étudiant possède une tablette tactile est 0,35.
Nous avons donc une loi binomiale de paramètres $(10\,;\,0{,}35)$.
Par conséquent $p(X = k) = \binom{10}{k}(0{,}35)^k(0{,}65)^{10-k}$

b. Calculons la probabilité que la moitié des étudiants interrogés possèdent une tablette tactile c'est-à-dire $P(X = 5)$.
$p(X = 5) = \binom{10}{5}(0{,}35)^5(0{,}65)^5 \approx 0{,}154$.
La probabilité que la moitié des étudiants interrogés possèdent une tablette tactile est de 0,154.

EXERCICE 2 — 4 points

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous. On note g' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

x	$-\infty$		-7		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de g	0	↗	$3\mathrm{e}^{-2}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Complétons le QCM fourni **en annexe A (à rendre avec la copie)**.
Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cet exercice sera zéro.

Cocher pour chaque question posée, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g passe par le point :

☐ ~~A(-1 ;0)~~ ☐ ~~B(-7 ;0)~~ ☑ C $\left(-7; \dfrac{3}{\mathrm{e}^2}\right)$

2. La courbe $\mathscr{C}_g$:

☑ admet une asymptote horizontale ☐ ~~admet une asymptote verticale~~ ☐ ~~n'admet ni asymptote horizontale, ni asymptote verticale~~

3. L'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

☐ ~~une solution~~ ☑ deux solutions ☐ ~~trois solutions~~

4. La valeur de $g(3)$ est :

☐ ~~positive~~ ☐ ~~négative~~ ☑ on ne peut pas savoir

EXERCICE 3 — 10 points

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-1~;~+\infty[$ et f' sa fonction dérivée.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée en **annexe B (à rendre avec la copie)**.
L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
La droite D_1 est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 et la droite D_2 est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

PARTIE A

À l'aide du graphique et des données de l'énoncé, déterminons, sans justifier :

1. L'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction f :

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ *Au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ la courbe coupe l'axe des abscisses*

2. Le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x ;

x	-1		$0,5$		$+\infty$
signe de $f(x)$	0	$-$	0	$+$	

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:

$\left[-\dfrac{1}{2}~;~2\right]$ *sur cet intervalle, la fonction est croissante*

4. La limite de la fonction f en $+\infty$:

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.*

PARTIE B

On admet que la fonction f de la partie A est définie sur $[-1~;~+\infty[$ par : $f(x) = \left(2x^2 + x - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrons que pour tout x de $[-1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \left(-2x^2+3x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

$f = uv$ où $u(x) = 2x^2 + x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

par conséquent $f' = u'v + v'u$ $\qquad u'(x) = 2\times(2x)+1 = 4x+1$ $\qquad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

Il en résulte :

$f'(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}(2x^2+x-1) = \mathrm{e}^{-x}\left(4x+1-2x^2-x+1\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-2x^2+3x+2\right)$.

Nous avons bien montré l'expression de $f'(x)$.

2. **a.** $f'(x)$ est du signe de $-2x^2+3x+2$ sur $[-1\ ;\ +\infty[$, puisque pour tout x appartenant à cet intervalle $\mathrm{e}^{-x} > 0$.

b. Étudions le signe de $-2x^2+3x+2$ sur $[-1\ ;\ +\infty[$.

Cherchons d'abord les racines du trinôme $-2x^2+3x+2$ si elles existent. Pour ce faire, calculons Δ.

$\Delta = 3^2 - 4(-2)(2) = 25$. $\Delta > 0$ le trinôme admet deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

d'où $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-2)} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{25}}{-4} = -\dfrac{1}{2}$.

Le trinôme peut alors s'écrire $-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$. Ces valeurs étant supérieures à -1, nous pouvons étudier le signe uniquement sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$

x	-1		$-0{,}5$		2		$+\infty$
signe de -2		$-$		$-$		$-$	
signe de $x+0{,}5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. Étudions le sens de variation de f.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Pour $x \in [-1, -0{,}5[$ ou pour $x \in]2\ ;\ +\infty[$, $f'(x) < 0$, par conséquent f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Pour $x \in]-0{,}5\ ;\ 2[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variation de f sur $[-1\ ;\ +\infty[$

x	-1		$-0{,}5$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\searrow$	$-\sqrt{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$9\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(2\times(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\mathrm{e}}$ et $f(2) = (2\times 2^2+2-1)\mathrm{e}^{-2} = 9\mathrm{e}^{-2}$.

3. On admet que la fonction F définie par $F(x) = \left(-2x^2-5x-4\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[-1\ ;\ +\infty[$.

a. le domaine plan $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$ est hachuré sur le graphique de l'**annexe B**.

b. Calculons la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

Pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 4\right]$, $f(x) > 0$, l'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$ est en unités d'aire $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{\frac{1}{2}}^{4} = F(4) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-2\times 4^2 - 5\times 4 - 4\right)\mathrm{e}^{-4} - \left(\left(-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\times\frac{1}{2} - 4\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - 56\mathrm{e}^{-4}.$$

c. Une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}$ est 3,22.

Annexe B (à compléter et à rendre avec la copie).

EXERCICE 3 :