Leçon n°2 – les fonctions affines

Définition
On appelle fonction affine, toute fonction numérique de la forme :

$$f : A \longrightarrow B \qquad \textit{A et B sous ensembles de R}$$
$$x \longmapsto y = f(x) = ax + b \qquad \textit{(a et b étant des réels)}$$

La représentation graphique d'une fonction affine est toujours ***une droite*** *si A = R sinon, une demi droite ou un segment de droite dans le cas où l'ensemble de départ A est un intervalle.*
On dit que l'équation de la droite représentant la fonction affine est $y = ax + b$.
a *s'appelle le coefficient directeur de la droite et* ***b*** *l'ordonnée à l'origine.*

Graphiquement, on peut lire b à l'endroit où la droite coupe l'axe des y. Par contre, pour lire a c'est un peu plus difficile, il faut augmenter la variable x de 1 et observer alors l'augmentation des y.
Les droites se retrouvent souvent en Physique ou en Economie.
Attention, réciproquement, toutes les droites n'ont pas une équation de la forme y = ax + b (équation cartésienne) mais il y a en plus **les verticales** dans un repère orthonormal qui ont pour équations **x = c**, $c \in R$.

Théorème
Si on a une fonction affine $f(x) = ax + b$ $x \in A$ $(A \subset R)$
- *Si $a > 0$ alors f est croissante sur A.*
- *Si $a < 0$ alors f est décroissante sur A.*
- *Si $a = 0$ alors f est une fonction constante sur A.*

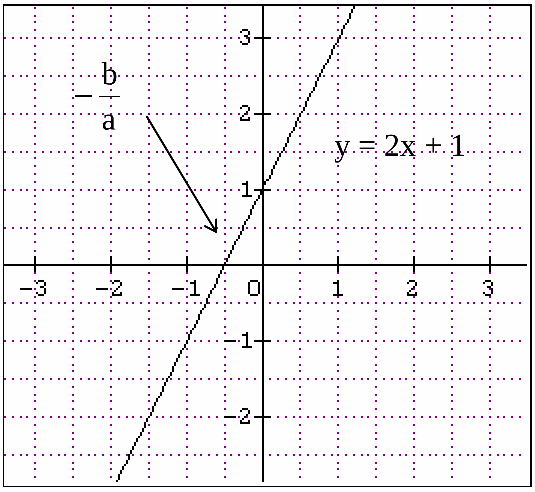
Théorème
Toute fonction affine $f(x) = ax + b$, $x \in R$, $a \neq 0$, possède une racine(la valeur qui annule f(x)) qui est $x_1 = -\dfrac{b}{a}$.

(On peut donner des tableaux de signes, ils seront utilisés plus tard pour les inéquations)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
a x + b (a > 0)		–	0	+	

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
a x + b (a < 0)		+	0	–	

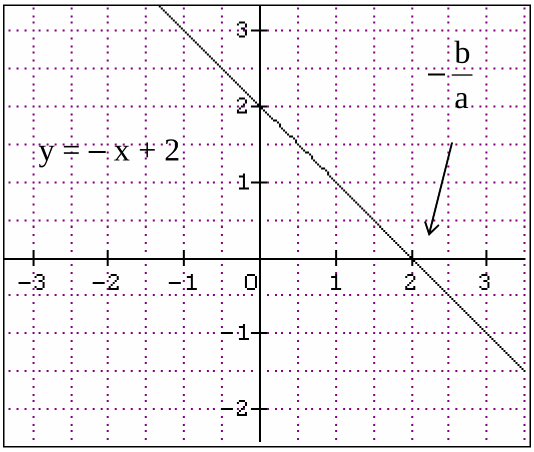
Voici deux exemples :
Dans les graphiques ci-dessous, on voit évidemment le signe par rapport à l'axe des x, au dessus de l'axe des x , y est positif et en dessous de l'axe des x , y est négatif.



(la racine est $x = -\frac{1}{2}$)

y = 2x + 1 (a = 1)
(a > 0)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
2x +1		–	0	+	



(la racine est ici x = 2)

y= – x + 2 (a = –1)
(a < 0)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
– x + 2		+	0	–	

y = 2x + 1 donc 2x + 1 = 0 donne $x = -\frac{1}{2}$;

y = –x + 2 donc –x + 2 = 0 donne x = 2.

Exercice de base

Exercice 1
Que peut-on dire de la fonction f définie par $f(x) = 8 - x$ avec $x \in [0 ; 6]$?

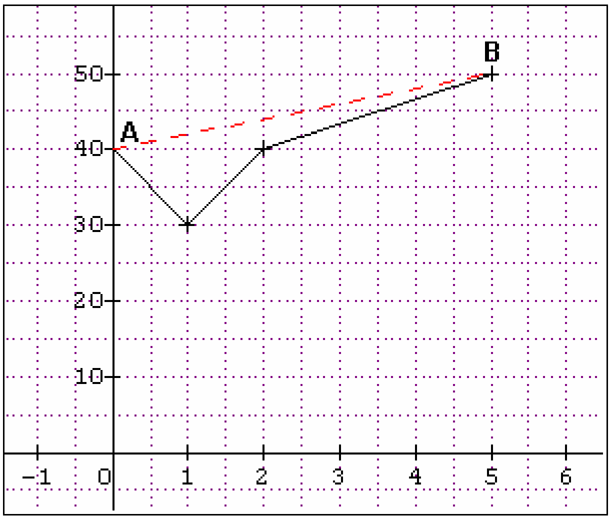
Exercice 2
On donne deux points dans un repère orthonormal du plan (P) :

A (3 ; 1) et B (–2 ; 2)

Donner l'équation de la droite (AB) et les caractéristiques de la fonction affine associée à cette droite.

Exercice 3
(Fonctions affines par morceaux).
On a ci-contre les variations du prix P d'une action au jour le jour (variable t le temps).

a) Donner le tableau de variations de cette fonction.
b) On peut résumer cette évolution en traçant [AB].
   Quelle est l'équation de ce segment ?
c) Que représente le coefficient directeur de ce segment de droite ?
d) Quel est en pourcentage la variation du prix de cet action entre A et B ?



Exercice 4
Vrai – Faux

a) Toutes les droites dans un repère orthonormal du plan (P) représentent des fonctions affines
b) Nous avons dans un repère orthonormal, A(0 ;5) et B(2 ;1). La droite (AB) représente une fonction affine décroissante.
c) Toutes les fonctions affines changent de signe pour une valeur donnée de la variable.
d) On dit qu'une fonction est monotone si elle garde toujours le même sens de variations. Les fonctions affines sont des fonctions monotones sur R.
e) Il existe une seule fonction affine passant par O, le centre du repère et le point E(3 ; 5).

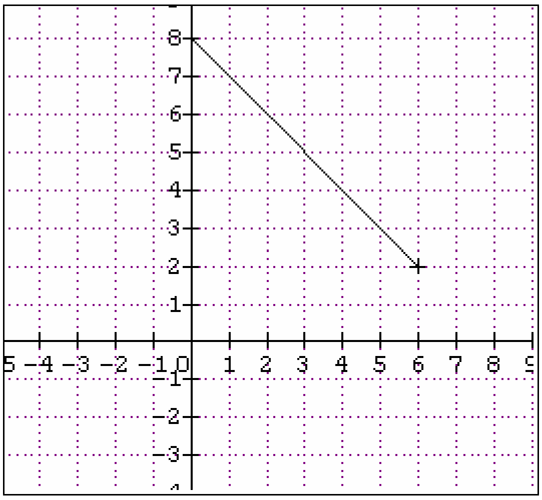
Correction

Exercice 1

Il y a beaucoup à dire et c'est un exercice qui permet de réviser toute sa leçon.

$f(x) = 8 - x$ avec $x \in [0 ; 6]$

- Il s'agit d'une **fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = -1$ et $b = 8$**.
- **Son ensemble de définition est [0 ; 6]** car tout x de cet intervalle a une image dans R par f et donc sa représentation graphique sera un segment de droite.
- **Pour tracer ce segment**, nous pouvons prendre **deux valeurs de x** et chercher leurs images. Si $x = 0$ alors $f(0) = 8 - 0 = 8$ et $f(6) = 8 - 6 = 2$.
  L'équation du segment sera donc $y = 8 - x$ avec $x \in [0 ; 6]$.
  Nous pouvons présenter ceci dans un petit **tableau de valeurs** et tracer ce segment.



x	0	6
y	8	2

- f est une fonction décroissante sur [0 ; 6] car $a = -1$ (**Tableau de variations**).

x	0		6
8 – x	8	↘	2

- Nous pouvons donner **le tableau de signe** sur l'intervalle [0 ; 8]

x	0		6
8 – x		+	

en effet sur [0 ; 6], f(x) est toujours positif.

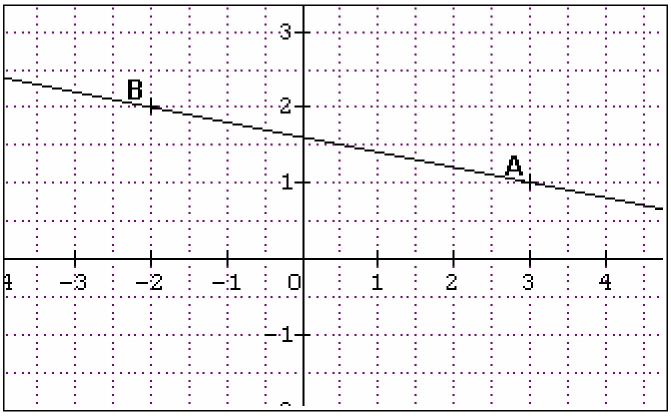
Si la fonction avait été définie sur R, nous aurions eu :

x	$-\infty$		8		$+\infty$
$8-x$		$+$	0	$-$	

en effet, **la racine est $x_1 = 8$**.
f(8) = 0.
a = – 1 donc le tableau est du style « + …0….– ».

- En première, nous appellerons cette fonction **un polynôme en x de degré 1**.

Exercice 2



L'équation est de la forme y = ax + b; a= $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-1}{-2-3} = \dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$

Pour trouver b, on utilise A : 1 = $-\dfrac{1}{5}(3) + b \Leftrightarrow b = 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$

donc (AB) $\mathbf{y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{8}{5}}$.

Exercice 3
P est une fonction de t définie sur [0 ; 5], c'est **une fonction affine par morceaux** c'est-à-dire, on a graphiquement trois segments de droite, on pourrait chercher les équations des trois segments sur les trois intervalles qui conviennent.
a) Tableau de variations :

t	0	1	5
P(t)	40 ↘	30 ↗	50

(Attention, pour les deux derniers segments, nous ne dessinons qu'une flèche).
(Nous avons fait seulement une lecture graphique, si nous voulons démontrer, il faut les équations).

Entre 0 et 5, on peut dire que P n'est pas une **fonction monotone.**
Définition : Une fonction est monotone sur un intervalle si elle garde toujours le même sens de variations sur cet intervalle.

b) Cherchons maintenant l'équation de [AB] :

En premier lieu, $t \in [0 ; 5]$, l'équation est de la forme y = a t + b car on a un segment de droite : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{50-40}{5-0} = \frac{10}{5} = 2$ et pour b, nous utilisons A :

40 = 0(2) + b ce qui donne b = 40. **[AB] : y = 2t + 40 $t \in [0 ; 5]$.**

c) Le coefficient directeur de ce segment représente le taux d'accroissement entre t = 0 et t = 5. On peut dire aussi la vitesse d'accroissement si le phénomène avait augmenté régulièrement chaque jour.

Au total, nous pouvons dire que cet action a augmenté de :

$\frac{50-40}{40} = \frac{10}{40} = 0{,}25$ soit **une augmentation de 25%**.

Nous utilisons une formule vue en Economie :

Pourcentage de variations = $\mathbf{\frac{V_F - V_I}{V_I}}$ **(V_F valeur finale et V_I valeur initiale)**.

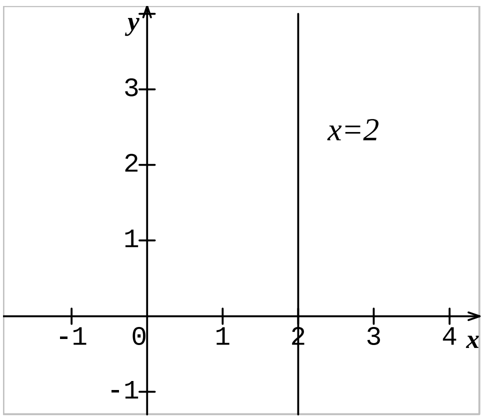
(A titre d'entraînement, les équations des trois morceaux du graphique sont :

si $t \in [0 ; 1]$ $y = -10\,t + 40$ représente $P(t) = -10\,t + 40$
si $t \in]1 ; 2]$ y = 10 t + 20 représente P(t) = 10 t + 20
si $t \in]2 ; 5]$ $y = \frac{10}{3}t + \frac{100}{3}$ représente $P(t) = \frac{10}{3}t + \frac{100}{3}$.)

Exercice 4

Dans un VRAI – FAUX, nous devons analyser chaque affirmation et donner un exemple si elle est fausse ou bien démontrer qu'elle est vrai. Attention, un exemple ne suffit pas pour démontrer qu'une affirmation est vraie.

a) Toutes les droites dans un repère orthonormal du plan (P) représentent des fonctions affines.
AFFIRMATION FAUSSE.
Par exemple, si nous traçons x = 2 dans un repère orthonormal du plan (P), nous obtenons une droite et pourtant l'équation de cette droite n'est pas de la forme y = ax + b.



b) Nous avons dans un repère orthonormal, A(0 ;5) et B(2 ;1). La droite (AB) représente une fonction affine décroissante.

AFFIRMATION VRAIE.

En effet, (AB) n'est pas verticale car x varie.

L'équation de (AB) est de la forme y = ax + b :

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-5}{2-0} = \frac{-4}{2} = \mathbf{-2}$ et A montre que b = 5.

(AB) y = – 2x + 5

Ceci est bien une fonction affine décroissante car a est négatif.

Nous aurions pu le dire immédiatement car si on passe de A à B, x augmente mais y diminue.

c) Toutes les fonctions affines changent de signe pour une valeur donnée de la variable.

AFFIRMATION FAUSSE.

En effet, les fonctions constantes de la forme y = b (cas particuliers des fonctions affines car a = 0) ne changent pas de signe.

Exemple : f(x) = 3 est une fonction affine toujours positive.

d) On dit qu'une fonction est monotone si elle garde toujours le même sens de variations.

Les fonctions affines sont des fonctions monotones sur R.

AFFIRMATION VRAIE.

En effet, le sens de variations d'une fonction affine ne dépend que de a.

Si on a une fonction affine f(x) = ax + b $x \in A$ ($A \subset R$)

Si a $>$0 alors f est croissante sur A.

Si a $<$0 alors f est décroissante sur A.

Si a = 0 alors f est une fonction constante sur A.

e) Il existe une seule fonction affine passant par O, le centre du repère et le point E(3 ; 5).

AFFIRMATION VRAIE.

En effet par deux points, il ne passe qu'une droite. Donnons l'équation de la droite (OE) :

Elle est de la forme y = ax avec $a = \frac{y_E - y_O}{x_E - x_O} = \frac{5-0}{3-0} = \frac{5}{3}$.

La fonction affine représentée par (OE) est $\mathbf{g(x) = \frac{5}{3}x}$.