Equations et Inéquations du $2^{éme}$ degré à une inconnue

II) Equations du $2^{éme}$ degré à une inconnue :

1) Définitions :

On appelle équation du $2^{éme}$ **degré à une inconnue x, toute égalité de la forme** $ax^2 + bx + c = 0$

Avec $a \in IR^*$, $b \in IR$ **et** $c \in IR$

Exemple : $-2x^2 + 5x - 7 = 0$ est une équation du $2^{éme}$ **degré à une inconnue x.**

$(a=-2 \; ; b=5 \text{ et } c=-7)$

2) Vocabulaire

a) Discriminant

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

b) La forme canonique de ax^2+bx+c :

$$ax^2 + bx + c = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac \text{ et } a \neq 0$$

Exemple:

$$3x^2 - 2x + 5 = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] \quad (a=3 \; ; b=-2 \text{ et } c=5) \quad \Delta = (-2)^2 - 4\times3\times5 = 4-60 = -56$$

D'où $3x^2 - 2x + 5 = 3[(x+\frac{-2}{2\times3})^2 - \frac{-56}{4\times9}] = 3[(x-\frac{1}{3})^2 + \frac{14}{9}]$ **Cette écriture est appelée forme canonique de** $3x^2-2x+5$

3) Solution d'une équation du second degré: $ax^2 + bx + c = 0$

Un réel x_0 **est une solution (ou racine) de l'équation (E) :** $ax^2 + bx + c = 0$ **si et seulement si** $a x_0^2 + bx_0 + c = 0$

Exemple: (E): $x^2 + x - 6 = 0$

- **-3 est une solution de l'équation (E):** $x^2 + x - 6 = 0$ **car (E):** $3^2 + (-3) - 6 = 9-9=0$
- **2 est une solution de l'équation (E):** $x^2 + x - 6 = 0$ **car (E):** $2^2 + 2 - 6 = 6-6=0$
- **5 n' est pas une solution de l'équation (E):** $x^2 + x - 6 = 0$ **car**

  (E): $5^2 + (-5) - 6 = 25-11=14 \neq 0$

4) Racines (ou solutions) d'une équation du second degré: $ax^2 + bx + c = 0$

Soit S= l'ensemble des solutions dans IR de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ **avec** $a \neq 0$.

$1^{ére}$ Cas : (Si $\Delta < 0$)

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racine réelle . $S_{IR} = \varnothing$.

Exemple: **(E):** $-4x^2 + 5x - 3 = 0$ **on a** $(a=-4 \; ; b=5 \text{ et } c=-3)$

$$\Delta = (5)^2 - 4\times(-4)\times(-3) = 25 - 48 = -23 < 0$$

Donc L'équation (E): $-4x^2 + 5x - 3 = 0$ n'admet pas de racine réelle . $S_{IR} = \varnothing$.

$2^{éme}$ Cas : (Si $\Delta = 0$)

L' équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule racine dite « double ».

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \text{ donc } S_{IR} = \{-\frac{b}{2a}\}$$

Exemple: (E): $4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ on a

$(a = 4 ; b = -4\sqrt{3}$ et $c = 3)$ $\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4\times4\times3 = 48 - 48 = 0$

L'équation (E): $4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ admet une seule racine dite « double ».

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4\sqrt{3}}{2\times4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } S_{IR} = \{\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

3ème Cas : (Si $\Delta > 0$)

L'équation $a x^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ donc } S_{IR} = \{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\}$$

Exemple: (E): $x^2 - 5x + 6 = 0$ on a $(a = 1 ; b = -5$ et $c = 6)$

$\Delta = (1)^2 - 4\times6 = 25 - 24 = 1 > 0$

L'équation (E): $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2} = 2 \quad \text{donc } S_{IR} = \{3, 2\}$$

5) Factorisation :

1ère Cas : (Si $\Delta < 0$)

- Si $\Delta < 0$ **alors** on ne peut pas factoriser. $a x^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Exemple: Factoriser l'expression : $-4x^2 + 5x - 3$ on a $(a = -4 ; b = 5$ et $c = -3)$

$\Delta = (5)^2 - 4\times(-4)\times(-3) = 25 - 48 = -23 < 0$ **Donc** On ne peut pas factoriser. $-4x^2 + 5x - 3$

2ème Cas : (Si $\Delta = 0$)

- si $\Delta = 0$ **alors** $a x^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$; $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Exemple: Factoriser l'expression $4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3$

on a $(a = 4 ; b = -4\sqrt{3}$ et $c = 3)$ et $\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4\times4\times3 = 48 - 48 = 0$

L'équation (E): $4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ admet une seule racine double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4\sqrt{3}}{2\times4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } 4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3 = 4(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

3ème Cas : (Si $\Delta > 0$)

- Si $\Delta > 0$ **alors** $a x^2 + bx + c = a\,(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})\,(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple: Factoriser l'expression $2x^2 - 3x - 2$

on a $(a = 2 ; b = -3$ et $c = -2)$ et $\Delta = (-3)^2 - 4\times2\times(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$ **donc** $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

L'équation (E): $2x^2 - 3x - 2 = 0$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-(-3)+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-3)-5}{4} = -\frac{1}{2}. \text{ D'où } 2x^2 - 3x - 2 = 2\,(x-2)\,(x + \frac{1}{2})$$

6) Le discriminant réduit :

(E) : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Si b=2b' alors Le nombre $\Delta' = b'^2 - ac$ est appelé discriminant réduit de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

1ére Cas : (Si $\Delta' < 0$)

- L'équation $a\,x^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racine réelle . $S_{IR} = \varnothing$.

Exemple: (E): $-4x^2 + 2\sqrt{3}\,x - 3 = 0$ on a $(a = -4\ ; b = 2\sqrt{3} = 2b'\ \text{et}\ c = -3)$

$(a = -4\ ; b' = \sqrt{3}\ \text{et}\ c = -3)$ $\Delta' = b'^2 - ac = \sqrt{3}^2 - (-4)\times(-3) = 3 - 12 = -9 < 0$

Donc L'équation (E) n'admet pas de racine réelle . $S_{IR} = \varnothing$

2éme Cas : (Si $\Delta' = 0$)

- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule racine dite « double ». $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$ donc $S_{IR} = \{-\frac{b'}{a}\}$

Exemple: (E): $4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ on a $(a = 4\ ; b = 2\times(-2\sqrt{3}) = 2b'\ \text{et}\ c = 3)$

$(a = 4\ ; b' = -2\sqrt{3}\ \text{et}\ c = 3)$ $\Delta' = b'^2 - ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4\times 3 = 12 - 12 = 0$

L'équation (E) admet une seule racine dite « double ».

$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = -\frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $S_{IR} = \{\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

3éme Cas : (Si $\Delta' > 0$)

- L'équation $a\,x^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

donc $S_{IR} = \{\frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}\}$

Exemple: (E): $x^2 + 8x + 6 = 0$ on a $(a = 1\ ; b = 2\times 4 = 2b'\ \text{et}\ c = 6)$

$(a = 1 ; b' = 4\ \text{et}\ c = 6)$ $\Delta' = 4^2 - 6 = 16 - 6 = 10 > 0$

L'équation (E) admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{10}}{1} = -4 + \sqrt{10}$ et $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{10}}{1} = -4 - \sqrt{10}$

donc $S_{IR} = \{-4 + \sqrt{10}, -4 - \sqrt{10}\}$

Remarques : $a\,x^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

a) **Si ac<0 alors** $\Delta > 0$ et l'équation (E) admet deux racines distinctes de signe contraires

(car $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} < 0$)

b) **Si** $a + b + c = 0$ **alors** $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$ sont deux racines distinctes de (E) $S_{IR} = \{1, \frac{c}{a}\}$.

Exemple: (E): $2x^2 - 9x + 7 = 0$ on a $(a = 2\ ; b = -9\ \text{et}\ c = 7)$

$a + b + c = 2 - 9 + 7 = 0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{7}{2}$ sont deux racines distinctes de (E) $S_{IR} = \{1, \frac{7}{2}\}$.

c) **Si** $a - b + c = 0$ **alors** $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$ sont deux racines distinctes de (E) $S_{IR} = \{-1, -\frac{c}{a}\}$.

Exemple: (E): $3x^2 + 4x + 1 = 0$ on a $(a = 3\ ; b = 4\ \text{et}\ c = 1)$

$a - b + c = 3 - 4 + 1 = 0$ alors $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$ sont deux racines distinctes de (E) $S_{IR} = \{-1, -\frac{1}{3}\}$

7) Somme et produit des racines d'une équation De second degré :

Soit **(E) : $ax^2 + bx + c = 0$ une inéquation de second degré** admet deux racines distinctes x_1 et x_2

On pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$ alors $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Conséquence :

- ***Si x_1 est une racine de (E) on peut déterminer l'autre racine x_2 en utilisant $S = x_1 + x_2$ ou $P = x_1x_2$ si $x_1 \neq 0$***

Exemple: Soit (E) : $2x^2 + (\sqrt{3}-2\sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

1) *Sans calculer le discriminant Δ montrer que l'équation (E) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 de signes contraires*
2) *Vérifier que $\sqrt{2}$* ***est une racine de l'équation (E)***
3) *Déterminer alors sans calculer le discriminant Δ* ***l'autre racine .***

Réponse: Soit (E) : $2x^2 + (\sqrt{3}-2\sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$ $(a = 2\ ; b = \sqrt{3}-2\sqrt{2}$ et $c = -\sqrt{6})$

1) $ac = -2\sqrt{6} < 0$ **alors** $\Delta > 0$ **et** *l'équation* **(E)** *admet deux racines distinctes de signe contraires*

(car $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} < 0$)

2) $2(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-2\sqrt{2})\sqrt{2} - \sqrt{6} = 4 + \sqrt{6} - 4 - \sqrt{6} = 0$ ***donc $\sqrt{2}$ est une racine de l'équation (E)***

3) ***On a $x_1 = \sqrt{2}$ est une racine de l'équation (E) on peut déterminer l'autre racine x_2 en utilisant $S = x_1 + x_2$ ou $P = x_1x_2$***

1ère méthode :

(E) : $2x^2 + (\sqrt{3}-2\sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$ $(a = 2\ ; b = \sqrt{3}-2\sqrt{2}$ et $c = -\sqrt{6})$

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}$ **et** $x_1 = \sqrt{2}$ **sig**

$x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2} - x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ***D'où*** $S_{IR} = \{\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$

2éme méthode :

$P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-\sqrt{6}}{2}$ **et** $x_1 = \sqrt{2}$ **sig** $x_2 = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{x_1} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

D'où $S_{IR} = \{\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$

8) Recherche de deux réel x et y connaissant leur Somme S et leur produit P :

❖ **Résoudre dans IR² le système suivant :** $\begin{cases} x+y=S \\ x\ \ y=P \end{cases}$

Soit S et P deux réels

1ére Cas : *Si* $S^2-4P<0$ *alors il n'existe aucun couple (x, y) tel que* $\begin{cases} x+y=S \\ x\ \ y=P \end{cases}$

$$S_{IR^2}=\varnothing$$

2éme Cas : *Si* $S^2-4P\geq 0$ *alors il existe deux réels x et y tel que* $\begin{cases} x+y=S \\ x\ \ y=P \end{cases}$

Avec x et y sont deux racines de l'équation X² - SX + P = 0

$$S_{IR^2}=\{(x,y);(y,x)\}$$

Exemple1 :

Trouver deux réels x et y tel que : $\begin{cases} x+y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ x\,y\ \ =1 \end{cases}$

Réponse : On pose $S=x+y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $P=x\,y=1$

On a $S^2-4P=(\dfrac{3\sqrt{2}}{2})^2-4=\dfrac{18}{4}-4=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}>0$ *donc il existe deux réels x et y tel que* $\begin{cases} x+y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ x\,y\ \ =1 \end{cases}$

Avec x et y sont deux racines de l'équation $X^2-SX+P=X^2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}X+1=0$ *on a*

$(a=1\ ;b=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ et\ c=1)\quad \Delta=S^2-4P=(\dfrac{3\sqrt{2}}{2})^2-4=\dfrac{18}{4}-4=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}>0$

$$x_1=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\sqrt{2}\quad et\quad x_2=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{IR^2}=\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2});(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$$

Exemple2 :

Trouver deux réels x et y tel que : $\begin{cases} x+y=4 \\ x\,y\ \ =5 \end{cases}$

Réponse : On pose $S=x+y=4$ et $P=x\,y=5$

On a $S^2-4P=(4)^2-4\times 5=16-20=-4<0$

alors il n'existe aucun couple (x, y) tel que $\begin{cases} x+y=4 \\ x\,y\ \ =5 \end{cases}$

$$S_{IR^2}=\varnothing$$

II) Inéquations du second degré à une inconnue réelle:

1. Définitions : Les inéquations du type $ax^2+bx+c \geq 0$ ou $ax^2+bx+c \leq 0$ ou $ax^2+bx+c>0$ ou $ax^2+bx+c<0$ avec $a \in IR^*$ qu'on appelle inéquation du second degré à une inconnue réelle .

Exemple : $5x^2+3x-4 \geq 0$ est une inéquation du second degré à une inconnue réelle x

2. Résolution de l'inéquation du second degré à une inconnue x :

- Résoudre une inéquation du second degré à une inconnue x, c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à x pour que l'inégalité soit juste.
- En étudiant le signe de ax^2+bx+c ; $a \neq 0$, on pourra résoudre les inéquations du type $ax^2+bx+c \geq 0$ ou $ax^2+bx+c \leq 0$ ou $ax^2+bx+c>0$ ou $ax^2+bx+c<0$ avec $a \in IR^*$.
- Le signe de ax^2+bx+c **dépend de signe de a et du signe de** Δ

Signe du trinôme ax^2+bx+c : avec $a \in IR^*$

1[ére] Cas : (Si $\Delta<0$)

- Si $\Delta<0$ alors le signe de ax^2+bx+c **est celui de a pour tout** $x \in IR$.

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	Signe de (a)

Exemples :

a) Résoudre dans IR l'inéquation $-4x^2+5x-3<0$ **on a** $(a=-4<0 ; b=5 \text{ et } c=-3)$

$\Delta=(5)^2-4\times(-4)\times(-3)=25-48=-23<0$

Donc pour tout $x \in IR$ $-4x^2+5x-3<0$ (car $a=-4<0$).

D'où $S_{IR}=IR$

b) Résoudre dans IR l'inéquation $-4x^2+5x-3 \geq 0$ **on a** $(a=-4<0 ; b=5 \text{ et } c=-3)$

$\Delta=(5)^2-4\times(-4)\times(-3)=25-48=-23<0$

Donc pour tout $x \in IR$ $-4x^2+5x-3<0$ (car $a=-4<0$).

D'où $S_{IR}=\varnothing$

2[éme] Cas : (Si $\Delta=0$)

- si $\Delta=0$ **alors** L'équation (E): $ax^2+bx+c=0$ admet une seule racine double $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

et $ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2$ alors le signe de ax^2+bx+c **est celui de a** .

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
ax^2+bx+c	Signe de (a)	0	Signe de (a)

Exemples :

a) Résoudre dans IR l'inéquation $-3x^2+6\sqrt{2}x-6<0$.

On a : $(a=-3<0 ; b=6\sqrt{2} \text{ et } c=-6)$

$\Delta=(6\sqrt{2})^2-4\times(-3)\times(-6)=72-72=0$ alors L'équation $-3x^2+6\sqrt{2}x-6=0$ admet une seule racine double $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{6\sqrt{2}}{2\times(-3)}=\sqrt{2}$ et $-3x^2+6\sqrt{2}x-6=-3(x-\sqrt{2})^2$ alors le signe de $-3x^2+6\sqrt{2}x-6$ **est celui de** $a=-3<0$

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$-3x^2+6\sqrt{2}\,x-6$		$-$	0	$-$	

Donc pour tout $x\in IR$ $\quad -3x^2+6\sqrt{2}\,x-6\le 0$ $\quad$ *D'où* $S_{IR}=IR\setminus\{\sqrt{2}\}$

b) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $-3x^2+6\sqrt{2}\,x-6>0$.

Pour tout $x\in IR$ $\quad -3x^2+6\sqrt{2}\,x-6\le 0$ $\quad$ *D'où* $S_{IR}=\varnothing$

c) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $-3x^2+6\sqrt{2}\,x-6\ge 0$.

Pour tout $x\in IR$ $\quad -3x^2+6\sqrt{2}\,x-6\le 0$ $\quad$ *D'où* $S_{IR}=\{\sqrt{2}\}$

d) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $-3x^2+6\sqrt{2}\,x-6\le 0$.

Pour tout $x\in IR$ $\quad -3x^2+6\sqrt{2}\,x-6\le 0$ $\quad$ *D'où* $S_{IR}=IR$

$3^{\text{éme}}$ Cas : (Si $\Delta>0$)

Si $\Delta>0$ L'équation $a\,x^2+bx+c=0$ admet deux racines distinctes $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

on suppose que $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}>x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Tableaux de signes : $a\,x^2+bx+c$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		Signe de (a)	0	Signe de (- a)	0	Signe de (a)	

Exemples :

a) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $2x^2-3x-2<0$

on a $(a=2>0;b=-3\text{ et }c=-2)$ *et* $\Delta=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25>0$ donc $\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$

L'équation (E): $2x^2-3x-2=0$ admet deux racines distinctes

$x_1=\dfrac{-(-3)+5}{4}=\dfrac{8}{4}=2$ et $x_2=\dfrac{-(-3)-5}{4}=-\dfrac{1}{2}$. D'où $2x^2-3x-2=2\,(x-2)\,(x+\frac{1}{2})$

Tableaux de signes : $2x^2-3x-2$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S_{IR}=\left]-\frac{1}{2},2\right[$$

b) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $2x^2-3x-2\le 0$: $\quad S_{IR}=\left[-\frac{1}{2},2\right]$

c) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $2x^2-3x-2\ge 0$: $\quad S_{IR}=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

d) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $2x^2-3x-2>0$: $\quad S_{IR}=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

Exemples :

a) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $-7x^2-3x+4<0$

on a $(a=-7<0\,;\,b=-3 \text{ et } c=4)$

$a-b+c=-7-(-3)+4=0$ **alors** $x_1=-1$ **et** $x_2=-\dfrac{c}{a}=-\dfrac{4}{-7}=\dfrac{4}{7}$ *sont deux racines distinctes*

de l' ***équation*** (E): $-7x^2-3x+4=0$. **D'où** $-7x^2-3x+4=-7(x+1)\left(x-\dfrac{4}{7}\right)$

Tableaux de signes : $-7x^2-3x+4$

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{7}$		$+\infty$
$-7x^2-3x+4$		-	0	+	0	-	

$$S_{IR}=\left]-\infty,-1\right[\ \cup\ \left]\frac{4}{7},+\infty\right[$$

b) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $-7x^2-3x+4\le 0$: $S_{IR}=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[\frac{4}{7},+\infty\right[$

c) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $-7x^2-3x+4\ge 0$: $S_{IR}=\left[-1,\frac{4}{7}\right]$

d) ***Résoudre dans IR l'inéquation*** $-7x^2-3x+4>0$: $S_{IR}=\left]-1,\frac{4}{7}\right[$

RECAPITULATIF COMPLET DU CHAPITRE
Equations et Inéquations du 2$^{\text{éme}}$ degré à une inconnue

$P(x) = ax^2 + bx + c$ est un trinôme du second degré ($a \neq 0$), et $\Delta = b^2 - 4ac$ est son discriminant.

Sa forme canonique est $ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$

<table>
<tr><td></td><td>Si $\Delta < 0$</td><td>Si $\Delta = 0$</td><td>Si $\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>Racines(solutions de $ax^2 + bx + c = 0$)</td><td>L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racine réelle .
$S_{IR} = \varnothing$.</td><td>L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule racine double
$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ donc
$S_{IR} = \{-\frac{b}{2a}\}$</td><td>L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc
$S_{IR} = \{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\}$</td></tr>
<tr><td>Factorisation
$ax^2 + bx + c$</td><td>on ne peut pas factoriser .
$ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$</td><td>$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$</td><td>$ax^2 + bx + c = a\,(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})\,(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})$
$= a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
<tr><td>Tableaux de signes
$P(x) = ax^2 + bx + c$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $P(x)$</td><td>signe de a</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $P(x)$</td><td>signe de a</td><td></td><td>signe de a</td></tr></table>
$\alpha = -\frac{b}{2a}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $P(x)$</td><td>signe de a</td><td>opposé du signe de a</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table>
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
</table>