Initiation aux graphes

Prof : Naifar Med Yassine
Classe : 3éme E & G

I) Introduction

La théorie des graphes permet de résoudre efficacement une grande variété de problèmes pratiques ou récréatifs en les ramenant à des configurations qui se dessinent simplement à l'aide de points et de liaisons entre ces points.
Ses applications pratiques sont très diverses:

- *Optimisation des réseaux de transport : transports routiers ou transports d'information*
- *Conception de réseaux électriques, de réseaux de communication*
- *Mécanique statistique, formules chimiques, informatique théorique, sciences sociales, géographie, architecture...*

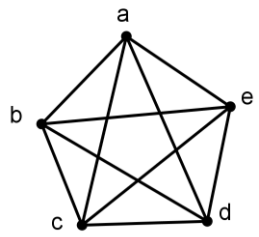
II) Pour commencer :

Activité 2 page 83 :

Un tournoi d'escrime réunit 5 compétiteurs : a, b, c, d et e. chaque escrimeur rencontre une fois et une seule les quatre autres. Elaborer un calendrier pour ce tournoi.

Réponse : *Le calendrier possible pour ce tournoi :*
$\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e),(d,e)\}$

	a	b	c	d
b	a-b			
c	a-c	b-c		
d	a-d	b-d	c-d	
e	a-e	b-e	c-e	d-e



- *La figure ainsi construite est dite un graphe*
- *Les points a ,b,c,d et e sont les sommets de ce graphe .*
- *Les lignes, lorsqu'il y en a, reliant deux sommets sont appelées des arêtes. Exemple : (a,b) ;(c,d) ;….*
- *Qu'est-ce qu'un graphe ? C'est un ensemble de sommets et de liens entre 2 sommets que l'on appelle arêtes.*

III) Notion de graphe

1. Vocabulaires de base :

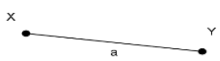
- **Définitions :** *Un graphe est la donnée d'un couple G= (X, A) où X est un ensemble fini et* $A \subseteq \{(a,b): a \in X \text{ et } b \in X\}$ **, C à d** *A une famille finie dont chaque élément est une paire d'éléments (non nécessairement distincts) de X.*

Les éléments de X sont appelés sommets ou nœuds de G, Les éléments de A sont appelés arêtes de G.

Exemple : *Activité2 page 83*

Le graphe d'un tournoi T = (X, A) d'escrime réunit 5 compétiteurs : a, b, c, d et e où: $X = \{a,b,c,d,e\}$ *est l'ensemble des participants au tournoi,A est l'ensembles des paires de joueurs se rencontrant dans le tournoi :* $A = \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e),(d,e)\}$

- **Définitions :*** *Lorsque a = {x, y}* $\in$ *A on dit que a est l'arête de G d'extrémités x et y ou que a joint x et y. x est l'extrémité initiale (ou origine de a)et y est l'extrémité finale (ou destination) de a.*

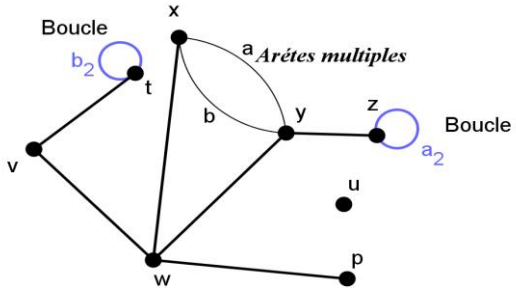


- *Les deux extrémités d'une arête de G peuvent être distinctes ou confondues, dans ce dernier cas l'arête s'appelle une boucle (L'arête a s'appelle une boucle)*
- *L'ordre de G est par définition le nombre de sommets de G.*
- *Le degré d'un sommet x noté d(x) est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.(Les boucles étant comptés deux fois).*

❖ **Activité :** *Soit G le graphe suivant*

a. *Déterminer l'ordre du graphe G*

b. *Déterminer le degré de chacun de ces sommets*



❖ **Réponse:** *G = (X,A) où X = {x, y, z, t,u,p,v, w}*

a. *L'ordre d'un graphe est égal au nombre de ses sommets.*
L'ordre du graphe G est égal à 8.

b. *Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Pour ce graphe les sommets x, y, z, t,u,p,v et w ont respectivement pour degré :*

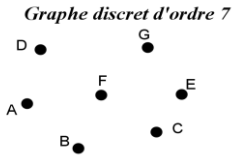
Sommets	x	y	z	t	u	p	v	w
Degré	3	4	3	3	0	1	2	4

(*d(x)=3 ;d(w)= 4;d(t)= 3;d(v)=2;d(u)=0 ;d(z)= 3;d(y)=4 ; d(p)=1)*

❖ **Remarques :**

1. *L'arête a2 et b2 s'appelle une boucle*
2. *a et b deux arête ayant même extrémités. On dit que {x, y}∈A est une arête multiples*

3. *Lorsque d(x) = 0, on dit que x est un sommet isolé, lorsque d(x) = 1, le sommet x est dit pendant*
par exemple u est un sommet isolé et le sommet p est dit pendant
4. *Un graphe est nul (ou discret) s'il n'a aucune arête, c'est ensemble de sommets isolés.*



❖ **Définitions**

∗ *Le graphe est dit simple s'il ne contient pas des boucles et des arêtes multiples.*

∗ *On dit que deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par au moins une arête*

∗ *Deux arêtes sont adjacentes si au moins une de leurs extrémités est commune.*

❖ **Exemple :** *Soit le graphe G = (X,T) suivant*

∗ *Le graphe G = (X,T) est simple car il ne contient pas des boucles et des arêtes multiples où X = {A, B, C, D,E , F, H} .*

∗ *Par exemple, les sommets D et F sont adjacents, ainsi que A et B puisqu'ils sont reliés par une arête….*

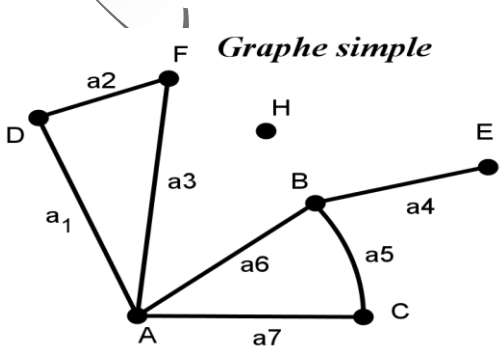
∗ *Par exemple, les sommets D et C ne sont pas adjacents*

∗ *Le point H est un point isolé.*

Un sommet est isolé s'il n'est adjacent à aucun autre sommet

∗ *Par exemple, les arêtes a1=(A,D) et a 2=(F,D) sont adjacentes puisque D est une extrémités commune..*

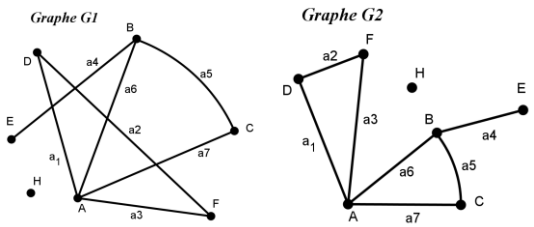
∗ *Par exemple, les arêtes a1= (A, D) et a 4= (B, E) ne sont pas adjacentes*



Exercice : *les graphes G1 et G2 sont ils identiques ?*

❖ **Réponse :** *Il suffit de comparer l'ordre des graphes puis le degré de chaque sommet.*
L'ordre du graphe G1 et G2 est égal à 7
Pour les deux graphes G1 et G2 les sommets A, B, C, D, E, F et H ont respectivement pour degré

Sommets	A	B	C	D	E	F	H
Degré	4	3	2	2	1	2	0

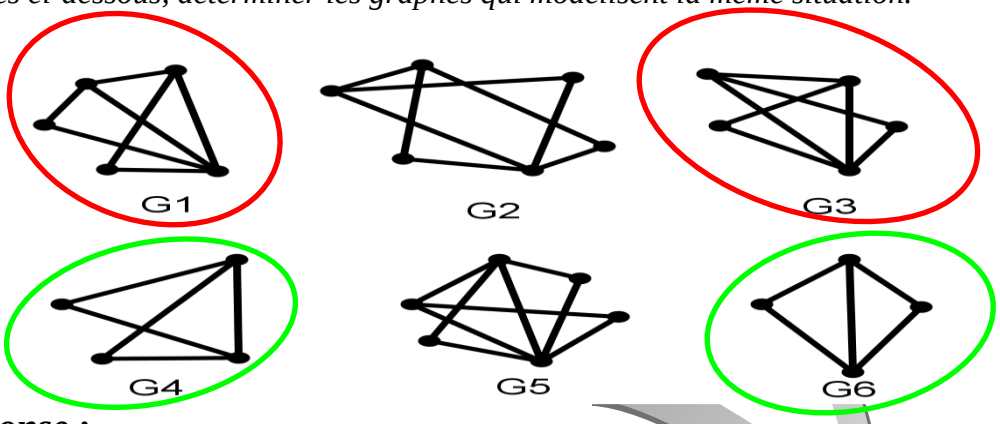


D'où G1 et G2 sont deux *Graphes identiques.*

Conclusion : *La représentation graphique d'un graphe n'est pas unique*
Il est très important de remarquer qu'il y a plusieurs dessins possibles pour un même graphe, et que deux arêtes peuvent se croiser sans pour autant définir un sommet.
Le dessin doit donc clairement identifier les sommets.

Activité 4 Page 86 :

Pour les graphes ci-dessous, déterminer les graphes qui modélisent la même situation.



❖ ***Réponse :***

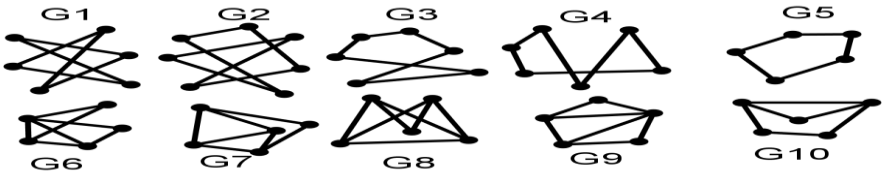
Il suffit de comparer l'ordre des graphes puis le degré de chaque sommet.

Graphe	*G1*	*G2*	*G3*	*G4*	*G5*	*G6*
L'ordre du graphe	*5*	*6*	*5*	*4*	*6*	*4*
Les sommets du graphe ont respectivement pour degré	*4 ,3 ,3,2,2*	*4 ,2 ,2, 3,3,2*	*4 ,3 ,3,2,2*	*3 ,3,2,2*	*5 ,2 ,2, 4,3,2*	*3 ,3,2,2*

∗ *Les deux graphes G1 et G3 ont même ordre et leurs sommets ont respectivement même degré4, 3, 3,2,2 .Donc G1 et G 3*sont deux *Graphes identiques*

∗ *Les deux graphes G4et G6 ont même ordre et leurs sommets ont respectivement même degré3, 3, 2,2 Donc G4 et G 6* sont deux *Graphes identiques*

A faire : Activité 1Page109 :*Pour les graphes ci-dessous, déterminer les graphes qui modélisent la même situation.*



2. ***Graphes particuliers :***

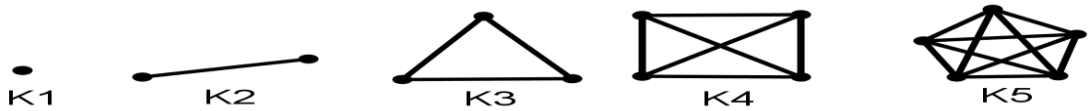
a) ***Graphe complet***

Définition *: Graphe complet*

∗ *Un graphe simple est dit complet si tous ses sommets sont adjacents, c'est à dire, toutes les arêtes possibles existent. On note* K_n *le graphe complet d'ordre* n.

∗ *Les sommets d'un graphe complet d'ordre n sont tous de degré : n-1*

Exemple:*Pour les graphes ci-dessous sont des graphes complets*

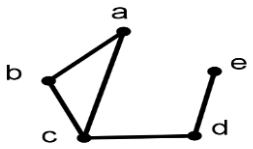


Graphe complet	K1	K2	K3	K4	K5
d'ordre	1	2	3	4	5
les sommets sont tous de degrés	0	1	2	3	4
Nombre d'arêtes	0	$1 = C_2^2$	$3 = C_3^2$	$6 = C_4^2$	$10 = C_5^2$

Conclusion: Le *nombre d'arêtes d'un graphe complet Kn est* C_n^2

(Démonstration par récurrence $C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2$ $[K_{n+1} = K_n \cup (S_{n+1}, A_{n+1})]$ ***)***

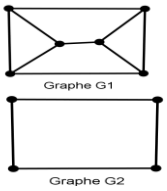
Contre –exemple : *Ce graphe n'est pas complet car :*
(par exemples, les sommets a et e ne sont pas adjacents,les sommets c et e ne sont pas adjacents….)



b) Graphes réguliers :

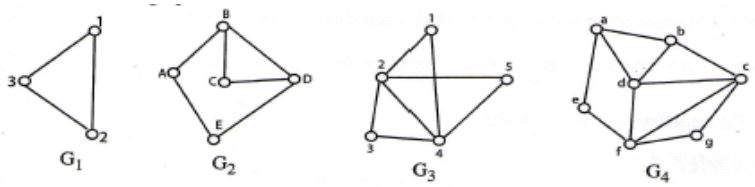
Définition : *Graphe régulier*
Un graphe est dit r régulier lorsque tous ses sommets sont de degré r.

Exemples :(Activité 4 Page 90)



- *Chaque sommet, dans ce graphe, est de degré 3. Donc c'est un graphe 3régulier.*
- *Chaque sommet, dans ce graphe, est de degré 2. Donc c'est un graphe 2régulier.*

Activité 5 Page 87: Pour *chacun des graphes suivants donner :*



1. *a/* L'ordre des *graphes G1 ;G2;G3 et G4*
   b / Le degré de chaque sommet.
   c/ La somme des degrés de tous les sommets
   d / Le nombre d'arêtes.
2. *Quelle conjecture peut-on faire ?*

❖ **Réponse :**

Graphe	G1	G2	G3	G4
L'ordre du graphe Gi	3	5	5	7
Les sommets du graphe Gi ont respectivement pour degré	d(1)=d(2)=d(3)=2 2,2,2	2, 3, 3 , 2, 2	2,4, 2, 4,2	3, 3, 4,4, 2, 4,2
La somme des degrés de tous les sommets du graphe Gi	d(1)+d(2)+d(3)= 2+2+2=6	12	14	22
Le nombre d'arêtes du graphe Gi |Ai| : Nombre d'arêtes du graphe Gi	|A1| =3	|A2| =6	|A3| =7	|A4| =11

Remarques :
- *Pour le graphe G1 : d(1)+d(2)+d(3)=2|A1| =6*
- *Pour le graphe G2 : d(A)+d(B)+d(C)+ d(D)+d(E)=2|A2| =12*
- *Pour le graphe G3 : d(1)+d(2)+d(3)+ d(4)+d(5)=2|A3| =14*
- *Pour le graphe G4 : d(a)+d(b)+d(c)+ d(d)+d(e)+d(f)+d(g)=2|A4| =22*

Conclusion : La somme des degrés des sommets d'un graphe est égal à deux fois le nombre des arêtes de ce graphe.

❖ **Théorème :** *La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre des arêtes de ce graphe.*

Remarques : * *Une méthode simple pour déterminer le nombre des arêtes d'un tel graphe , le nombre d'arêtes est égal à la somme des degrés des sommets divisée par deux*
* *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe G est donc un nombre pair.*

Autrement dit $\sum_{S_i \in G} d(S_i) = 2|A|$ ***avec A :Le nombre d'arêtes de G .***

❖ **Conséquence :** *Dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est toujours pair.*

A faire : Exercice 3-4-5 Page109 :

3. Circulation sur un graphe :

Définitions :

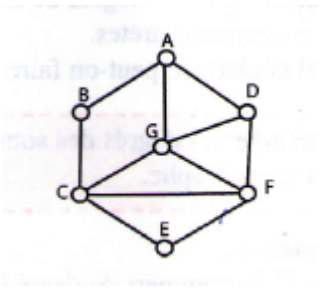
* Une chaine (parcours ou chemin) dans un graphe G est une suite finie de sommets et d'arêtes : $S_0, a_1, S_1, a_2, S_2, a_3, S_3 ... S_{n-1}, a_n, S_n$, débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités
* La longueur d'une chaine est le nombre d'arêtes qui la décomposent.
* Une chaine est dite fermée si son origine et son extrémité sont confondues.(Si $S_0 = S_n$)
* Un cycle est une chaine fermée composée d'arêtes toutes distinctes. .(Si $S_0 = S_n$ **et** toutes ses arêtes sont distinctes)

Notation :

La chaine $S_0, a_1, S_1, a_2, S_2, a_3, S_3 ... S_{n-1}, a_n, S_n$ est notée: $S_0 - S_1 - S_2 - S_3 ... S_{n-1} - S_n$

Activité 1Page 88:

Des touristes sont logés dans une ville A. Ils veulent visiter les cites B, C, D, E, F et G. Les tronçons de route qu'ils peuvent emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous.



1) Donner une chaine de longueur 3 qui permet d'aller de A à E.
2) Donner une chaine de longueur 4 qui permet d'aller de C à F.
3) Pour chacune des questions suivantes. Compléter par Vrai ou Faux

	Faux	Vrai
a. E-F-G-C est une chaine fermée	☐	☐
b. A-D-F-G –D-A est une chaine fermée	☐	☐
c. A-D-F-G –D-A est un cycle	☐	☐
d. B-C-F–G-A-B est un cycle	☐	☐

4) À partir de la ville A les touristes peuvent-ils emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux ?
5) Même question s'ils doivent obligatoirement terminer leur circuit à la ville A.

❖ **Réponse :**

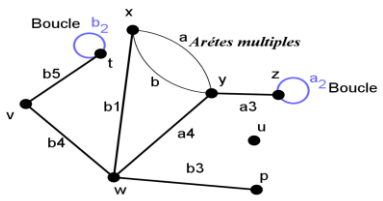
1) Pour aller de A à E il y a plusieurs chaines : par exemples A-D-F-E ;A-B-C-E et A-G-F-E sont de longueur3 ;A-B-C- G-D-F-E est de longueur 6 car il y a 6 arêtes.
2) Pour aller de C à F il y a plusieurs chaines :C-F ; C-B-A-D -F est de longueur 4 ; C-E -F ; C-G-D -F
3) Pour chacune des questions suivantes. Compléter par Vrai ou Faux

	Faux	Vrai
a. E-F-G-C est une chaine fermée	☒	☐
b. A-D-F-G –D-A est une chaine fermée	☐	☒
c. A-D-F-G –D-A est un cycle	☒	☐
d. B-C-F–G-A-B est un cycle	☐	☒

4) À partir de la ville A les touristes peuvent emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux en utilisant La chaîne (ou parcours) suivante

A-B-C -E-F -D -A-G-C-F -G -D

5) Non, puisque le sommet D est de degré impair.



Un exemple avec un graphe qui n'est pas simple :

Dans ce cas on ne peut pas décrire une chaine par une suite de sommets puisqu'il peut y avoir ambigüité sur l'arête choisie.On est donc obligé d'indiquer l'arête choisie en décrivant une chaine par une succession de sommets et d'arêtes.

Par exemple la chaine **p, b_3, w,b_1,x, a,y** est différente de **p, b_3, w,b_1,x, b,y**

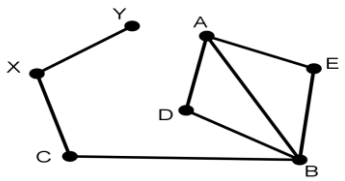
Exercice à faire : 1Page 89

Dans un graphe simple G on considère la chaîne : A-B-C-B-D-A-E-B-C-X-Y

1) *Représenter graphiquement le graphe G*
2) *Déterminée la longueur de cette chaine*
3) *Déterminée une autre chaine de G qui débute par A et se termine par y. Déterminée alors sa longueur.*

❖ ***Réponse :***

1) *Dans un graphe G on considère la chaîne : A-B-C-B-D-A-E-B-C-X-Y*
ce graphe G peut se représenter par la figure ci-contre

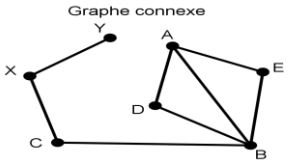


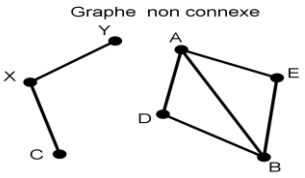
2) *la chaîne : A-B-C-B-D-A-E-B-C-X-Y est de longueur 10*
3) *la chaîne : A-B-C-X-Y est de longueur 4*

4. ***Graphes connexe :***

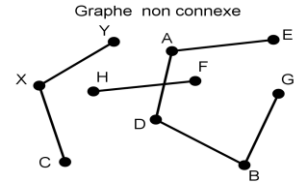
Définition : *Un graphe est connexe si on peut relier deux quelconques de ses sommets par une chaine. (c'est un graphe en un seul morceau).*

❖ ***Exemples :***

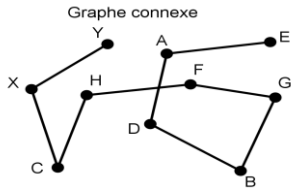




Exercice : *Transformer ce graphe en lui rajoutant un nombre minimal d'arêtes pour qu'il soit connexe.*

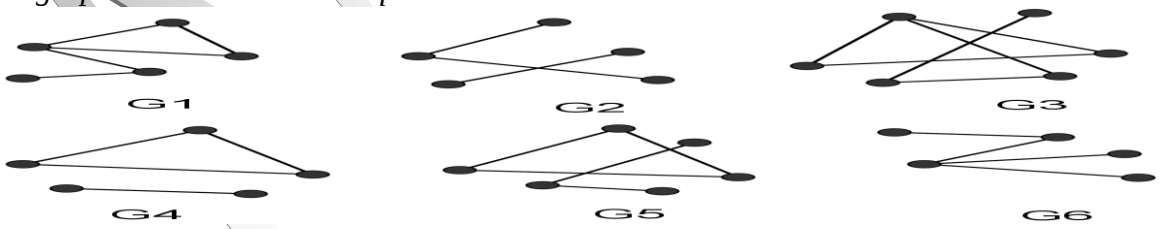


Solution : *On ajoute deux arêtes, on peut rendre ce graphe connexe*



Exercice 2Page 90

Parmi ces graphes reconnaître ceux qui sont connexe.



A faire : Activité 2Page109 :

5. ***Chaîne eulérienne :***

Définitions :

- *Une chaine eulérienne est une chaine satisfaisant aux conditions suivantes :*
  ** Elle contient toutes les arêtes du graphe.*
  ** Chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.*
- *Un cycle eulérien est une chaine eulérienne fermée* **.**

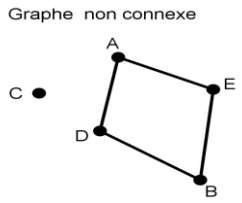
Remarque : *Une chaine eulérienne ne peut pas contenir plusieurs fois la même arête, mais elle peut passer plusieurs fois par le même sommet.*

Théorème admis 1 : (EULER)
Un graphe connexe G admet une chaine eulérienne, si et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair ou deux uniquement de ses sommets sont de degré impair (ce sont les extrémités de la chaine).

Remarques:

∗ *Comment savoir si un graphe admet une chaîne eulérienne ?*
Pour savoir si un graphe connexe admet une chaîne eulérienne, on compte les sommets dont le degré est impair.

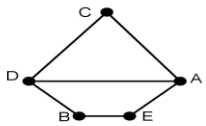
∗ *Le mot connexe est important dans le théorème ; en effet, le graphe ci-contre a tous ses sommets de degré pair (0 est pair !) mais il n'admet pas de chaîne eulérienne car il n'est pas connexe.*



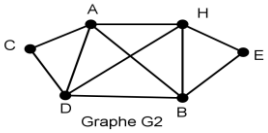
Théorème admis 2 : (EULER)
Un graphe connexe G admet un cycle eulérien, si et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.

Remarque :

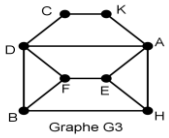
∗ *Comment savoir si un graphe admet un cycle eulérienne ?*
Pour savoir si un graphe connexe admet un cycle eulérien,on détermine si tous ces sommets sont de degré pair.



Graphe G1



Graphe G2



Graphe G3

Exercice 1 :

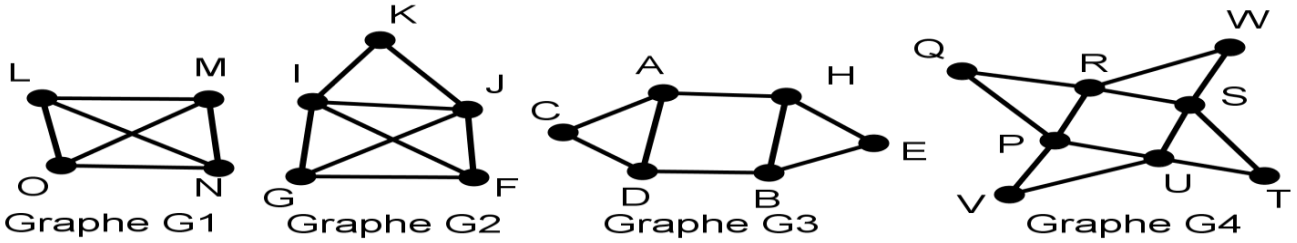
1. *On considère le graphe G1 ci-contre.*
   - **a)** *Justifier le fait que G1 n'admet pas de cycle eulérien mais qu'il admet des chaînes eulériennes.*
   - **b)** *Déterminer une chaîne eulérienne dans G1.*
2. *Le graphe G2 ci-contre admet-il un cycle eulérien ?*
3. *Le graphe G3 ci-contre admet-il une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien ?*

Réponse :

1. *a) D'après le théorème d'Euler, G1 admet un sommet (A) de degré impaire donc il n'admet pas de cycle eulérien . Puisque les seuls sommets de degré impairs sont A et D alors d'après le théorème d'Euler G admet au moins une chaîne eulérienne.*
   - **b)** *Une chaîne eulérienne : A,C,D,B,E,A,D*
2. *Dans le graphe G2 les sommets C et E sont de degré 2 et les sommets A ,H,B,et D sont de degré 4.Puisque tous les sommets sont de degré pair alors d'après le théorème d'Euler, il admet un cycle eulérien. Par exemple :(C ; D ; H ; E ; B ; A ; D ;B ;H ; A. ;C).*
3. *Le graphe G3 est connexe, il a 4 sommets de degré 3 : les sommets F,E, H et B. Donc, d'après le théorème d'Euler il n'admet ni de chaîne eulérienne, ni de cycle eulérien.*

Définition : On appelle graphe eulérien un graphe que l'on peut dessiner sans jamais lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête

Activité 3Page 89:
Peut-on reproduire les graphes ci-dessous sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête



❖ ***Réponse :***

Tracer les figures « sans lever » le crayon revient à exhiber une chaine eulérienne. Or ceci n'est possible que si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 (on aura affaire à un cycle eulérien, donc le retour se fera sur le sommet de départ) ou à 2.

Graphe	*G1*	*G2*	*G3*	*G4*
L'ordre du graphe Gi	*4*	*5*	*6*	*8*
Les sommets du graphe Gi ont respectivement pour degré	*3, 3, 3 , 3*	*2, 4 ,4 , 3, 3*	*2,3,3 ,2,3,3*	*2,4, 2, 4,2, 4, 2,4*

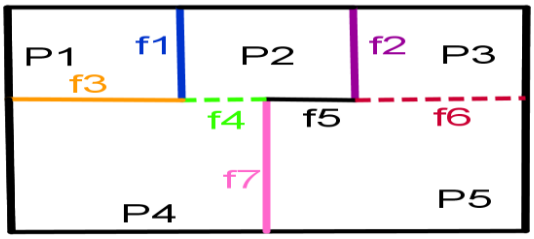
- *Pour les graphes G1 et G3, c'est impossible, car les sommets étant de degré impairs strictement supérieur à 2. Pour les graphes G2 et G4 c'est possible.*
- *Dans le graphe G2, F et G sont Les seuls sommets de degré impairs alors d'après le théorème d'Euler le graphe G2 admet au moins une chaîne eulérienne « part » d'un de sommet de degré impair et«arrive» sur un sommet de degré impair.*

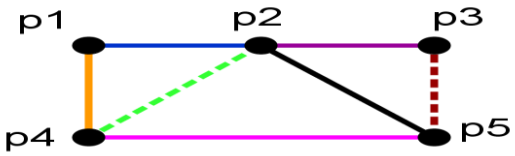
  Exemples : (F ; J ; K ; I; G ; F ; I; J ; G) ; (G ; F ; J ; K; I ; G ; J; I ; F).
- *Dans le graphe G4 tous les sommets étant de degré pair alors d'après le théorème d'Euler, il admet un cycle eulérien. Par exemple : (V ;P ; Q ; R ; W ; S ; T ; U ; P ; R ; S; U ;V).*

Remarque : *s'il y a deux sommets impairs, ils sont nécessairement les extrémités de la chaîne eulérienne*

Activité 4Page 90:

Cinq pays sont représentés ci-dessous avec leurs frontières.





1. *De quel pays doit-on partir pour visiter tous les autres pays en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?*
2. *Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?*

❖ ***Réponse :***

Pour ce graphe les sommets p1, p2, p3, p4 et p5 ont respectivement pour degré :

Sommets	*p1*	*p2*	*p3*	*p4*	*p5*
Degré	*2*	*4*	*2*	*3*	*3*

1. *Puisque deux sommets exactement (p4 et p5) sont de degré impair alors d'après le théorème d'Euler ce graphe admet une chaîne eulérienne, donc il est possible de partir d'un pays de sommet de degré impair ,et de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays de sommet de degré impair.*

Par exemples : ***(*** *p4, p1, p2, p3, p5, p4, p2, p5****) ; (****p5, p4, p1, p2, p3, p5, p2, p4****)…***

2. *Puisque tous les sommets ne sont pas de degré pair, ce graphe n'admet pas de cycle eulérien, donc il est impossible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule.*

A faire : Exercice 15-18-19 Page110 -111 :

IV) Coloriage d'un graphe :

1. Le nombre chromatique :

Vocabulaire :

Colorier un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur

Définition :

Le nombre chromatique d'un graphe G est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour son coloriage ; on le note γ **(G)**.

Activité 1 page 91 :

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent pas cohabiter dans le même aquarium .

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		x	x	x			x	x
B	x				x	x	x	
C	x			x		x	x	x
D	x		x		x			x
E		x		x		x	x	
F		x	x		x			
G	x	x	x		x			
H	x		x	x				

On se propose de résoudre le problème P suivant : Quel est le nombre d'aquariums nécessaire ?

1°) Représenter cette situation par un graphe. (Deux sommets sont adjacents si les deux poissons ne cohabitent pas)

2°) Expliquer pourquoi la résolution du problème P revient à la résolution du problème suivant : «Quel est le nombre minimale de couleurs nécessaires pour colorier les huit sommets de ce graphe de sorte que deux sommets adjacents ne soient jamais de même couleur»

3°) Les quatre sommets A, C, D et H sont deux à deux adjacents. En déduire qu'il faut au moins quatre couleurs.

4°)Colorer ce graphe de sorte que deux sommets adjacents ne soient jamais de même couleur.

Un Algorithme pour colorer un graphe :

(ALGORITHME DE WELSH ET POWELL)

Pour colorier ce graphe on procède de la façon suivante :

a) Etape 1 : *Classer les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré*

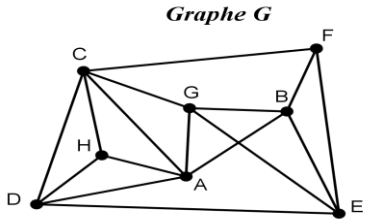
b) Etape 2 : *Dans la liste ainsi ordonnée, on attribue la couleur C 1 au premier sommet de la liste, puis en suivant la liste on attribue cette même couleur aux sommets qui ne lui sont pas adjacents et qui ne sont pas adjacents entre eux.*

c) Etape 3: *Revenir à l'étape 2, tant qu'il reste des sommets non colorés ;*

Si non s'arrêter : la coloration du graphe est terminée. Vérifier que quatre couleurs suffisent.

5°) Résoudre le problème P.

❖ **Réponse :**



1. *Cette situation peut être représentée par le graphe suivant :*

2. *Dans le graphe G les sommets sont les huit poissons tel que deux de ses sommets sont reliés lorsque les poissons associés à ces sommets ne peuvent cohabiter. Le nombre minimum d'aquariums est égal au nombre chromatique de ce graphe. C'est-à-dire est égal au nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les huit sommets de ce graphe de sorte que deux sommets adjacents ne soient jamais de même couleur*

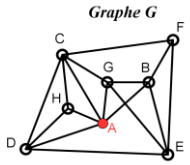
3. *Puisque Les quatre sommets A, C, D et H sont deux à deux adjacents et on sait que deux sommets adjacents ne soient jamais de même couleur , donc il faut au moins quatre couleurs pour colorier ce graphe*

4. *a)* ***Etape 1*** *:* ***On range les sommets du plus haut degré au plus petit (on ne tient pas compte de l'ordre pour les sommets de même degré).***

Sommets	A	C	B	D	E	G	F	H
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3

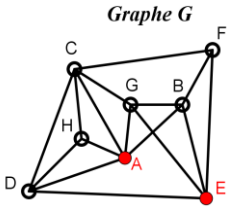
b) ***Etape 2 :*** *On choisit une couleur pour le premier sommet de la liste A : couleur Rouge*

Sommets	A	C	B	D	E	G	F	H
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3
Couleurs	R							



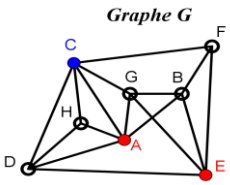
∗ *On colorie en rouge les sommets non adjacents à A et non adjacents entre eux : F ou E*
On n'a pas pu attribué la couleur rouge à un autre des sommets car ils sont tous reliés à A ou à E

Sommets	A	C	B	D	E	G	F	H
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3
Couleurs	R				R			



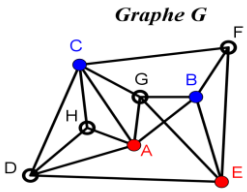
c) ***Etape 3 :*** *On réitère le procédé vu au b) en prenant une autre couleur pour le premier sommet non colorié de la liste. On colorie C en Bleu.*

Sommets	A	C	B	D	E	G	F	H
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3
Couleurs	Rouge	Bleu			Rouge			



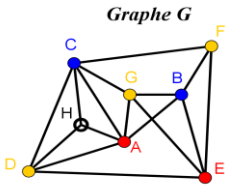
∗ *On colorie en Bleu les sommets non adjacents à C et non adjacents entre eux : B*

Sommets	A	C	B	D	E	G	F	H
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3
Couleurs	Rouge	Bleu	Bleu		Rouge			



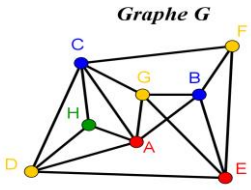
d) *Il reste des sommets non colorés, on retourne à l'étape 2 On affecte une couleur jaune au sommet D ainsi qu'à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur. On affecte donc cette couleur jaune à G et F*

Sommets	A	C	B	D	E	G	F	H
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3
Couleurs	Rouge	Bleu	Bleu	jaune	Rouge	jaune	jaune	



e) *Il reste le sommet H non coloré , On colorie en vert le point H.*

Sommets	A	C	B	D	E	G	F	H
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3
Couleurs	Rouge	Bleu	Bleu	jaune	Rouge	jaune	jaune	vert



Conclusion : *Quatre et le nombre d'aquarium nécessaire pour résoudre ce problème.*

Remarque : *L'algorithme de WELSH et POWELL n'assure pas l'obtention du nombre chromatique(tout comme tous les autres algorithmes de coloration), bien qu'il en donne une bonne approximation ; il faut donc s'assurer par d'autres moyens, si le nombre fourni par cet algorithme est bien le nombre chromatique . Une notion utile pour cela, reste celle de sous graphe .*

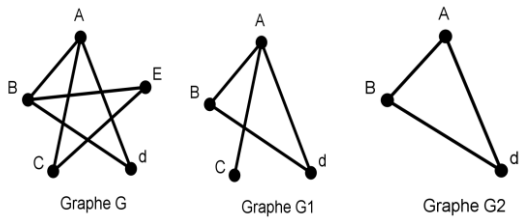
3. Sous graphe :

Définition :

** Un sous-graphe d'un graphe G est composé de certains sommets de G et de certaines arêtes de G qui relient ces sommets.*

** Un sous-graphe est dit complet si chacun de ses sommets est relié à tous les autres.*

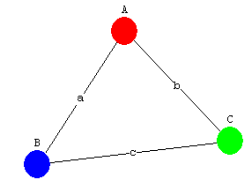
Exemples :



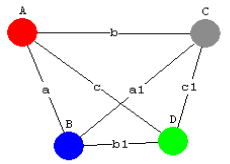
- *Le graphe G1ci-contre est un sous-graphe du graphe G.*
- *Le graphe G1 n' est pas un sous-graphe complet car : (par exemples, les sommets C et A ne sont pas adjacents,les sommets C et B ne sont pas adjacents….)*
- *Le graphe G2 ci-contre est un sous-graphe complet d'ordre 3.*

Activité 2 page 92 :

1°) Quel est le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre 3 ?
2°) Quel est le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre 4 ?
3°) Quel est le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre n ?



Graphe G1



Graphe G2

Réponse :

Rappel : Un graphe simple est dit complet si tous ses sommets sont adjacents

1. *Puisque G1 est un graphe complet d'ordre 3 alors les trois sommets A , B et C sont deux à deux adjacents et on sait que deux sommets adjacents ne soient jamais de même couleur , donc il faut 3 couleurs pour colorier ce graphe d'ou le nombre chromatique est : γ (G1) =3*

- *Le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre 3 est égal à 3.*

2. *Puisque G2 est un graphe complet d'ordre 4 alors les quatre sommets A , B ,C et D sont deux à deux adjacents et on sait que deux sommets adjacents ne soient jamais de même couleur , donc il faut 4 couleurs pour colorier ce graphe d'ou le nombre chromatique est : γ (G2) =4*

- *le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre 4 est égal à 4.*

Théorème : *Le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre n est égal à n.*

Remarques :

1) *Tout graphe contenant un sous-graphe complet d'ordre 3 nécessite au moins trois couleurs.*
2) *Tout graphe contenant un sous-graphe complet d'ordre 4 nécessite au moins quatre couleurs.*
3) *Tout graphe contenant un sous-graphe complet d'ordre n ($n \in IN^*$) nécessite au moins n couleurs*

4. Encadrement du nombre chromatique :

- *Si le graphe est complet, son nombre chromatique est égal à son degré (nombre total de sommets).*

Dans le cas contraire :

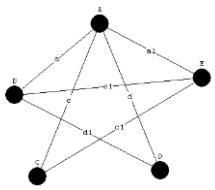
- *On cherche le sous-graphe complet dont le nombre de sommets k est le plus grand.*
- *On détermine Δ , le plus haut degré des sommets de graphe.*

On a alors :. $k \leq$ **nombre chromatique** $\leq \Delta+1$ *sig* $k \leq \gamma(G) \leq \Delta+1$

Remarque : *si on est capable de colorier pratiquement le graphe avec les k couleurs, le nombre chromatique est alors égal à k.*

Exemple :

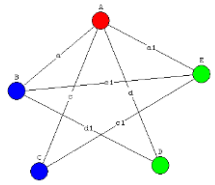
Soit le graphe G ci-contre :
Déterminer le nombre chromatique du graphe G :



Graphe G

Réponse :

On a le plus grand degré du graphe ci-contre est 4 (sommet A) donc $\Delta = 4$ *(4 arêtes issues du sommet A) et le sous-graphe complet le «plus grand» est celui composé des sommets A, B et D ou A ,C et E (voir ci-contre).*
On a donc k= 3 et $\Delta = 4$ *d'où* $k = 3 \leq$ **nombre chromatique** $\leq \Delta+1=5$
sig $3 \leq \gamma(G) \leq 5$.



Graphe G

∗ *coloriage du graphe G: On applique l'algorithme de Welsh et Powell*
On range les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré .

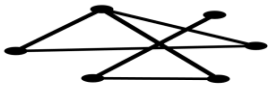
Sommets	A	B	E	C	D
Degré	4	3	3	3	2
Couleurs	Rouge	Bleu	Vert	Bleu	Vert

on trouve qu'il suffit 3 couleurs pour colorer le graphe G .Puisque le graphe G contenant un sous-graphe complet d'ordre 3 et on a réussi de le colorier avec trois couleurs alors on peut affirmer que le nombre chromatique est : $\boxed{\gamma(G) = 3}$

Activité 2 page 92 :

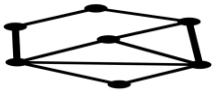
Colorier les graphes suivants :

G1



G2

G3



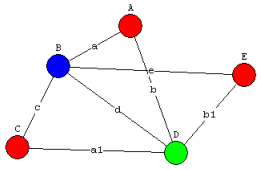
G4

G5

❖ **Réponse :**

1. *Coloriage du graphe G1 : On applique l'algorithme de Welsh et Powell*
On range les sommets du plus haut degré au plus petit (on ne tient pas compte de l'ordre pour les sommets de même degré).

Sommets	B	D	A	C	E
Degré	4	4	2	2	2
Couleurs	Bleu	Vert	Rouge	Rouge	Rouge



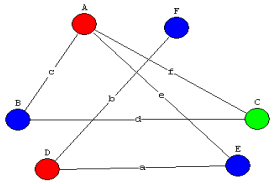
Graphe G1

on trouve qu'il suffit 3 couleurs pour colorer le graphe G1 . Puisque il contenant un sous-graphe complet d'ordre 3 et on a réussi de le colorier avec trois couleurs alors on peut affirmer que le nombre chromatique est : $\gamma(G1) = 3$

∗ *L'ordre du graphe G1 : 5 et Le nombre d'arêtes du graphe G1 : |A1| =7*

2. *Coloriage du graphe G2 : On applique l'algorithme de Welsh et Powell*

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degré	3	2	2	2	2	1
Couleurs	Rouge	Bleu	Vert	Rouge	Bleu	Bleu



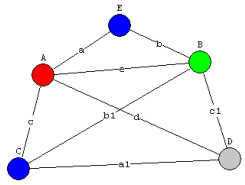
Graphe G2

On trouve qu'il suffit 3 couleurs pour colorer le graphe G2 , Puisque le graphe contenant un sous-graphe complet d'ordre 3 et on a réussi de le colorier avec trois couleurs alors on peut affirmer que le nombre chromatique est : $\gamma(G2) = 3$

∗ *L'ordre du graphe G2 : 6 et le nombre d'arêtes du graphe G2 : |A2| =6*

3. *Coloriage du graphe G3 : On applique l'algorithme de Welsh et Powell*
On range les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré

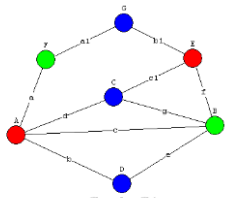
Sommets	A	B	C	D	E
Degré	4	4	3	3	2
Couleurs	Rouge	Vert	Bleu	Gris	Bleu


Graphe G3

* *On trouve qu'il suffit 4 couleurs pour colorer le graphe G 3 . Puisque il contenant un sous-graphe complet d'ordre 4 et on a réussi de le colorier avec quatre couleurs alors on peut affirmer que le nombre chromatique est :* γ **(G3) =4**
* *L'ordre du graphe G 3 : 5 et le nombre d'arêtes du graphe G3 : |A 3| =8*

4. *a) 1éré Coloriage du graphe G4 : On applique l'algorithme de Welsh et Powell*
On range les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré .

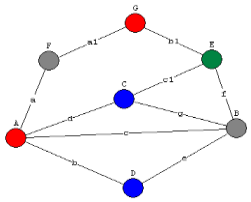
Sommets	A	B	C	E	D	F	G
Degré	4	4	3	3	2	2	2
Couleurs	Rouge	Vert	Bleu	Rouge	Bleu	Vert	Bleu


Graphe G4

* *On trouve qu'il suffit 3couleurs pour colorer le graphe G 4. Puisque il contenant un sous-graphe complet d'ordre 3 e et on a réussi de le colorier avec trois couleurs alors le nombre chromatique est :* γ **(G4) =3**
* *L'ordre du graphe G 4 : 7 et le nombre d'arêtes du graphe G4 : |A 4| =10*

b) *2éme coloriage du graphe G4 :*

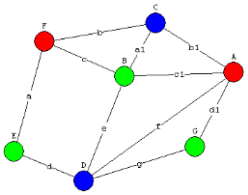
Sommets	A	B	C	E	D	F	G
Degré	4	4	3	3	2	2	2
Couleurs	Rouge	Gris	Bleu	Vert	Bleu	Gris	Rouge


Graphe G4

Remarque : *L'algorithme de Welsh et Powell ne permet pas en général d'obtenir une coloration minimale.*

5. *Coloriage du graphe G5: On applique l'algorithme de Welsh et Powell .*
On range les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré

Sommets	A	B	D	C	F	E	G
Degré	4	4	4	3	3	2	2
Couleurs	Rouge	Vert	Bleu	Bleu	Rouge	Vert	Vert

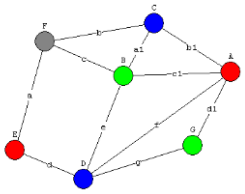

Graphe G5

On trouve qu'il suffit 3 couleurs pour colorer le graphe G5 ,et Puisque il contenant un sous-graphe complet d'ordre 3 et on a réussi de le colorier avec trois couleurs alors le nombre chromatique est : γ **(G5) =3**

* *L'ordre du graphe G 5 : 7 et le nombre d'arêtes du graphe G5 : |A 3| =11*

I) *2éme coloriage du graphe G5:*

Sommets	A	B	C	E	D	F	G
Degré	4	4	3	3	2	2	2
Couleurs	Rouge	Vert	Bleu	Rouge	Bleu	Gris	Vert


Graphe G5

Remarque : *L'algorithme de Welsh et Powell ne permet pas en général d'obtenir une coloration minimale.*

A faire : Exercice 8-9-13Page109 -110 :

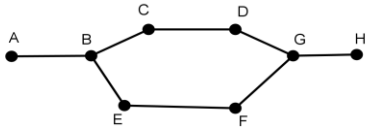
Activité 3page 92 :

On donne le graphe suivant :

1°) a/ Colorier le graphe en utilisant l'algorithme de Welsh et Powell.

b/ Quel est le nombre de couleurs utilisées ?

2°) Est-il possible de colorer le graphe en utilisant uniquement deux couleurs ?

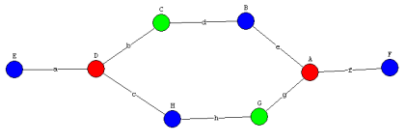


Graphe G

❖ Réponse :

1. a) Coloriage du graphe G : On applique l'algorithme de Welsh et Powell

On range les sommets du plus haut degré au plus petit (on ne tient pas compte de l'ordre pour les sommets de même degré)

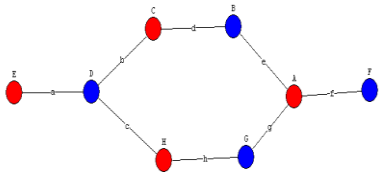

Graphe G5

Sommets	B	G	C	E	F	D	H	A
Degré	3	3	2	2	2	2	1	1
Couleurs	Rouge	Rouge	Bleu	Vert	Bleu	Vert	Bleu	Bleu

On trouve qu'il suffit 3couleurs pour colorer le graphe G .

L'ordre du graphe G : 8 et Le nombre d'arêtes du graphe G1 : |A1| =8

II) 2éme coloriage du graphe G



Sommets	B	G	C	E	F	D	H	A
Degré	3	3	2	2	2	2	1	1
Couleurs	Rouge	Bleu	Bleu	Bleu	Rouge	Rouge	Rouge	Bleu

Puisque les 4sommets B ,D , F et H ne sont pas deux à deux adjacents ainsi les 4sommets G ,C , E et A ne sont pas deux à deux adjacents donc il faut au moins 2 couleurs pour colorier ce graphe donc le nombre chromatique est : γ **(G) =2**

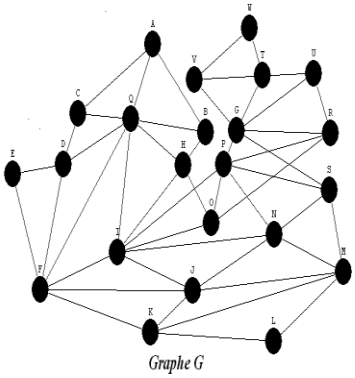
Théorème des 4 couleurs (Appel, Haken 1976)

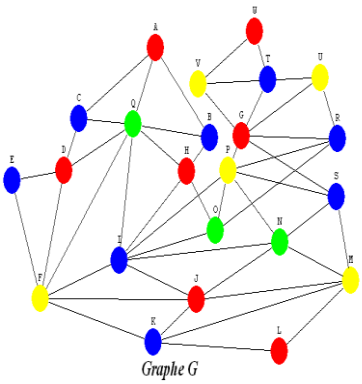
Quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte géographique de façon que deux pays voisine ne soient pas coloriés par la même couleur.

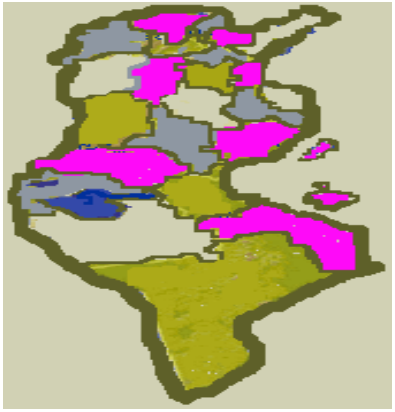
Activité 8page 94 :

Vérifier que quatre couleurs suffisent pour colorier la carte de TUNISIE sachant que deux gouvernerais voisins sont coloriés de couleurs différentes.

Réponse: Graphe associé


Graphe G


Graphe G



On remarque que quatre couleurs suffisent pour colorier la carte de TUNISIE sachant que deux gouvernerais voisins sont coloriés de couleurs différentes.

V. Recherche d'une plus courte chaîne :

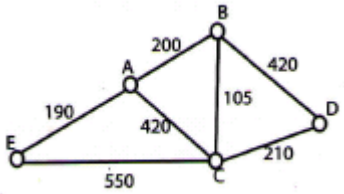
Définitions :

* Un graphe pondéré est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs.
* Le poids d'une chaîne est la somme des coefficients des arêtes qui la composent.
* Une plus courte chaîne entre deux sommets est, parmi les chaînes qui les relient une chaine de poids minimum.

* La recherche d'une plus courte chaîne s'effectue avec l'algorithme de Dijkstra :

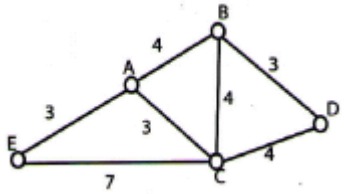
Exemple :(Exercice 26 page 112)

I) Le graphe ci-dessous représente un circuit auto- routier.



Déterminer le chemin le plus court entre D et E.

II) On note maintenant sur les arêtes les prix despéages en DT



Déterminer l'itinéraire le moins cher entre D et E

❖ **Réponse :**

I) Pour résoudre ce problème, on se propose d'utiliser l'algorithme de Moore Dijkstra qui consiste à remplir le tableau suivant:

D	B	C	A	E	Sommet sélectionné	coefficient	
							1 ligne
							2 ligne
							3 ligne
							4 ligne
							5 ligne

L'algorithme se construit successivement de ligne en ligne, en observant le graphe.

Ligne 1 :

1) Affecter le coefficient 0 à l'origine D, et le coefficient ∞ à tous les autres sommets.
2) Sélectionner le sommet de plus petit coefficient, Vérifier que c'est le sommet D.
3) Ce sommet étant sélectionné, rayer toutes les autres cases de la colonne D.

Ligne 2 :

1) On ne s'intéresse qu'aux sommets adjacents au sommet D sélectionné à l'étape précédente.
Vérifier que ces sommets sont B et C et on se propose de calculer les coefficients affectés à ces sommets : (ici B et C).

a) Coefficient de B:

* Vérifier que (coefficient du sommet D) + (poids de l'arête (D – B)) = 0 +420 = 420.
* Affecter à B le plus petit coefficient entre son coefficient précédent (ici ∞) et le nouveau coefficient calculé et vérifier que l'on trouve 420 qu'on écrit 420 (D) pour rappeler que le sommet précédemment sélectionné est D (ou pour signaler qu'elle provient de D.).

b) Coefficient de C: Procéder de manière analogue et vérifier que l'on obtient 210(D) pour C .
210 est en fait le poids de la chaîne D – C

2) Vérifier que les sommets non adjacents à D sont A et E .Retenir leurs coefficients et réécrire ∞ et ∞.
3) Sélectionner le sommet de plus petit coefficient et vérifier que c'est C (ligne 2) puis rayer toutes les cases restantes de la colonne C .

Ligne 3 :

1*)Vérifier que les sommet adjacent au sommet C sélectionné à l'étape précédente et non déjà sélectionné sont B ,A et E.*

a) Calcul du nouveau coefficient de B :

- *Vérifier que (coefficient du sommet C) + (poids de l'arête (C – B)) = 210+ 105 = 315 .*
- *Affecter à B le plus petit coefficient entre son coefficient précédent(ici 420) et le nouveau coefficient calculé et vérifier que l'on trouve 315 qu'on écrit 315(C) pour rappeler que le sommet précédemment sélectionné est C. Ce nombre est en fait le poids de la chaîne D – C – B*

b) Coefficient de A :

- *Vérifier que (coefficient du sommet C) + (poids de l'arête (C – A)) = 210+ 420 = 630.*
- *Affecter à A le plus petit coefficient entre son coefficient précédent (ici ∞) et le nouveau coefficient calculé et vérifier que l'on trouve 630 qu'on écrit630(C) pour rappeler que le sommet précédemment sélectionné est C. .*

c)Coefficient de E :

- *Vérifier que (coefficient du sommet C) + (poids de l'arête (C – E)) = 210+ 550= 760.*
- *Affecter à A le plus petit coefficient entre son coefficient précédent (ici ∞) et le nouveau coefficient calculé et vérifier que l'on trouve 760 qu'on écrit 760 (C) pour rappeler que le sommet précédemment sélectionné est C. .*

2) *Sélectionner le sommet de plus petit coefficient et vérifier que c'est B (ligne 3) puis rayer toutes les cases restantes de la colonne B.*

Ligne 4:

1) Vérifier que l'unique sommet adjacent au sommet B sélectionné à l'étape précédente et non déjà sélectionné est A.

a) Calcul du nouveau coefficient de A :

- *Vérifier que (coefficient du sommet B) + (poids de l'arête (B – A)) = 315 + 200 = 515 .*
- *Affecter à D le plus petit coefficient entre son coefficient précédent(ici 630) et le nouveau coefficient calculé et vérifier que l'on trouve 515 qu'on écrit515 (B) pour rappeler que le sommet précédemment sélectionné est B. Ce nombre est en fait le poids de la chaîne D – C – B –A.*

2) Vérifier que le sommet non adjacent à B est E et réécrire son coefficient 760(C).

3) Sélectionner le sommet de plus petit coefficient et vérifier que c'est D (ligne 4) puis rayer toutes les cases restantes de la colonne A .

Ligne 5:

On ne s'intéresse qu'au sommet adjacent au sommet A. sélectionné à l'étape précédente et non déjà sélectionné (ici E).

Calcul du nouveau coefficient de E :

- *Vérifier que (coefficient du sommet A) + (poids de l'arête (A– E)) = 515+190 =705.*
- *Affecter à E le plus petit coefficient entre son coefficient précédent(ici 760) et le nouveau coefficient calculé et vérifier que l'on trouve 705 qu'on écrit705 (A) pour rappeler que le sommet précédemment sélectionné est A. Ce nombre est en fait le poids de la chaîne D – C – B –A. –E.*

* Vérifier que l'on obtient le tableau cidessous:

D	B	C	A	E	Sommet sélectionné	coefficient	
0	∞	∞	∞	∞	D	0	1 ligne
	0 +420=420 420(D)	0 +210=420 210(D)	∞	∞	C	210	2 ligne
	210+105=315 315<420 315(C)		210+ 420 =630 630(C)	210+ 550= 760 760 (C)	B	315	3 ligne
			315+200 =515 515<630 515(B)	760 (C)	A	515	4 ligne
				515+190 =705 705<760 705(A)	E	705	5 ligne

Pour trouver la plus courte chaîne de D à E on procède comme suit :

* Dans la colonne E on repère le point inscrit le plus en bas c'est-à-dire A.
* Dans la colonne A on repère le point inscrit le plus en bas c'est-à-dire B.
* Dans la colonne B on repère le point inscrit le plus en bas c'est-à-dire C.
* Dans la colonne C on repère le point inscrit le plus en bas c'est-à-dire D.

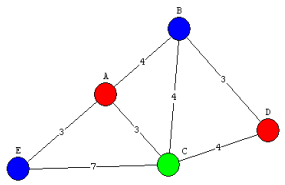
D'où la plus courte chaîne reliant D à E est : D-C-B-A-E

En utilisant le même procédé vérifier les résultats donnés par le tableau suivant :

La plus courte chaîne	Poids
D-C	210
D-C-B	315
D-C-B-A	515
D-C-B-A-E	715

II) On a le graphe ci contre

En appliquant l'algorithme de dijkstra, On obtient le tableau ci- dessous :



Graphe G2

D	B	C	A	E	Sommet sélectionné	coefficient	
0	∞	∞	∞	∞	D	0	1 ligne
	0 + 3=3 3(D)	0 +4=4 4(D)	∞	∞	B	3	2 ligne
		3+ 4=7 4<7 4(D)	3+ 4=7 7(B)	∞	C	4	3 ligne
			4+3 =7 7(C) ,7(B)	4+ 7=11 11(C)	A	7	4 ligne
				7+3=10 10<11 10(A)	E	10	5 ligne

Il y a deux itinéraires le moins cher entre D et E.

* D-C-A-E de poids 10 .
* D-B-A-E de poids 10 .

A faire : Exercice 23-24-25 Page 111 -112 :