Source : Hatier maths
Tome1, chapitre 6

Chap 6 : Eléments de base de la géométrie

Apports théoriques

1. Cercle

Soit *r* un nombre positif, le cercle de centre O et de rayon *r* est l'ensemble des points situés à une distance *r* de O.

Cf p.228

Deux cercles sont **sécants** s'ils se coupent en 2 points.
Deux cercles sont **tangeants** s'ils ont un seul point d'intersection.
Deus cercles sont dits **concentriques** s'ils ont même centre.

2. Des droites particulières

2.1 Droites perpendiculaires

Deux droites sont perpendiculaires si elles forment un angle droit.
Si 2 droites sont perpendiculaires, elles déterminent alors 4 angles droits.

Cf méthode de tracé d'une perpendiculaire avec équerre p.229.

2.2 Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun point commun.

Cf méthode de tracé d'une parallèle avec équerre p.230.

2.3 Tangeante à un cercle

La tangeante à un cercle de centre C en un point M est la droite perpendiculaire au rayon [CM]qui passe par M.
C'est une droite qui n'a qu'un seul point commun avec le cercle.

2.4 Médiatrice d'un segment

On admet que l'ensemble des points équidistants de A et de B est une droite qui est perpendiculaire à (AB) et qui passe par le milieu de [AB].Cette droite est appelée médiatrice du segment [AB].

→ Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.

→ Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

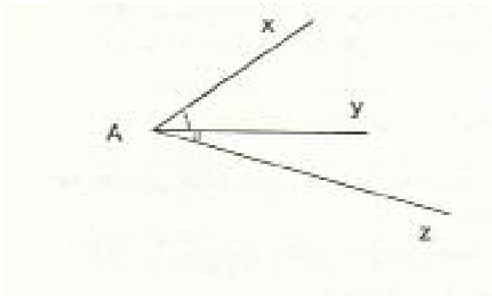
→ Si une droite est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu de [AB], alors c'est la médiatrice de [AB].

→ Si une droite est la médiatrice d'un segment [AB], alors elle est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu de [AB].

4. Angles

On appelle ange toute portion de plan limitée par deux demi-droites de même origine.
Un angle est **aigu** s'il est plus petit qu'un angle droit.
Un angle est **obtus** s'il est compris entre un angle droit et un angle plat (180°).
Un angle est **saillant** s'il est inférieur à un angle plat.
Un angle est **rentrant** s'il est supérieur à un angle plat.

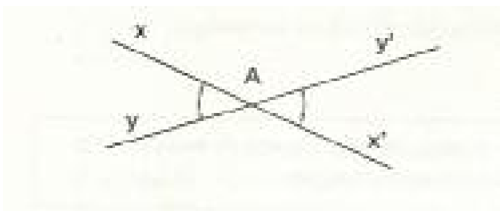
Deux angles sont **complémentaires** si la somme de leurs mesures est égale à 90°.
Deux angles sont **supplémentaires** si la somme de leurs mesures est égale à 180°.
Deux angles sont **adjacents** s'ils ont un sommet et un côté communs et s'ils sont situés de part et d'autre de ce côté.



XÂy et yÂz sont adjacents

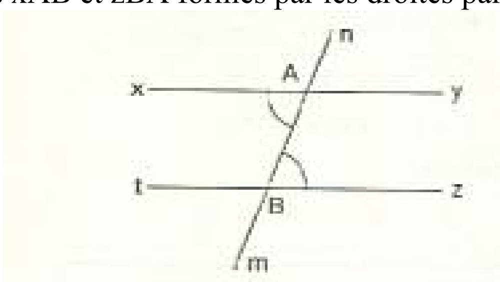
3.1 Angles opposés par le sommet

Les angles xÂy et x'Ây' sont opposés par le sommet.Ils ont leur sommet en commun et leurs côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.
Deux angles opposés par le sommet sont égaux.



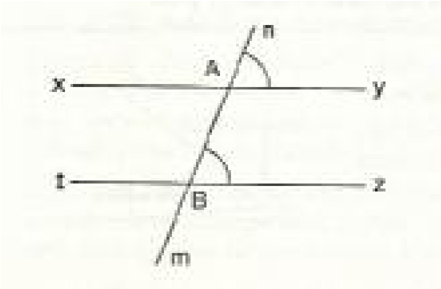
3.2 Angles alternes-internes(dans le cas de droites parallèles)

Les angles alternes-internes xÂB et zBA formés par les droites parallèles sont égaux.



3.3 Angles correspondants (dans le cas de droites parallèles)

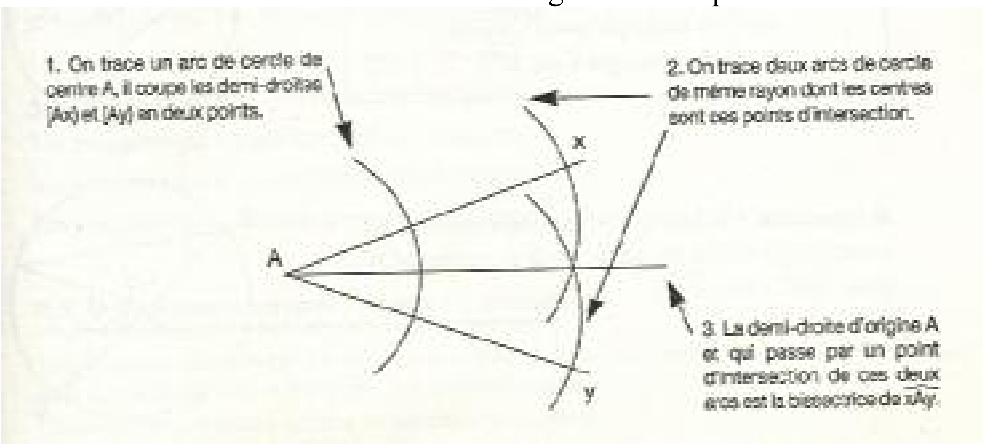
Les angles correspondants nÂy et nBz formés par les droites parallèles sont égaux.



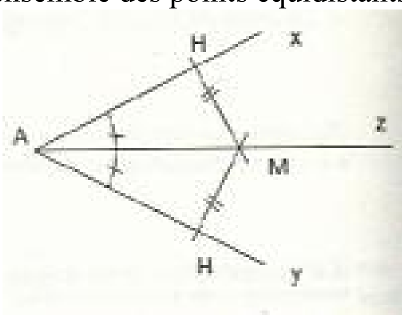
3.4 Bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle est la droite qui passe par le sommet de l'angle et qui partage l'angle en deux angles égaux.
La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.

Méthode de tracé d'une bissectrice en utilisant la règle et le compas :

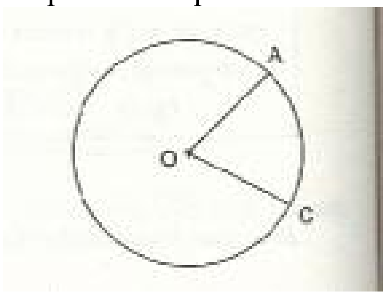


La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des côtés de l'angle.

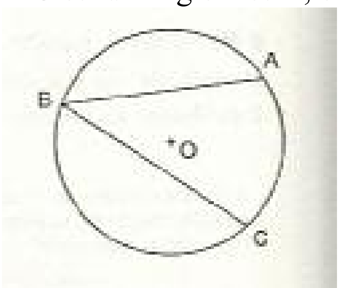


3.5 Angles au centre et angle inscrit

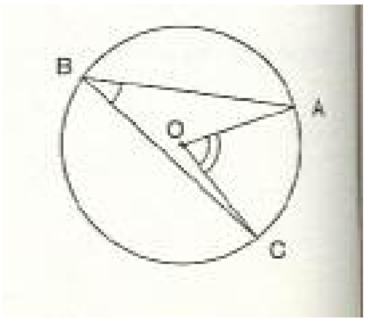
On appelle **angle au centre** dans un cercle tout angle dont le sommet est le centre du cercle : AÔC est un angle au centre, on dit qu'il intercepte l'arc AC.



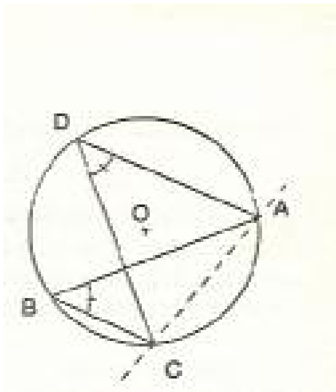
On appelle **angle inscrit** dans un cercle, tout angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle : ABC est un angle inscrit, on dit qu'il intercepte l'arc AC.



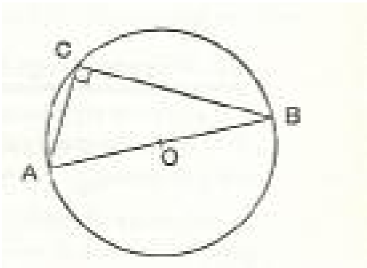
Propriété 1 :
Si un angle inscrit ABC intercepte le même arc qu'un angle au centre AOC alors
ABC = ½ AOC.



Propriété 2 :
Si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils sont égaux.
ABC = ADC



<u>Propriété 3</u> :
Si [AB] est un diamètre d'un cercle et C un point de ce cercle alors ABC est un triangle rectangle en A.



Cette propriété permet de tracer des angles droits, des droites perpendiculaires, des triangles rectengles avec un compas.

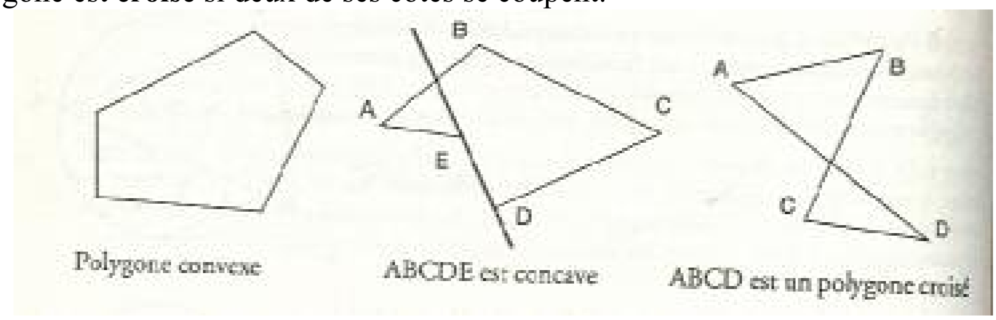
4. Polygones

Un poligone qui a 4 côtés est appelé **quadrilatère**.
Un poligone qui a 5 côtés est appelé **pentagone**.
Un poligone qui a 6 côtés est appelé **hexagone**.
Un poligone qui a 8 côtés est appelé **octogone**.
Un poligone qui a 10 côtés est appelé **décagone**.
Un poligone qui a 12 côtés est appelé **dodécagone**.

4.1 Polygones convexe, concave, croisé

Un polygone est **convexe** s'il est tout entier situé du même côté de toutes les droites supports de ses côtés.
Sinon, il est **concave**.

Un polygone est **croisé** si deux de ses côtés se coupent.



4.2 Polygone régulier

Un polygone régulier est un polygone inscriptible dans un cercle et qui a tous ses côtés égaux. Un polygone régulier a tous ses angles égaux.

→ Si ABCDE est un polygone régulier de *n* côtés et si O est le centre du cercle circonscrit alors :
AÔB=BÔC=CÔD=…=360°/*n*

Pour tracer un **hexagone régulier**, sans rapporteur, on peut tracer un cercle, puis reporter successivement sur ce cercle des cordes qui sont égales au rayon.

Pour tracer un **octogone régulier**, sans rapporteur, on trace un cercle avec deux diamètres perpendiculaires et les bissectrices des quatre angles ainsi formés.

5. Triangles

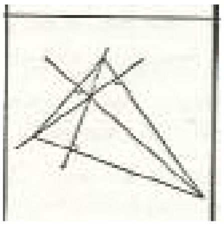
5.1 Caractéristiques d'un triangle

Propriété 1 :
Dans un triangle, la longueur de n'importe quel côté est inférieure à la somme des deux autres : c'est **l'inégalité triangulaire**.

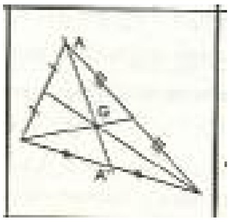
Propriété 2 :
La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

5.2 Droites particulières du triangle

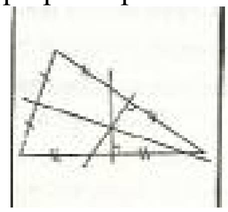
La hauteur :
Une hauteur d'un triangle est la droite perpendiculaire à un côté qui passe par le sommet opposé.
→ Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé **orthocentre**.



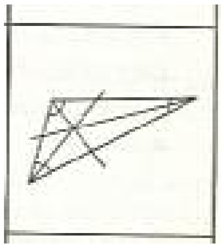
La médiane :
Une médiane d'un triangle est la droite qui passe par le milieu d'un côté et le sommet opposé.
→ Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé le **centre de gravité** tel que **AG = 2/3 AA'**.



La médiatrice :
Une médiatrice d'un triangle est la médiatrice d'un de ces côtés.
→ Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est **le centre du cercle circonscrit** au triangle (cercle qui passe par les 3 sommets du triangle).

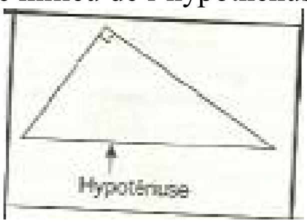


La bissectrice :
Une bissectrice d'un triangle est la bissectrice d'un de ses angles.
→ Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est **le centre du cercle inscrit** (cercle qui est tangent aux 3 côtés du triangle.

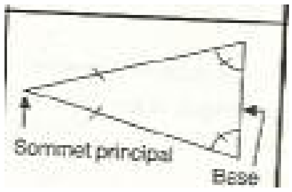


5.3 Triangles particuliers

Le triangle rectangle :
Le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypothénuse.



Le triangle isocèle :
La hauteur issue du sommet principal est aussi médiane, médiatrice et bissectrice.
Les angles « à la base » sont égaux.



Le triangle équilatéral :
Toute hauteur est aussi médiane, médiatrice, bissectrice.
Les trois angles sont égaux à 60°.

6. Quadrilatères

Les quadrilatères particuliers :

Noms	Propriété caractéristique des côtés	Propriétés caractéristiques des diagonales	Propriétés caractéristiques des angles	Autres propriétés caractéristiques
Trapèze	-**Un trapèze** est un quadrilatère non croisé, qui a 2 côtés opposés parallèles. -**Un trapèze isocèle** est un trapèze qui a 2 côtés de même longueur.		Un **trapèze rectangle** est un quadrilatère qui a 2 angles droits	
Parallélogramme	-Un parallélogramme est un quadrilatère qui a des **côtés opposés parallèles 2 à 2**. -Un parallélogramme est un quadrilatère non croisé qui a **2 côtés opposés parallèles et de même longueur**. -Un parallélogramme est un quadrilatère non croisé qui a **des côtés opposés de même longueur**.	Un parallélogramme est un quadrilatère qui a des **diagonales qui ont le même milieu**.	Un parallélogramme est un quadrilatère qui a **des angles opposés égaux et des angles adjacents supplémentaires**.	
Losange	-Un losange est un quadrilatère qui a **4 côtés de même longueur**. -Un losange est un **parallélogramme qui a 2 côtés consécutifs de même longueur**.	-Un losange est un quadrilatère qui a des **diagonales perpendiculaires et qui ont le même milieu**. -Un losange est un **parallélogramme qui a des diagonales perpendiculaires**.		
Rectangle		-Un rectangle est un quadrilatère qui a ses **diagonales de même longueur et qui ont le même milieu**. -Un rectangle est un **parallélogramme qui a des diagonales de même longueur**.	-Un rectangle est un quadrilatère qui a **4 angles droits**. -Un rectangle est un **parallélogramme qui a un angle droit**.	
Carré	Un carré est un **rectangle qui a 2 côtés consécutifs de même longueur**.	Un carré est un quadrilatère qui a ses **diagonales égales, qui ont le même milieu et qui sont perpendiculaires**.	Un carré est un **losange qui a un angle droit**.	Un carré est un quadrilatère qui a **4 côtés de même longueur et 4 angles droits**.

Aspects didactiques

1. Les principales compétences demandées aux élèves

1.1 Reproduire, construire, représenter

Reproduire :

- L'élève doit réaliser une copie d'un objet : dessin, figure cartonnée, objet familier…
- Différents outils peuvent ê mis à sa disposition.
- La validation de la reproduction peut se faire par superposition avec le modèle.

Construire :

L'objet à construire n'est pas présent, on dispose seulement d'une description de l'objet.

Représenter :

- L'objet à représenter peut être présent ou éloigné.
- Peut se faire à l'échelle 1 ou à toute autre échelle.
- Il s'agit d'utiliser des procédés conventionnels qui obligent à abandonner certaines propriétés de l'objet : par ex, si on veut représenter un cube, des faces ne seront pas représentées.
- La représentation peut avoir 2 buts : aider une personne à identifier un objet ou à le reproduire.

Dans le cas de la reproduction d'une figure complexe (= association de figures de bases) sur du papier blanc avec des instruments classiques, l'élève doit :

- **Repérer dans la figure des figures de base**.
- **Repérer les liens entre ces différentes figures**.
- **Définir une chronologie pour l'exécution des différents tracés**.
- **Exécuter ces différents tracés**.

→ Dans certains cas simples, l'élève peut tracer la figure segments par segments, de proche en proche.

La reconnaissance des figures de base :

- L'analyse de chaque partie de la figure nécessite un effort.
- La reconnaissance d'une figure est directement liée aux connaissances stockées dans la mémoire à long terme sous forme de figures prototypiques.Mais ces prototypes restent des figures particulières.

Le tracé de figures géométriques :

- Nécessite **compétences « manipulatoires** » .
- Tracer ou compléter une figure est facilité par une visualisation de cette figure avant le tracé.Pr effectuer cette visualisation, il faut solliciter les figures prototypiques associées et les adapter aux contraintes de la situation = **aptitudes à mobiliser des images mentales.**
- Nécessite aussi des **connaissances mathématiques** (propriétés…).
- Les valeurs choisies pour les variables didactiques peuvent bloquer ou faciliter certaines procédures.

Principales variables dans les tâches de construction et de représentation :

- Taille de l'espace.
- Support : papier blanc ou quadrillé.
- Instruments disponibles.
- Spécificité des objets à construire ou à représenter : taille, complexité de la figure, orientation (standard ou non), chronologie des tracés, présence ou non de sur-figure.
- Proximité de la figure à reproduire.

1.2 Décrire

Décrire une figure pour un camarade pour qu'il puisse l'identifier parmi un ensemble de figures données ou pr qu'il puisse la reproduire.

Dans le cas de la description d'une figure pour faciliter son identification :
Le type des critères utilisés sera fonction de la figure à identifier mais aussi des caractéristiques des autres figures.

Dans le cas de la description d'une figure pour la représenter ou la reproduire :
- Analyser la figure (repérer figures de base, déterminer les liens, chrono des tracés).
- Communiquer les différentes étapes de construction : l'élève doit utiliser un voc qui permette à l'interlocuteur de réussir le tracé (pas forcément lgge mathématique).

2. Les principales difficultés des élèves et leur analyse

2.1 Difficultés liées aux connaissances spatiales

- Les connaissances spatiales des élèves se forment de manière progressive : certaines connaissances ne seront pas disponibles à certains âges.
- La construction des connaissances spatio-géométriques se fait par l'intériorisation des actions du sujet, cad par l'aptitude à penser les actions sans les exécuter : cette intériorisation passe par des actions effectives.

Deux types d'obstacles peuvent apparaître en ce qui concerne la structuration de l'espace :
- le nb insuffisant d'expériences que peut vivre l'élève.
- Le fait que l'élève vive essentiellement ds un monde de représentation.

2.2 Difficultés liées aux représentations des objets géométriques

- Les élèves ont des difficultés à prendre conscience que le tracé géométrique est un ensemble de points.
- Ils ont du mal à faire la distinction entre la représentation d'une droite et celle d'un segment.
- Certains élèves ne reconnaissent pas des droites perpendiculaires lorsqu'elles ne sont pas tracées de manière « prototypique ».

➩ Deux types d'obstacles peuvent ê à l'origine de cette difficulté à distinguer l'objet géométrique :
- Un obstacle de nature épistémologique : la conception d'une droite, d'un segment… fait intervenir des notions difficiles.
- Un double obstacle de nature didactique :
    - Les 1ères activités géométriques proposées se placent dans le micro-espace (= espace des petits objets que l'on peut déplacer ; on peut les percevoir de façon exhaustive).
    - L'enseignement de la géométrie s'appuie traditionnellement sur une pratique ostensive où l'enseignant présente directement les connaissances en s'appuyant sur l'observation « dirigée » d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations et suppose les élèves capables de se les approprier et d'en étendre l'emploi à d'autres situations.

2.3 Difficultés liées aux tâches de reproduction, représentation et construction de figures géométriques

<u>Repérage des figures de base d'une figure complexe</u>

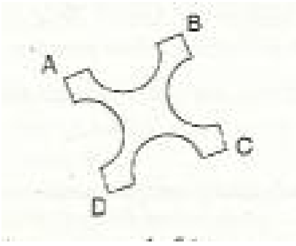
L'élève peut ne pas arriver à repérer les figures de base ou en oublier.Les origines de cette difficulté st multiples :

- L'élève n'a pas stocké de figures prototypiques correspondant aux figures à repérer, par manque d'expérience.
- Les figures de base ne correspondent pas aux caractéristiques des figures prototypiques.
- Des figures de base trop prégnantes empêchent l'élève d'en voir d'autres.
- L'élève a du mal à isoler les figures de base des autres éléments de la figure.

<u>Repérage de sur-figures</u> :

L'élève ne repère pas les figures qui ne sont pas totalement tracées.

Sur-figures = figures sont certains éléments ne sont pas tracés et qui englobent des figures de base.



Le carré ABCD est une sur-figure.

<u>Etablissement d'une chronologie des tracés</u> :

Suppose de construire mentalement au moins une partie de la figure (opération délicate).

<u>Exécution des tracés géométriques</u> :

- Difficulté de manipulation des instruments de tracé.
- Difficulté pour mobiliser des images mentales anticipatrices.
- Non-connaissance des propriétés des figures à tracer.
- Conception incomplète d'un instrument : pr bcp d'élèves, un compas sert à tracer des cercles mais non à reporter des longueurs.

2.4 Difficultés liées aux descriptions de figures

Difficultés liées à la communication des instructions :

- **<u>Au niveau du vocabulaire</u>** :
  - L'élève ne connaît pas certains mots mathématiques.
  - Il confond certains mots..
  - Il utilise certains mots mathématiques avec leur sens courant (ex : milieu d'un cercle).
  - Il utilise certains mots mots du langage courant qui n'ont pas de sens en maths (« rond », « trait »…).
- **<u>Au niveau de la connaissance des propriétés</u> caractérisant les figures de base des objets à décrire .**
- **<u>Au niveau de l'effort de décentration</u> :**ex : l'élève parlera de la médiane du triangle ABC sans préciser de laquelle il s'agit.
- **<u>Au niveau du codage des figures qui au départ ne sont pas codées</u> :** bcp d'élèves pensent qu'ils n'ont pas le droit de modifier un dessin proposé par le maître (ex : ajouter des lettres).
- **<u>Au niveau du sens que l'élève donne à l'activité de description</u> :**

- Être compris de son interlocuteur : l'élève aura tendance à utiliser un voc adapté au récepteur du message ms qui ne respectera peut-ê pas les critères du langage mathématique.
- Montrer (au maître) ce qu'il sait : l'élève peut se contenter de lister les figures de base sans préciser les liens entre ces figures ni la chronologie entre les tracés.

➔ Montrer n'aide pas forcément à reconnaître : trouver des situations-problèmes pour favoriser l'enseignement.