

Techniques opératoires

Cycle 3

Division

L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification.

Les nombres doivent rester de taille raisonnable et aucune virtuosité technique n'est recherchée.

Division

Dossier largement inspiré des travaux de :

- ***Roland Charnay, formateur à l'IUFM de Lyon, co-fondateur du groupe Ermel***
- ***Jean Luc Brégeon, formateur à l'IUFM d'Auvergne***
- ***Dominique Pernoux, formateur à l'IUFM d'Alsace***

Division

Les deux sens de la division

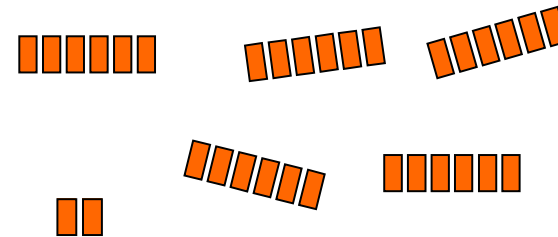
La division peut intervenir dans des **situations de partage**, de distribution, ... situations où on est amené à chercher « **la valeur d'une part** »

28 oiseaux sont placés dans 4 cages différentes.
Combien y a-t-il d'oiseaux par cage ?



$4 \times ? = 28$ $28 : 4 = 7$
Il y a 7 oiseaux par cage

Je distribue 32 cartes entre 5 joueurs
Combien de cartes aura chaque joueur ?



Chaque joueur aura 6 cartes et il en reste 2 que je ne peux pas distribuer.
Je peux écrire
 $32 = (5 \times 6) + 2$

Division

Les deux sens de la division

La division peut intervenir dans des **situations de regroupement**, ..., situations où on est amené à chercher « **le nombre de parts** »

28 oiseaux sont répartis en groupes de 4.
Combien faut-il de cages ?



$$4 \times ? = 28 \quad 28 : 4 = 7$$

Il faut 7 cages.

Des baguettes identiques mesurent 23 cm chacune.

La longueur totale des baguettes juxtaposées est 276 cm. Combien a t'on mis de baguettes ?



Je cherche combien de baguettes de 23 cm je peux aligner dans 276 cm.

$$276 = 23 \times ? \quad 276 : 23 = 12$$

Je peux aligner 12 baguettes

Division

Les deux sens de la division

Diviser, c'est bien chercher le nombre de fois où un nombre est contenu dans un autre nombre.

Au CM, la division peut prendre des sens complémentaires

La recherche du terme inconnu d'un produit

Un rectangle dont la surface mesure 30 cm^2 a une longueur de 6 cm.

Quelle est sa largeur ?

La division fraction (proportionnalité, moyennes)

Au collège, ma sœur a obtenu 16 en français, 14 en maths, 15 en sciences et 12 en histoire. Quelle est la moyenne de ses notes?

Division

Préalables à la division posée

Maîtriser la numération de position, entière puis décimale

- savoir écrire un nombre entier dans un tableau de numération
- savoir écrire un nombre décimal dans un tableau de numération
- savoir lire un nombre entier et décimal
- identifier la valeur des chiffres dans un nombre entier et décimal
- compléter un nombre décimal par des « 0 » $3,4 = 3,400$

1000	100	10	1	1/10	1/100	1/1000
milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes

Division

Préalables à la division posée

Manipuler les tables d'addition et de multiplication

- mémorisation des tables + et x jusqu'à 10
- calculs en ligne
- calculs mémorisés
- construction du répertoire multiplicatif d'un nombre

Je prépare mon répertoire multiplicatif :

37×1	37×2	37×3	37×4	37×5	37×6	37×7	37×8	37×9
37	74	111	148	185	222	259	296	353

Division

Préalables à la division posée

Maîtriser la multiplication par 10, 100, 1000, ... des nombres entiers.

Cette fonction est importante pour la recherche du nombre de chiffres du quotient et des approches successives du quotient (encadrements)

► Je retiens Trouver le nombre de chiffres d'un quotient

Pour trouver le nombre de chiffres du quotient, j'encadre le dividende par des produits du diviseur par 10, 100, 1 000, 10 000 ou 100 000.

Exemple : Pour 257 divisé par 4

257 →

$$4 \times 10 < 257 < 4 \times 100$$

Le quotient est entre 10 et 100, c'est donc un nombre à 2 chiffres.

Liste des multiples de 4

$$4 \times 10 = 40$$

$$4 \times 100 = 400$$

$$4 \times 1\,000 = 4\,000$$

$$4 \times 10\,000 = 40\,000$$

$$4 \times 100\,000 = 400\,000$$

Pour 873 divisé par 4

← **873** →

$$4 \times 100 < 873 < 4 \times 1\,000$$

Le quotient est entre 100 et 1 000, c'est donc un nombre à 3 chiffres.

Division

Préalables à la division posée

Connaître la relation entre multiple et diviseur

Définition : Un nombre a est un multiple d'un nombre b ($b \neq 0$) lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0 (c'est-à-dire lorsque « la division tombe juste »).

a est multiple de b

b est diviseur de a

a est divisible par b

8 est multiple de 4 car :

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

4 est un diviseur de 8
8 est divisible par 4

217 est un multiple de 7 car :

$$\begin{array}{r|l} 217 & 7 \\ \hline & 31 \\ \hline 0 & \end{array}$$

7 est un diviseur de 217
217 est divisible par 7

Mémoriser les critères de divisibilité

- **Un nombre est divisible par 2 (ou est un multiple de 2)** si son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8
- **Un nombre est divisible par 3 (ou est un multiple de 3)** si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3
- **Un nombre est divisible par 4 (ou est un multiple de 4)** si le nombre composé des deux derniers chiffres est divisible par 4
- **Un nombre est divisible par 5 (ou est un multiple de 5)** si son chiffre des unités est 0 ou 5
- **Un nombre est divisible par 9 (ou est un multiple de 9)** si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9

Division

Difficultés à surmonter

Pour aller vers la division

Jean Luc Bregeon – PIUFM Auvergne

- 1. Une bonne aisance des opérations (addition, multiplication, soustraction) : la technique usuelle nécessite l'emploi simultané de ces 3 opérations**
- 2. Une pratique régulière du calcul mental**
- 3. Une parfaite connaissance des tables de multiplication**
- 5. Le maintien en mémoire de résultats partiels**

Les écrits successifs pour constituer le quotient sont le résultat d'une approximation

Division

Difficultés à surmonter

Pour aller vers la division

Le calcul posé à l'école élémentaire – Programmes 2002 – Roland Charnay

Il s'agit d'un calcul « à risque », insécurisant, dans la mesure où un chiffre essayé au quotient n'est jamais absolument certain. C'est également le seul calcul où l'estimation intervient en cours de calcul, alors que, pour les autres opérations, elle intervient soit au début, soit à la fin comme instrument de prévision ou de contrôle.

Il faut également souligner le peu d'usage qui est actuellement fait de cette technique... et en tirer la conséquence : plus encore que pour les autres opérations, le travail doit être principalement **orienté vers la compréhension de l'articulation des différentes étapes du calcul.**

La division est la seule opération dans laquelle un chiffre calculé peut ne pas être définitif.

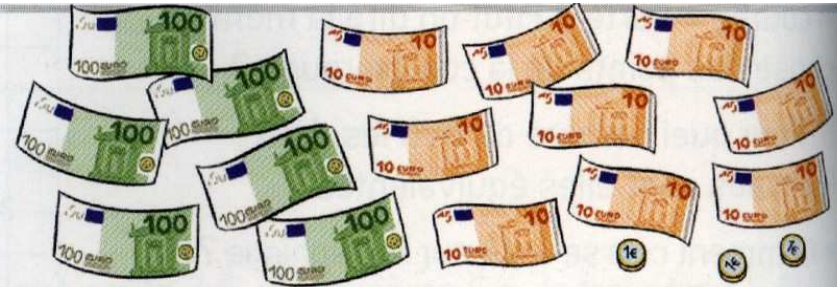
Division

Des étapes avant la technique opératoire

Notions de partages équitables et non équitables

1 On veut partager 693 euros entre 3 personnes.

- Combien de billets et de pièces de chaque sorte chacun aura-t-il ?
- Quelle somme d'argent cela représente-t-il ?



La notion de partage équitable introduit les contraintes aux différentes situations de partage et de distribution.

- répartir tous les objets
- donner le même nombre à chacun
- en laisser le moins possible

Division

Notions de partages équitables et non équitables

Un homme se promène dans les montagnes et croise deux bergers qui s'apprêtent à manger. Il leur demande s'il peut partager leur repas. Les bergers acceptent. Le premier berger a 7 fromages, et le deuxième en a 5. Ils s'installent tous les trois et mangent chacun quatre fromages. Pour les dédommager, le promeneur leur donne 12 euros. Le premier prend 7 € et le deuxième prend 5 €.

Le partage est-il équitable ?

Recherches personnelles et écritures mathématiques

1- Données simples et vérifiables

Ex : Il faut partager 51 cubes entre 4 enfants. Chacun doit recevoir la même quantité de cubes, et le plus possible.

Permettre la manipulation, les dessins, les regroupements, ...

Comparer les procédures

Favoriser ensuite l'écriture mathématique : $51 = (4 \times 12) + 3$

2- Nombres plus complexes

On dispose de 1836 carreaux pour paver une terrasse rectangulaire. Sur un côté de la terrasse, il faut placer une ligne de 15 carreaux. Combien de lignes de carreaux pourra-t-on placer ?

Encourager les calculs approchés (essais multiplicatifs, multiples de 10, l'utilisation de techniques opératoires connues (addition, soustraction, multiplication), les dispositions en colonne ...

Comparer les procédures

Favoriser ensuite l'écriture mathématique : $1836 = (15 \times 122) + 6$

Recherches personnelles et écritures mathématiques

3- Recherche d'un énoncé à partir de l'écriture mathématique (pour comprendre cette écriture)

$$71 = (\cdot \times 9) + 8$$

$$45 = (7 \times 6) + \cdot$$

$$134 = (12 \times \cdot) + \cdot$$

Exemples de textes

- Combien de livres à 9 € peut-on acheter avec 71 € ?
- On veut mettre 45 oeufs en boîtes de 6. Combien en restera-t-il ?
- On range 134 bouteilles dans des casiers de 12 bouteilles. Il faut combien de casiers ?

Recherches personnelles et écritures mathématiques

4- Données faisant intervenir d'autres paramètres (mesures, relations entre unités de mesure, prix)

Exemples :

A partir d'un sac de riz de 100 kg, combien de sachets de 3 kg peut-on remplir ?

Combien de morceaux d'élastique de 48 cm de long peut-on couper dans une bande de 3 mètres ?

Un sportif veut courir 5 000 m chaque jour. Il s'entraîne sur une piste de 145 m de long. Combien de tours de piste doit-il faire chaque jour ?

Avec 1238 €, combien de livres à 13 € peut-on acheter au maximum ?

Division

Des étapes avant la technique opératoire

Calcul réfléchi de quotients et de restes

On procède à un partage successif des centaines, dizaines et unités

Ex : Calcul du quotient et du reste dans la division de 725 par 3

→ 7 centaines partagées en 3 parts : 2 centaines dans chaque part et il en reste une

On a donc 12 dizaines à partager : 2 (2 est le chiffre des dizaines dans 725) plus les 10 qui proviennent de la centaine restante.

→ 12 dizaines partagées en 3 parts : 4 dizaines dans chaque part et il n'en reste pas

→ 5 unités à partager en 3 parts : 1 unité par part et il en reste 2.

D'où la réponse : quotient : 241 reste : 2

Division

Des étapes avant la technique opératoire

Calcul réfléchi de quotients et de restes

On incite à décomposer

Ex : Diviser mentalement 1 548 par 7

1 538 est décomposé en $1\ 400 + 148$, après avoir repéré que 1 400 est divisible par 7 (résultat : 200),

148 en $140 + 8$ pour déterminer les deux autres composantes du quotient (20 et 1) et le reste (1).

Le quotient s'obtient par addition des quotients partiels : $200 + 20 + 1 = 221$.

Division

Technique opératoire: division des entiers

Trois recommandations peuvent être faites

1- Commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient

Cette recherche :

-évite de donner un quotient ayant un ordre de grandeur manifestement erroné

-permet de garder du sens (on sait mieux, à tout moment la somme que va toucher chaque gagnant)

- est une aide pour compenser certaines erreurs au moment de la mise en œuvre de la technique opératoire

Division

Technique opératoire: division des entiers

Trois recommandations peuvent être faites

1- Commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient

Ex : On veut partager équitablement les 4237 € du lot entre les 23 gagnants

M	C	D	U		
4	2	3	7	2	3

4 est plus petit que 23. On ne peut pas donner 1000 € à chaque gagnant

42 est plus grand que 23. On peut donc donner des parts de 100 € à chaque gagnant. (42 centaines à partager)

Méthode par raisonnement

Division

Technique opératoire: division des entiers

Trois recommandations peuvent être faites

1- Commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient

Ex : On veut partager équitablement les 4237 € du lot entre les 23 gagnants

J'encadre le dividende (4237) entre des multiples du diviseur (23) terminés par des zéros.

$$\begin{aligned} 2300 &< 4237 < 23000 \\ 23 \times 100 &< 4237 < 23 \times 1000 \end{aligned}$$

Le quotient est compris entre 100 et 1 000 \Rightarrow 3 chiffres au quotient.

Méthode par encadrement

Division

Technique opératoire: division des entiers

Trois recommandations peuvent être faites

2- Poser des produits annexes, à la suite d'une première estimation du chiffre cherché dans le quotient

Ex : 24 flibustiers veulent se partager équitablement 3750 pièces d'or.

$1 \times 24 = 24$	}	37
$2 \times 24 = 48$		
$3 \times 24 = 72$	}	135
$4 \times 24 = 96$		
$5 \times 24 = 120$		
$6 \times 24 = 144$	}	150
$7 \times 24 = 168$		
$8 \times 24 = 192$		
$9 \times 24 = 216$		

Pour faciliter la compréhension, la production de la totalité de «la table du diviseur» ne doit pas être encouragée.

Roland Charnay

Division

Technique opératoire: division des entiers

Trois recommandations peuvent être faites

3- Encourager la pose effective des soustractions et du raisonnement

Exemple avec le problème suivant

On veut partager équitablement les 4237 € du loto entre les 23 gagnants

On va raisonner successivement sur le nombre de milliers, de centaines, de dizaines et d'unités que l'on peut partager.

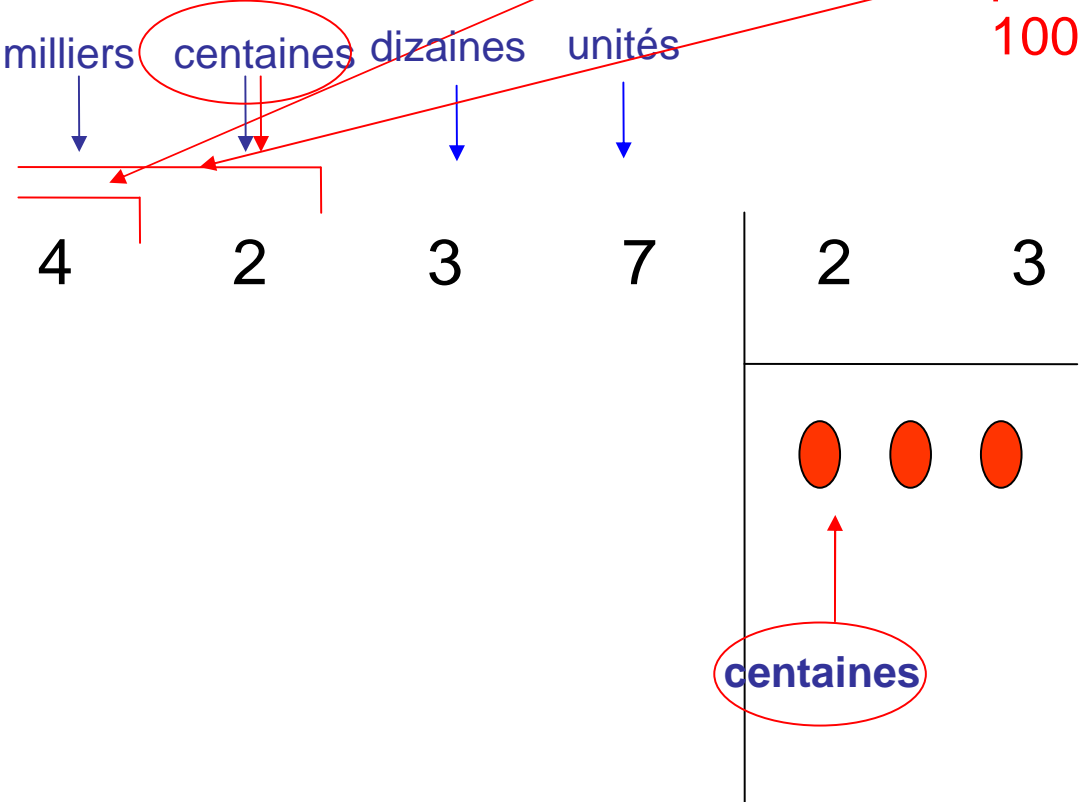
La technique « dépouillée » de la division n'est pas une compétence visée à l'école primaire.

Division

Technique opératoire

On veut partager équitablement les 4237 € du loto entre les 23 gagnants

4 est plus petit que 23. On ne peut pas
42 est plus grand que 23. On donne 1000 € à chaque gagnant, peut donc donner des parts de 100 € à chaque gagnant.



Le quotient sera donc un nombre à trois chiffres.

Division

Technique opératoire

On veut partager équitablement les 4237 €
du loto entre les 23 gagnants

On cherche combien de parts de 100 € on peut donner
à chaque gagnant :

$$\begin{array}{l} 23 \times 1 = 23 \\ 23 \times 2 = 46 \\ 23 \times 3 = 69 \\ \dots \end{array} \quad \leftarrow \quad 42$$

On peut donner 1
part de 100 € à
chacun des 23
gagnants.

Parts totales de

100

$$\begin{array}{r|l} 4237 & 23 \\ - 2300 & \\ \hline 1937 & 100 \end{array}$$

On a donné en tout
 23×100 soit 2300 €

1 part individuelle
de 100

Après avoir donné 1
fois 100 € à chaque
gagnant, il reste 1937 €.

Division

Technique opératoire

On veut partager équitablement les 4237 €
du loto entre les 23 gagnants

On cherche combien de fois 10 € on peut encore donner à
chaque gagnant :

$$23 \times 6 = 138$$

$$23 \times 7 = 161$$

$$23 \times 8 = 184$$

$$23 \times 9 = 207$$

On peut encore
donner 8 fois 10 €
à chaque gagnant

parts de 10

4 2 3 7	2 3
2 3 0 0	100
1 9 3 7	80
1 8 4 0	8 parts de 10
9 7	

On peut donc encore
donner en tout 23×80 €
soit 1840 €

Après avoir donné 1 part de
100 € puis 8 parts de 10 € à
chaque gagnant, il reste 97 €.

Division

Technique opératoire

On cherche combien d'euros (d'unités) on peut encore donner à chaque gagnant :

$$23 \times 2 = 46$$

$$23 \times 3 = 69$$

$$23 \times 4 = 92$$

$$23 \times 5 = 115$$

On peut encore donner 4 € à chaque gagnant

4237	23	
—	—	
2300	100	
—	80	euro
1937	4	s
—	184	isolé
1840		s
—		
97		
—		
92		
—		
5		

On a pu donner 184 € à chaque gagnant (le quotient est égal à 184)

Il reste 5 € (qu'on ne peut pas partager)

On peut encore donner 23×4 soit 92 €

Division

Technique opératoire: division décimale

Division décimale d'un nombre entier par un nombre entier

$$\begin{array}{r} 137 \\ 17 \\ 1 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 4 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137,00 \\ 17 \downarrow \\ 10 \downarrow \\ 20 \\ 0 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 4 \\ \hline 34,25 \end{array}$$

- 1) On effectue la division euclidienne (elle ne tombe pas juste – dans l'exemple il reste 1)
- 2) On rajoute un zéro au reste et on met la virgule au quotient
- 3) On peut continuer la division en rajoutant à chaque fois un zéro au reste

Rappel : $137 = 137,00$

Division

Technique opératoire: division décimale

Division décimale d'un nombre entier par un nombre entier

Quel intérêt de poursuivre le calcul d'un quotient décimal ?

Travailler le sens à partir de situations concrètes.

Avec 24 élèves, on veut faire 5 équipes contenant le même nombre d'enfants. Combien y aura-t-il d'enfants dans chaque équipe ? ==> Va-t-on partager le reste ? Non, on ne peut pas couper un enfant en plusieurs parties, ça n'aurait pas de sens de faire des équipes de 4,8 enfants.

5 copains se partagent équitablement un gain de 24 euros. Quelle somme reçoit chaque personne ? ==> On peut partager ce qui reste, ça va être des centimes ! Quand on partage des euros, on obtient des centimes.

Une cuisinière répartit équitablement 500g de compote dans huit pots. Quelle quantité de compote y aura-t-il dans chaque pot ? ==> On peut partager ce qui reste, ça va être des dg, cg, mg.

Division

Technique opératoire: division décimale

Division d'un nombre décimal par un nombre entier

$$\begin{array}{r} 174,5 \quad | \quad 5 \\ \underline{24} \\ 45 \\ \underline{45} \\ 0 \end{array}$$

- 1) On effectue la division de la partie entière du dividende par le diviseur : $174 \div 5$
- 2) Dès que l'on descend le chiffre qui est juste après la virgule (dans l'exemple le 5) on met la virgule au quotient.
- 3) On peut ensuite continuer la division comme précédemment

Division

Technique opératoire: division décimale

Division d'un nombre décimal par un nombre entier

Comment expliquer une situation où le dividende est inférieur au diviseur ?

Pour se faire une représentation, il faut concevoir que la division puisse être autre chose qu'un partage; Il faudra proposer aux élèves des problèmes qui font appel aux différentes significations de la division pour qu'ils puissent affronter cette difficulté.

Ex 1 : Une personne suit un régime et perd 4,3 kg en 6 jours.

De combien a-t-elle maigri par jour en moyenne ?

4,3000	6
43	0,7166...
10	
40	
40	
4...	

Ex 2 : 5 kg de pommes de terre coûtent 4,50 €. Quel est le prix du kilo ?