



Concepts clés et situations-problèmes

en mathématiques

Odette Bassis

Hachette éducation

Pour aborder les nombres en maternelle :

- Une conduite opératoire de correspondance terme à terme
- Classer
- Ordonner

La numération : donner aux élèves les moyens de la construction par eux-mêmes des principes de la numération, condition de pratiques vraiment maîtrisées, puisque comprises et non seulement appliquées.

FAIRE : quand l'impossible à compter peut être déjoué !

Introduction du thème : imaginez que vous habitez dans un pays où on ne sait pas compter et écrire les nombres que jusqu'à 4 (compris). On l'appellera le pays de quatre. Vous avez un troupeau de moutons à vendre. Pour cela, vous avez besoin de savoir combien il y en a. Cherchez que faire pour trouver combien vous avez de moutons.

DU FAIRE AU DIRE : quand les actions deviennent objets de réflexion

Cherchez comment dire ce que vous avez fait, ce qu'il y a maintenant dans votre champ.

FORMULER : quand les actions sont coordonnées et socialisées

Après ce que vous avez fait, cherchez une phrase qui explique comment comprendre combien vous avez d'allumettes.

CODIFIER : ... inventer une écriture codifiée

Voilà qu'il arrive une maladie curieuse dans ce pays : les habitants ne savent plus écrire de mots. Ils ne savent écrire que les chiffres (jusqu'à 4 compris). Alors, comment faire pour qu'on comprenne le message ?

ECRIRE UN NOMBRE AVEC DES CHIFFRES : ... peu de signes pour désigner beaucoup !

Une anomalie arrive encore : les gens ne savent plus dessiner ! Ils ne savent écrire que des chiffres.

LE ZERO : ... quand représenter « rien » devient indispensable pour faire le lien

Maintenant que vous savez comment écrire ce que vous avez compté d'un tas d'objets, vous allez chercher à coder, au pays quatre, les nombres suivants (donnés à partir du système décimal) : 18, 24, 6

LA SUITE DES NOMBRES : ... quand le chiffre 4 en base quatre disparaît et que s'installe 10 !

Individuellement, écrivez la suite des nombres au pays des quatre

LA NUMERATION DECIMALE : ... quand la numération décimale dévoile ses secrets !

Au pays des dix, l'objectif, là encore, est de dresser la liste de tous les nombres successifs de 1 en 1, conformément à ce qui a déjà été fait dans les autres bases.

Les opérations : en liaison avec le choix fondamental qui est de créer les conditions de la construction cognitive par les élèves des concepts clés, est d'insérer dans le processus l'étape de représentation « ensembliste » comme médiation conscientisante.

Objets \Rightarrow **actions sur les objets** \Rightarrow **représentations (ensembles)** \Rightarrow **opérations**
d'un esprit autonome et solidaire, critique et créatif

L'ADDITION (problèmes sans questions)

Démarche introductive de l'addition :

Situation \Rightarrow mime \Rightarrow dessin \Rightarrow diagramme \Rightarrow opération

Introduction du thème : maman va au marché, elle achète 3 banane et 4 oranges.

- Mime et manipulation
- Dessin

-pour expliquer et comprendre l'histoire

-observez ces dessins

-essayez de dessiner ce qui vous paraît important pour bien comprendre ce qui s'est passé

- du dessin au diagramme

-refaites un dessin mais essayez de bien montrer ce qui vous paraît le plus important.

Objectif : amorcer la mise en relation qui, au couple (3, 4) fait correspondre 7. Introduction de la notation conventionnelle $3 + 4 = 7$

Techniques de l'addition : établissement de la table d'addition

Demander de fabriquer les nombres 131 et 112 avec les buchettes (travail de la numération au préalable) et de rassembler les nombres. Présenter l'addition verticale ensuite par l'enseignant puis par les élèves.

LA SOUSTRACTION

Démarche introductive de la soustraction :

Objets \Rightarrow actions \Rightarrow représentation (diagramme) \Rightarrow opération (soustraction)

(opération
enlever,
ajouter,
comparer)

PRESENTATIONS DES DIFFERENTES SITUATIONS SOUSTRACTIVES

S1 : Paul a 9 billes, il en perd 4

S2 : Pour jouer au scrabble, j'ai besoin de 7 lettres, j'en ai 5.

S3 : Paul a 9 billes. François en a 5.

S4 : Dans un bouquet de 15 fleurs, 8 fleurs sont des œillets.

S5 : J'ai 9 ans et ma sœur a 12 ans.

TRAITEMENT PAR EQUIPES DES SITUATIONS SOUSTRACTIVES

Un groupe d'élèves par situation : ils peuvent mimer, dessiner, puis transcrire sur une grande affiche les dessins, schémas qui accompagneront leur présentation.

CONFRONTATION ENTRE ELLES DES SITUATIONS SOUSTRACTIVES

Dégager la signification du résultat : **reste, manque, différence, complément, distance**

Confrontation pour dégager un diagramme commun : temps d'observation silencieuse.

Faire correspondre précisément l'opération qui conclut et donne le résultat pour chaque situation.

TECHNIQUE DE L'OPERATION SOUSTRACTION

Approche d'une propriété spécifique de la soustraction : une différence entre deux termes ne change pas que l'on ajoute ou que l'on retranche un même nombre aux deux termes de cette différence.

Faire réfléchir les élèves :

J'ai 8 ans, et ma sœur a 12 ans. Je peux me poser la question de son âge quand je suis née, quand j'aurai 12 ans...

Aller du 3^{ème} au 11^{ème}, c'est franchir le même nombre d'étages que du 1^{er} au 9^{ème} ...

Technique de la soustraction :

Va s'appuyer sur deux notions :

-Le principe de fonctionnement de la numération

-La propriété précédente

- Démarrer sur des petits nombres : $9 - 4 =$ ou $9 = 4 + 5$
- Proposer $31 - 17 =$ avec buchette (il faut défaire des dizaines)
- En s'appuyant sur la propriété dégagée plus haut, l'enseignant présente la soustraction posée en colonne. Le plus important dans cette procédure dite « experte » est que les élèves en comprennent le sens en mettant en relation (à la fois de façon concrète et cognitive) avec les étapes construites précédemment.

LA MULTIPLICATION

Multiplication introduite dès le CP par additions répétées.

RECHERCHER ET CONFRONTATION DE DECOMPOSITIONS ADDITIVES

Chercher le plus de décompositions additives de 12 possible : faire des tas de jetons et les représenter à chaque fois par un diagramme.

Puis l'enseignant demande aux élèves de réécrire ces écritures additives sur des bandelettes de papier (objets mobiles pour classement).

CLASSEMENT DES DECOMPOSITIONS ADDITIVES

Consigne : classez

Écritures additives avec des nombres tous différents, avec certains nombres qui se répètent, avec la répétition d'un seul nombre

INTRODUCTION DE L'ÉCRITURE MULTIPLICATIVE

Présentation de la nouvelle écriture plus brève.

COMMUTATIVITÉ

4 tas de 3 objets ou 3 tas de 4 objets, c'est pareil.

Rappel du 1 élément neutre : 1 tas de 12 objets ou 12 tas de 1 objets.

DISTRIBUTIVITÉ

Objets dans des boîtes

| | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

$(6 \times 3) + (5 \times 3)$ ou $(6+5) \times 3$

APPRENTISSAGE DE LA TABLE DE MULTIPLICATION

Par les élèves eux-mêmes, moments d'échanges pour discuter des « astuces » trouvées liées aux propriétés de la multiplication.

AUTRES SITUATIONS MULTIPLICATIVES

Chercher combien de maisons sont possibles en utilisant 3 toits et 4 murs.

TECHNIQUE DE LA MULTIPLICATION

Prérequis : propriété de la distributivité

$$13 \times 7 = (10 \times 7) + (3 \times 7)$$

On peut au début, laisser poser les multiplications avec tous les produits partiels.

34×17 c'est 7×4 et 7×30 et 10×4 et 10×30

Les retenues = issues de l'addition.

L'enseignant peut leur apprendre comment concentrer l'écriture des sommes partielles, les retenues gardant tout leur sens.

LA DIVISION :

Utilisation de la division :

- Faire des parts égales
- Faire des parts les plus grandes possibles

LES ELEVES CHERCHENT TOUS LES PARTAGES POSSIBLES

Comment partager 13 noix entre 3 enfants : chercher toutes les distributions possibles

OBSERVATION ET CLASSEMENT

Il y a des partages inégaux et des partages égaux

Parmi les partages égaux, il y en a pour lesquels les parts sont les plus grosses possibles : 4, 4, 4, et reste 1

LA DIVISION PERMET DE TROUVER DEUX NOMBRES

A partir de situation multiples, les enfants seront amenés à dégager qu'en partant de deux nombres, la division permet d'en trouver 2 (le quotient et le reste) même si parfois le reste est égal à 0.

Erreur de commencer par des divisions où le reste est nul (ce qui est l'exception). Conséquence = les élèves font peu cas du reste.

DEUX CAS DIFFERENTS DE SITUATIONS DE PARTAGES PROPRES A LA DIVISION

Chercher le nombre d'objets par tas : il y a 13 bonbons à partager entre 3 élèves, partage égal, combien de bonbons maximum par élève ?

Chercher le nombre de tas : avec 20 œufs, j'ai rempli des boîtes de 6 œufs. Combien de boîtes ai-je remplies ?

Faire manipuler, mimer, dessiner (diagrammes) avant d'engager l'écriture des différentes opérations menées.

TECHNIQUE DE LA DIVISION

Le seul problème : la longueur du procédé (soustraire un nombre donné autant de fois que possible jusqu'à ce que le reste soit inférieur à ce nombre) d'où risque d'erreurs.

Pousser les élèves à chercher le procédé le plus économique.

Ils peuvent avant, chercher l'ordre de grandeur du quotient.

Technique la plus rapide : chercher pour chaque unité, le plus grand multiple possible.

Quand les maniements opératoires seront bien maîtrisés, on passera à la pratique, finement décortiquée de notre usage de la division.

LES NOMBRES DECIMAUX

CONTENUS CONCEPTUELS A CONSTRUIRE :

- Aucun autre nombre décimal ne peut constituer le suivant d'un décimal donné
- Entre deux décimaux, il y a une infinité de décimaux pouvant s'intercaler
- L'ordre des décimaux est à considérer en prenant la signification de la globalité du nombre (virgule comprise) et en les examinant chacun en leur ensemble à partir de l'unité de référence.
- Pour un décimal, le cryptage se fait dans deux sens opposés, la référence étant, non plus le chiffre le plus à droite, mais le premier chiffre à gauche de la virgule (indiquant l'unité d'ordre zéro)
- Ce sont les chiffres indiquant les unités qui sont à placer les uns au-dessous des autres
- Tout entier a valeur de nombre décimal et non l'inverse
- L'important est de repérer la position du chiffre qui indique la place de l'unité par rapport à laquelle seront déchiffrés dizaines, centaines... ainsi dixièmes, centièmes...
- La multiplication par 10, 100 qui a trait au nombre pris comme un tout où le passage d'une unité à une autre se fait par déplacement des unités. Chaque nombre est à considérer comme tout om partie entière et partie décimales sont liées
- Introduction des nombres décimaux à partir de l'addition de fractions décimales permettant des conversions réciproques pour donner corps cohérent et unifié à un décimal, au-delà de sa décomposition en unités identifiables
- Non confusion entre pratiques usuelles commodes quotidiennes et notion de nombre décimal

Aborder les nombres décimaux conceptuellement dans des situations qui les différencient d'emblée des nombres entiers, c'est-à-dire de telle sorte que les entiers soient inopérants dans de telles situations.

Situations pédagogiques

- Par rapport aux savoirs : trouver une situation qui soit cohérente avec le contenu conceptuel des nombres décimaux
- Par rapport aux élèves : ne pas séparer fonctionnalité et sens dans une situation où, devenant acteurs des conduites engagées, ils sont à même de rentrer de plain-pied dans la problématique des nombres décimaux.

Préalable en vue de la démarche pédagogique : démarche sur les décimaux se fait en partant de la numération en base trois

COMPARER LES LONGUEURS a ET b : quand il devient nécessaire de diviser l'unité

... quand la recherche d'une mesure exacte s'avère longue et compliquée

Vous avez à comparer deux longueurs : l'une est a l'autre est b. Mais parmi vous, les uns ont la longueur a et les autres la longueur b. Vous avez tous la même unité de longueur u.

Gains sur le plan cognitif :

- Addition de fractions successives de l'unité pour rendre compte d'une mesure
- Perception de fractionnement de plus en plus petits possibles de l'unité
- Notion d'encadrement comme outils préparatoire
- Possibilité de conversion d'une unité en une autre, d'un sous-multiple en un autre

COMPARER LES LONGUEURS a ET c :

Vous avez à comparer les longueurs a et c dans les mêmes conditions.

Gains sur le plan cognitif :

- Ajustement progressif des encadrements, suivant l'unité choisie
- Maîtrise plus grande d'une représentation additive de fractions
- Perception d'un nécessaire choix collectif et cohérent pour les « sous-multiples »

CHOIX D'UN SYSTEME DE SOUS-MULTIPLES

- Comparer et convertir les mesures en plusieurs longueurs suivant les sous-multiples choisis
- Convertir un même nombre suivant des systèmes différents de sous-multiples
- Convertir un même nombre suivant des sous-multiples différents d'un même système

INTRODUCTION DE LA VIRGULE

Gains sur le plan cognitif :

- Conversions de fractions décimales en nombre à virgule et inversement
- Le nombre à virgule comme différent des nombres entiers
- Les entiers comme nombres à virgule particuliers
- Multiplier et diviser par 10, 100... un nombre décimal

LA PROPORTIONNALITE

NOTION DE RAPPORT

- Réduction d'un rectangle : réduction empirique
- Comparaison des rectangles réduits (en équipe)
- De l'empirisme au quantitatif (confrontation collective) : recherche de conduites opératoires de réduction
- Emergence d'hypothèses : retour au travail individuel et en équipe
- Recherche d'une hypothèse fiable
- Représentation et formulations : à la recherche collective d'un invariant opératoire entre couples de nombres trouvés
- Notion de rapport constant : entre longueur et largeur et tous les rectangles réduits.

NOTION DE PROPORTIONNALITE

- Réduction des pièces d'un puzzle
- Reconstitution empirique du puzzle réduit
- Recherche d'une conduite opératoire de réduction du puzzle, demeurant invariants deux types de rapports constants :
 - Entre les dimensions propres à chaque figure
 - Entre les dimensions de la figure initiale et les dimensions des figures réduites
- Conscientisation des conditions de réduction du puzzle
- Constitution de tableaux récapitulatifs
- Ensemble des propriétés de la proportionnalité

APPROCHE DES FRACTIONS ET NOMBRES RATIONNELS

But : construction de la notion de nombre rationnel comme rapport de 2 naturels

Situation de recherche : réduction ou agrandissement d'un puzzle constitué de rectangles tel que le rapport longueur / largeur de l'un d'eux n'a plus pour valeur un nombre naturel d'où l'utilisation d'un nouveau nombre permettant de rendre compte de ce rapport. Exemple : un rectangle de longueur 40 et de largeur 30.

A la recherche du nouveau nombre, fractions et nombres décimaux

LE PROBLEME SANS QUESTION

Pas de questions car ces questions ont toujours leurs réponses connues à l'avance, pour s'assurer que l'élève suit bien, qu'il a retenu, qu'il a fait ce qu'il fallait faire. Enlever les questions, c'est permettre aux élèves de commencer à s'en poser.

Problème avec question : la priorité c'est répondre pas de comprendre.

LA DEMARCHE DE CONSTRUCTION DU SAVOIR

- Paradoxe de l'enseignant / formateur dont la plus grande utilité consiste à se rendre inutile
- Paradoxe des situations-problèmes dont ce qui fait problème et paraît pour un temps impossible met en effervescence de multiples possibles
- Paradoxe des processus enclenchés dont les contraintes, contradictions et mêmes conflits qui sont à surmonter suscitent et développent les conditions d'un esprit autonome et solidaire, critique et créatif