

# GEOMETRIE DANS L'ESPACE

## 1. Les polyèdres

### Définition

Un polyèdre est un solide délimité par des faces qui sont toutes des polygones.  
Le mot vient du grec *poly* = plusieurs et *èdre* = face

L'intersection de 2 faces est une **arête**

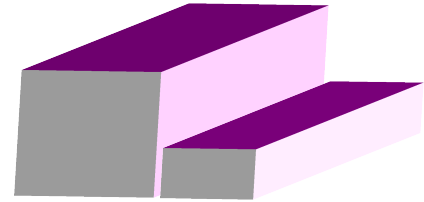
L'intersection de 2 arêtes est un **sommet**

Une arête est donc un segment

Un sommet est un point

Un polyèdre est convexe s'il est situé tout entier d'un même côté de tout plan contenant une quelconque de ses faces.

Le polyèdre représenté ci-dessus n'est pas convexe.



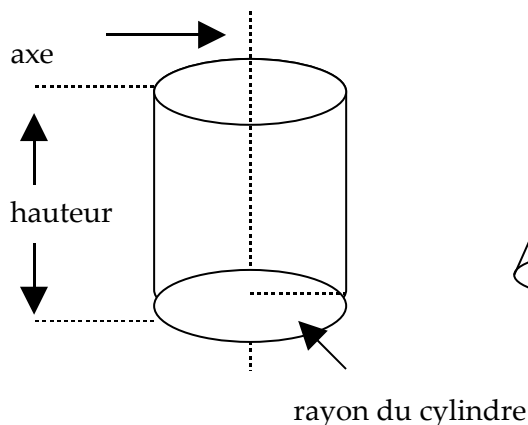
### Des polyèdres particuliers

- Le **cube** est un polyèdre qui a 6 faces carrées
- Le **parallélépipède** rectangle (ou pavé droit) est un polyèdre qui a 6 faces rectangulaires
- Le **prisme droit** est un polyèdre qui a deux faces superposables, les autres sont des rectangles. Un pavé droit est donc un prisme droit particulier.
- Le **tétraèdre** est un polyèdre qui a 4 faces rectangulaires
- La **pyramide** est un polyèdre dont une face est un polygone convexe (base de la pyramide) et toutes les autres faces sont des triangles dont un côté est un côté de la base qui ont tous un sommet commun (sommet de la pyramide). si la base est un carré, on parlera de pyramide à base carrée.

## 2. Autres solides

Tous les solides ne sont pas des polyèdres, en voici 3 :

- Le **cylindre** a 2 faces qui sont des disques superposables
- Le **cône** a une face qui est un disque
- La **sphère** de centre O et de rayon r, est l'ensemble des points M de l'espace situés à une distance égale à r de O



### 3. Représentations dans le plan d'un solide

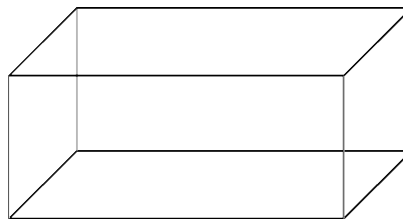
Plusieurs manières de représenter un solide dans un plan : en perspective, par vue de face, de dessus, de dessous, ...

#### Les projections

Il s'agit de représenter l'image du solide par une projection sur un plan. Il y a 2 types de projections cylindriques et des projections coniques

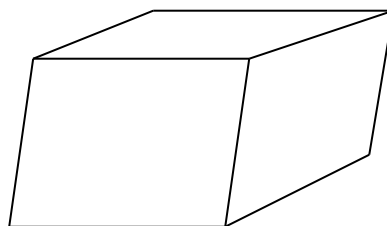
##### ➤ La perspective cavalière

En perspective cavalière, les faces parallèles au plan de projection sont représentées sans déformation et en grandeur réelle (à une échelle près). Pour ces faces donc, les angles et les distances ne sont pas déformés. Les droites perpendiculaires au plan de projection se projettent selon une direction qui est toujours la même, appelée direction des fuyantes. L'angle avec la direction horizontale est généralement de  $45^\circ$ . Les distances sur cette direction sont réduites, le coefficient utilisé étant souvent 0,5. Les arêtes cachées sont représentées en pointillés.



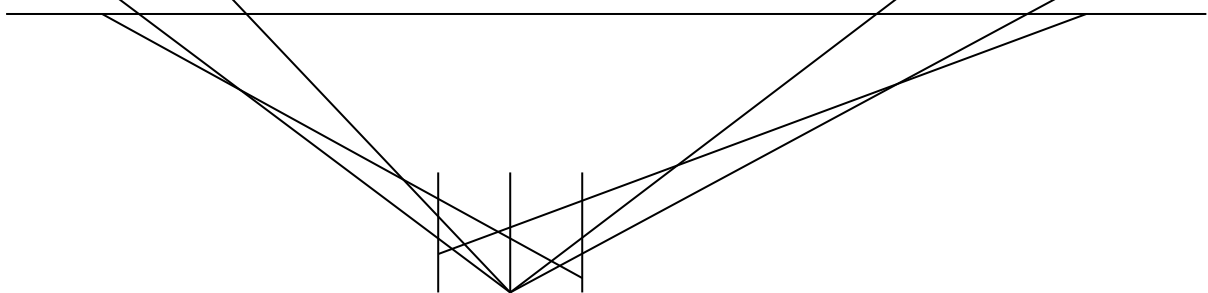
##### ➤ La perspective axonométrique

Lorsque la projection se fait sur un plan qui n'est pas parallèle à l'une des faces, on parle de perspective axonométrique.



##### ➤ La perspective artistique

Parmi les projections coniques, la perspective artistique est très utilisée. Toutes les droites horizontales qui appartiennent à des plans qui ne sont pas parallèles au plan du dessin convergent en des points situés sur la ligne d'horizon appelée ligne de fuite. (procédé mis au point par des peintres de la Renaissance pour reproduire une image la plus proche du réel.



### Les vues de face de dessus de droite de gauche

Autre façon de représenter les solides dans un plan.

## 4. Patrons de solides

Le patron d'un solide est une figure géométrique plane telle que uniquement par pliage on puisse obtenir ce solide, sans chevauchement de faces.

## 5. Orthogonalité et parallélisme dans l'espace

### Droites et plans dans l'espace

Toute arête d'un polyèdre est portée par une droite.  
De même toute face est contenue dans un plan

### Droites parallèles ou perpendiculaires dans l'espace

2 droites sont parallèles si elles sont dans le même plan  
et si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun point commun.

2 droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles  
menées par un point sont perpendiculaires

### Plans parallèles

Deux plans sont parallèles s'ils n'ont aucun point commun ou s'il sont confondus.

### Droite orthogonale à un plan

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toute droite du plan.

## ANALYSE DIDACTIQUE

Les solides de l'espace peuvent être caractérisés par 3 catégories d'éléments :

- les définitions, propriétés (en part pour les polyèdres, le nbre et la nature de leurs faces, le nbre de leurs arêtes et de leurs sommets) ;
- des représentations dans le plan : on a vu qu'il y a plusieurs façons de représenter un objet de l'espace dans le plan : perspective cavalière, axonométrique, vue de dessus, dessous,...
- des patrons pour beaucoup de solides

L'enseignement de la géométrie dans l'espace doit aider les élèves à mettre en relation ces éléments.

A l'école primaire, les solides pour lesquels des objectifs spécifiques sont formulés sont le cube, le parallélépipède et la sphère.

### 1.- Représentation des objets de l'espace dans le plan

#### 1.1- Les espaces topologique, projectif et métrique

Pour analyser les productions d'élèves dans le cadre de la représentation d'objets de l'espace, on distingue 3 types d'espaces :

- **L'espace topologique** : On ne prend en compte ni l'alignement ni les mesures, mais seulement les propriétés de voisinage des éléments, leur ordre, leur continuité ou discontinuité.
- **L'espace projectif** : Il y a conservation des propriétés par la projection : alignement, milieux, parallélisme. Les positions des figures les unes par rapport aux autres sont aussi conservées.
- **L'espace métrique** : Il y a conservation des distances.

#### 1.2- L'évolution des représentations de l'espace chez l'enfant :

On distingue trois stades dans l'évolution des dessins des objets de l'espace par un enfant :

- **Stade 1 :incapacité synthétique (3-4 ans)**: Le dessin est un gribouillage, l'enfant ne parvient pas à prendre en compte l'alignement, les proportions... Les relations d'ordre ne sont pas respectées, les éléments souvent juste juxtaposés. Seul les éléments typologiques de voisinage sont respectés.

- **Stade 2 : « le réalisme intellectuel » (5-7 ans) :** Le sujet dessine non pas ce qu'il voit, mais ce qu'il sait ( poussin à l'intérieur de l'œuf ). Plusieurs vues sont souvent juxtaposées.
- **Stade 3 : « le réalisme visuel » (8-9 ans avec de grandes disparités selon les enfants) :** L'enfant cherche à tracer ce qu'il voit, il est soucieux du rapport simultané des perspectives, des proportions, des mesures et des distances. L'espace projectif et métrique se construisent en même temps chez l'enfant.

### 1.3- Analyse des erreurs et des difficultés des élèves

On peut proposer deux types de tâches aux élèves : représenter ou reconnaître un objet.

- **Dans le cadre de la représentation d'un objet dans l'espace,** il faut d'abord s'interroger sur ce qu'est une erreur d'élève : représenter une pyramide par un triangle, est-ce une erreur ?  
Ce qu'on appelle erreur, c'est un écart par rapport aux caractéristiques de la perspective qui sont essentiellement des conventions qui ont été longues à mettre en place. Les principales erreurs sont :
  - chercher à représenter plusieurs points de vue dans une même représentation
  - ne représenter que la face avant sans avoir la possibilité de représenter les autres faces
  - chercher à conserver les distances pour des arêtes placées sur des fuyantes.
  - ne pas représenter dans le cadre d'une perspective cavalière, les arêtes cachées en pointillés.
- **Dans le cadre de la reconnaissance d'un objet,** ou des caractéristiques de cet objet à partir d'une représentation en perspective, les difficultés sont doubles :
  - l'élève n'arrive pas à voir la tridimensionnalité dans le dessin : il verra un carré et deux parallélogrammes sur le dessin d'un cube, mais pas le cube.
  - L'élève n'arrive pas à imaginer certaines caractéristiques de l'objet : il ne perçoit pas que les arêtes sont perpendiculaires dans la représentation du cube.

Ces erreurs proviennent de la difficulté que l'élève a de s'approprier la convention de la perspective, mais aussi à celle qu'il a de ce construire une image mentale à partir d'un tracé.

## 2. Tracés et reconnaissances de patrons de solides

### 2.1- Reconnaissance de patron

Cela suppose pour l'élève de s'assurer :

- que toutes les faces du solide et elles seulement sont représentées

- que les côtés des polygones qui représentent les faces et qui se correspondent après pliage sont de même dimension
- que deux faces ne se superposent pas.

- **Les principales variables didactiques qui interviennent dans cette tâche sont :**

- la nature du solide :
- la présence ou non du solide
- la possibilité ou non de plier ou découper le dessin : plus besoin de mobiliser d'images mentales pour la longueur des côtés.

- **Les erreurs de reconnaissance peuvent avoir plusieurs origines :**

- l'élève ne s'assure que d'une condition : surcharge cognitive ou non-appropriation de l'intérêt des autres conditions.
- L'élève n'arrive pas à vérifier mentalement la deuxième et la troisième condition

## 2.2- Construction de patrons :

- **L'objet est présent :** l'élève peut construire le patron en traçant l'empreinte de chaque face, et s'il ne peut pas le toucher, en le dépliant mentalement : il risque alors d'y avoir des difficultés dues à la manipulation des images mentales.
- **L'objet est absent du regard de l'élève :** si l'objet est tracé en perspective cavalière, l'élève devra se représenter mentalement l'objet puis étaler mentalement ses faces : double difficulté. Si l'objet n'est pas représenté, il devra forcément s'agir d'un objet familier : cube, pavé...

Enfin, beaucoup d'élèves s'imaginent qu'un solide n'a qu'un seul patron, ce qui peut bien sûr poser des difficultés dans la résolution de certains exercices.

## 3. Repérage des propriétés caractéristiques d'un objet dans l'espace

Il s'agit pour l'élève de reconnaître les propriétés d'un solide. Plusieurs cas peuvent se produire :

- **L'élève a le solide à sa disposition :** dans ce cas, il suffit de lire directement ses propriétés. Risque d'erreurs dans le décompte des faces, des sommets, des arêtes...
- **L'élève voit le solide mais ne peut ni le manipuler, ni tourner autour :** l'élève doit alors imaginer ce qui se trouve derrière la face avant, ce qui suppose qu'il soit familier avec la figure : risque important d'oublier ou de compter deux fois des faces sommets, arêtes...et difficulté de reconnaissance de l'orthogonalité.

- **L'élève ne dispose que du tracé en perspective du solide** : il faut alors que l'élève connaisse et se soient approprié les conventions de la perspective cavalière, en particulier le fait qu'elle ne conserve pas l'orthogonalité.

Il y a également des difficultés en ce qui concerne le vocabulaire dans la mesure où pour désigner les mêmes objets on utilise des mots différents suivant qu'on considère qu'ils appartiennent au solide ou à l'une de ses faces