EXERCICES

EXERCICE 1:

On considère les suites définies sur IN par :

$$u_n = \frac{2n+1}{3^n} \quad \text{et } v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n.$$

1°/ a) Montrer que (u_n) est décroissante et qu'elle admet une

Limite finie ℓ.

b) Etablir que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2°/ Pour tout entier $n \geq 2$ on pose $S_n = 1 + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \ldots + \frac{2n+1}{3^n}$.

a) Calculer : $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ en fonction de n.

b) Montrer que $S_n = 2 - \frac{1}{2\ 3^{n-1}} - \frac{1}{2}u_n$ pour tout $n \geq 2$.

c) Prouver que (S_n)est une suite convergente et calculer sa limite.

3°/ Pour tout $n \in$ IN ; on pose : $a_n = (2n+1)(\text{tg } x)^n$ où $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

a) On prend $x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$; Montrer que (a_n) est divergente.

b) On prend $x = \frac{\pi}{4}$; Etudier la convergence de (a_n) et celle de la suite (b_n) définie

par $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n^2+1}$ pour tout $n \geq 0$.

EXERCICE 2 :

On considère la suite u définie sur IN^* par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n.$$

1°/ Calculer u_2, u_3 et u_4 .

2°/ a) Montrer que pour tout $n > 0$ on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

b) En déduire que la suite u est convergente et calculer sa limite.

3°/ Soit v la suite définie pour $n > 0$ par : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

a) Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Calculer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Calculer u_n en fonction de n .

EXERCICE 3 :

Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

1°/ a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $0 < u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2°/ Soit $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

Déduire qu'elle est convergente.

EXERCICE 4 :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} \bullet\ u_n \text{ est croissante.} \\ \bullet\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } u_n \geq 2. \end{cases}$

1°/ On pose $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_0\, u_1 \ldots u_k}$.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n \leq \frac{1}{u_0} + \frac{1}{2\, u_0} + \frac{1}{2^2 u_0} + \ldots + \frac{1}{2^n u_0}$.

b) En déduire que la suite (V_n) est majorée.

2°/ Soit ℓ la limite de V_n . Montrer que $\ell \in [0,1]$.

EXERCICE 5 :

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 3} + 3\, u_n}{3\, u_n^{\ 2} + 1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1°/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geq 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante .

En déduire qu'elle est convergente.

2°/ Soit $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = v_n^{\ 3}$.

b) En déduire que : $v_n = (v_0)^{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3°/ a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}$.

b) Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que (S_n) est croissante.

c) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $\frac{1}{3} \leq S_n \leq 2\left(1 - \frac{1}{3^{3(n+1)}}\right)$.

d) Montrer que (S_n) est convergente et donner un encadrement

de sa limite.

EXERCICE 6 :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = 2 + u_n - \sqrt{3+u_n^{\,2}} \quad \forall\ n \geq 0. \end{cases}$$

1°/ Etudier la suite (u_n) pour $u_0 = 1$.

2°/ Dans la suite de l'exercice on prend $u_0 \in [\,0,1\,[$.

a) Vérifier que pour tout $n \geq 0$ on a : $u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n + \sqrt{3 + u_n^2}}$

b) En déduire que $0 \leq u_n \leq 1$.

c) Etudier la monotonie de (u_n) .

En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3°/a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a :

$$0 < 1 - u_{n+1} \leq (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n).$$

b) En déduire que pour tout $n \in IN$ on a :

$$0 < 1 - u_n \leq (\sqrt{3} - 1)^n (1 - u_0).$$

Retrouver alors la limite de (u_n) .

4°/ On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{3 + u_k^2}$ et $T_n = u_n + S_n$; pour $n \in IN$.

a) Quelle est la nature de la suite (T_n).

Calculer S_n en fonction de n, u_0 et u_n.

b) Déterminer la limite de $\dfrac{S_n}{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 7 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$ pour tout $n > 0$.

1°/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

2°/ Montrer que pour tout $n > 0$ on a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + \dfrac{1}{2^n}$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3°/ On pose $S_n = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + ... + \frac{n}{2^{n-1}}$ pour tout $n > 0$.

Montrer que $S_n = -u_n + 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4°/ Soit $V_n = n\,(\sin x)^{n-1}$ pour $n > 0$; avec $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$.

a) Montrer que $V_n \leq u_n$ pour tout $n > 0$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

b) Montrer que, pour tout $n > 0$ on a : $V_{n+1} = (\sin x)V_n + (\sin x)^n$

c) On pose : $T_n = 1 + 2\sin x + 3(\sin x)^2 + ... + n(\sin x)^{n-1}$ pour tout $n > 0$.

Démontrer que : $T_n(1 - \sin x) = -(\sin x)V_n + \frac{1 - \sin^n x}{1 - \sin x}$.

En déduire la limite de T_n lorsque n tend vers $+\infty$

EXERCICE 8 :

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - u_n^{\,2}}}}{2} & \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

1°/ Calculer u_3, u_4 et u_5.

2°/ Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $u_{n+1} \leq u_n$.

3°/ Soit (v_n) la suite définie par : $u_n = \sin v_n$.

a) Déterminer la nature de (v_n).

b) Exprimer u_n en fonction de n et Calculer $\sin\frac{\pi}{16}$.

EXERCICE 9 :

Soit f la fonction définie sur [0, 1] par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \in]0,1]. \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1°/ Montrer que la fonction f est strictement croissante sur [0,1].

2°/ On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1. \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ \forall\ n \in \mathrm{IN}. \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}$ on a : $u_n = \dfrac{2\,u_{n+1}}{1-u_{n+1}^2}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

3°/a) Vérifier que pour tout réel $x \in]0,1]$ on a $f(x) \leq \dfrac{1}{2}x$.

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathrm{IN}$ on a : $u_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

4°/ Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}$ on a : $u_n = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

5°/ On pose pour tout $n \in \mathrm{IN}$ on a $v_n = \dfrac{2^{n+3}\,u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$ et $w_n = 2^{n+2}\,u_n$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$ on a : $w_n - v_n = \dfrac{2^{n+4}\,u_{n+1}^3}{1-u_{n+1}^4}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathrm{IN}$ on a : $0 < w_n - v_n \leq \dfrac{1}{2^{2n-1}}$.

c) En déduire que la suite (t_n) définie sur IN par $t_n = w_n - v_n$ est convergente et calculer sa limite.

d) Montrer que (w_n) est décroissante et en déduire que (w_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite que l'on note ℓ.

e) Montrer que $\ell = \pi$.

CORRECTION

EXERCICE 1 :

Pour n $\in$ IN on a $u_n = \dfrac{2n+1}{3^n}$.

1°/a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+3}{3^{n+1}} - \dfrac{2n+1}{3^n} = \dfrac{-4n}{3^{n+1}} < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

donc la suite (u_n) est une suite décroissante.

De plus $\forall n \in$ IN on a $u_n \geq 0$ alors la suite (u_n) est minorée donc elle est convergente. Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

b) • $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{3} u_{n+1} = \dfrac{2}{3^{n+2}}$ et $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{3} u_n = \dfrac{2}{3^{n+1}}$

donc $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison

$q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{3}$.

On a alors $\forall n \in IN$ on a : $v_n = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^n$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car la raison de la suite (v_n) est $q = \frac{1}{3} \in]-1,1[$.

2°/ $n \geq 2$ et $S_n = 1 + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + ... + \frac{2n+1}{3^n} = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k = v_1 \frac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{9} . \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^{n-1}}) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3^{n-1}})$.

b) On a $v_k = u_{k+1} - \frac{1}{3} u_k$; $\forall k \in IN$.

D'ou $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \frac{1}{3} \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_k = \sum\limits_{k=2}^{n} u_k - \frac{1}{3}(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k - u_n)$

donc $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k = - u_1 + S_n - \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3} u_n$.

$\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k = - u_1 + \frac{2}{3} S_n + \frac{1}{3} u_n$. donc : $\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3^{n-1}}) = -1 + \frac{1}{3} u_n + \frac{2}{3} S_n$ alors $2S_n = 4 - \frac{1}{3^{n-1}} - u_n$

et par suite $S_n = 2 - \frac{1}{2\ 3^{n-1}} - \frac{1}{2} u_n$.

3°/ On a : $n \in IN$ et $a_n = (2n+1)(tgx)^n$ avec $x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

a) Pour $x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ on a $tg\ x > 1$ alors $(tg\ x)^n > 1$ et donc

$a_n > 2n + 1$ cela signifie d'après le théorème de comparaison des limites que

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) $x = \frac{\pi}{4}$ alors $a_n = 2n+1$; (suite arithmétique) et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1}\sum\limits_{k=0}^{n} 2k+1 = \frac{1}{n^2+1}\frac{n+1}{2}(1+2n+1) = \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$.

EXERCICE 2 :

On a : $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_n = \frac{n+1}{2n} u_n$.

1°/ $u_2 = \frac{3}{4} u_1 = \frac{3}{8}$; $u_3 = \frac{4}{6} u_2 = \frac{1}{4}$ et $u_4 = \frac{5}{8} u_3 = \frac{5}{32}$.

2°/a) • Montrons par recurrence que $\forall\, n \in IN^*$ on a : $u_{n+1} \geq 0$

$*$ pour $n = 1$ on a : $u_2 = \frac{3}{8} > 0$.

$*$ Soit $n \in IN^*$; Supposons qu'on a : $u_{n+1} \geq 0$ et montrons que $u_{n+2} \geq 0$

On a : $u_{n+2} = \frac{n+3}{2n+2} u_{n+1}$ et $u_{n+1} \geq 0$ et $\frac{n+3}{2n+2} \geq 0$

D'ou $\forall\, n \in IN^*$ on a : $0 \leq u_{n+1}$.

• Montrons que $\forall\, n \in IN$ on a : $u_{n+1} \leq u_n$. puisque $n \geq 1$ donc $u_{n+2} \geq 0$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n} u_n - u_n = \frac{1-n}{2n} u_n$

or $\in IN^*$ alors $1 - n \leq 0$ et de plus $u_n \geq 0$

donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ d'ou $u_{n+1} \leq u_n$.

Conclusion : $\forall\, n \in IN^*$ on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

c) D'après a) on a (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente .

On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ donc $\ell = \frac{1}{2}\ell$; car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

donc $\ell = 0$.

3°/ $v_n = \frac{u_n}{n}$ $\forall n \geq 1$.

a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1} = \frac{1}{2}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{2}$.

On a donc $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2^n}$ $\forall n \geq 1$. On a (v_n) est une suite géométrique de raison q = $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) On a $v_n = \frac{u_n}{n}$ donc $u_n = n\, v_n$ d'ou $u_n = \frac{n}{2^n}$; pour tout $n \geq 1$.

EXERCICE 3 :

Pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$ on a : $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

1°/a) Montrons que $\forall n \in \mathrm{IN}$ on a : $0 < u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- On a : $\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2(2n+1)} < 0$ alors $(\frac{n}{2n+1})^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- D'autre part on a : $\forall n \in \mathrm{IN}^*$; $\frac{n}{2n+1} > 0$ donc $(\frac{n}{2n+1})^n > 0$ d'ou $u_n > 0$

Conclusion : $\forall n \in \mathrm{IN}$ on a : $0 < u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) D'après le théorème de comparaison de limites on a : $0 < \lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car ($\left(\frac{1}{2}\right)^n$) est une suite géomètrique

de raison $q=\frac{1}{2}\in\,]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2°/ On a $\forall n\in IN^*$; $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

- Montrons que (v_n) est croissante :

$v_{n+1} - v_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} > 0$ donc la suite (v_n) est une suite croissante.

$\forall k\in IN^*$: $u_k < \left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \le \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \le 1$ d'ou $v_n \le 1$; Cela

signifie que la suite (v_n) est majorée par 1.

Conclusion :

la suite (v_n) est majorée par 1 et est croissante, donc la suite (v_n) est convergente

EXERCICE 4 :

On a : (u_n) est croissante et pour tout $n \in IN$ on a : $u_n \ge 2$.

1°/ On a $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_0\, u_1 \ldots u_k}$.

a) Montrons que pour tout $n \in IN$ on a :

b) $V_n \le \frac{1}{u_0} + \frac{1}{2\, u_0} + \frac{1}{2^2\, u_0} + \ldots + \frac{1}{2^n u_0}$.

On a pour tout $k \in IN$: (u_k) est croissante donc pour tout $k \in IN$ on a :

$u_k \ge u_0$ de plus pour tout $k \in IN$ on a : $u_k \ge 2$;

Alors $u_0 . u_1 \dots u_k \geq 2^k u_0$

et par suite $\frac{1}{u_0 . u_1 . \dots u_k} \leq \frac{1}{2^k u_0}$ d'ou $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k u_0}$.

donc $V_n \leq \frac{1}{u_0} + \frac{1}{2 u_0} + \frac{1}{2^2 u_0} + \dots + \frac{1}{2^n u_0}$.

b) Montrons que la suite (V_n) est majorée :

On a $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k u_0} = \frac{1}{u_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{u_0} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{u_0}(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}) \leq \frac{2}{u_0}$

d'ou : $V_n \leq \frac{2}{u_0}$; $\forall n \in IN$, d'ou la suite (V_n) est majorée .

2°/Soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} V_n$. Montrons que $\ell \in [0,1]$.

On a pour tout $n \in IN$ on a : $u_n \geq 2$ donc :

$\forall k \geq 0$ on a $\frac{1}{u_k} \geq 0$ et donc $V_n \geq 0$ d'ou $\ell \geq 0$

De plus on a $V_n \leq \frac{2}{u_0}$; $\forall n \in IN$ donc $V_n \leq \frac{2}{u_0} \leq 1$; $\forall n \in IN$

d'ou $\ell \leq 1$. **Conclusion :** $\ell \in [0,1]$.

EXERCICE 5 :

1°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in IN$ on a : $u_n \geq 1$.

- Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 > 1$
- Soit $n \in IN$, On suppose que : $u_n \geq 1$ et montrons que $u_{n+1} \geq 1$.

$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^3 + 3 u_n}{3 u_n^2 + 1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^3}{3 u_n^2 + 1}$ or $u_n \geq 1$ donc $u_n - 1 \geq 0$ d'ou : $u_{n+1} - 1 \geq 0$;

donc $u_{n+1} \geq 1$

Conclusion : $\forall n \in IN$ on a : $u_n \geq 1$.

b) Montrons que la suite (u_n) est décroissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^3 + 3u_n}{3u_n^2 + 1} - u_n = \frac{-2u_n(u_n^2 - 1)}{3u_n^2 + 1} = \frac{-2u_n(u_n - 1)(u_n + 1)}{3u_n^2 + 1}.$$

Or $u_n - 1 \geq 0$ et $3u_n^2 + 1 > 0$ $\forall n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

2°/ Pour tout n $\in IN$ on a : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{u_n^3 + 3u_n}{3u_n^2 + 1} - 1}{\dfrac{u_n^3 + 3u_n}{3u_n^2 + 1} - 1} = \frac{u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n - 1}{u_n^3 + 3u_n^2 + 3u_n + 1} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)^3 = (v_n)^3$$

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in IN$ on a $v_n = (v_0)^{3^n}$.

- pour $n = 0$; on a : $(v_0)^{3^0} = (v_0)^1 = v_0$.

- Soit $n \in IN$; On suppose que : $v_n = (v_0)^{3^n}$ et montrons que $v_{n+1} = (v_0)^{3^{n+1}}$.

$\forall n \in IN$ on a : $v_{n+1} = (v_n)^3 = \left(\left[v_0\right]^{3^n}\right)^3 = (v_0)^{3^n \times 3} = (v_0)^{3^{n+1}}$

Conclusion : $\forall n \in IN$ on a : $v_n = (v_0)^{3^n}$.

c) On pose : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \to \dfrac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$; f est continue pour $x \geq 1$

donc $f(\ell) = \ell$

D'ou $\ell^3 + 3\ell = 3\ell^3 + 1$ alors $2\ell^3 - 2\ell = 0$

alors : ℓ = o ou ℓ = 1 ou ℓ = - 1. Or on a : $u_n \geq 1$ donc $\ell = 1$.

On a finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = 0.$

3°/a) Montrons par récurrence que $\forall\, n \in IN$ on a : $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}$.

• Pour $n = 0$ on a $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^0} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x\,0} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$ d'ou $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^0} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3x\,0}$.

• On suppose qu'on a $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}$ et montrons qu'on a $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n+1}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3(n+1)}$ On

a $\forall\, n \in IN$ on a : $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}$ alors $\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}.\frac{1}{3}$

d'ou $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3n+1}$ or on a : $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n+1}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n+1}$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^{3n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3(n+1)}$ donc $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n+1}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3(n+1)}$.

Conclusion : $\forall\, n \in IN$ on a : $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}$.

b) Pour tout n $\in IN$ on a : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

$S_{n+1} - S_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} v_k - \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = v_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \geq 0$ alors (S_n) est croissante.

c) Montrons que $\forall\, n \in IN$ on a : $\frac{1}{3} \leq S_n \leq 2\left(1 - \frac{1}{3^{3(n+1)}}\right)$.

• (S_n) est croissante donc pour tout $n \in IN$ on a $S_0 \leq S_n$ or $S_0 = \frac{1}{3}$ d'ou $\frac{1}{3} \leq S_n$.

• D'autre part on a : $\forall\, k \geq 0$ on a $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^k} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3k}$ signifie $v_k \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3k}$

d'ou $S_n \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{3k}$; Or $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{3k}$ est la somme de (n+1) terme d'une suite géométrique de raison q= $\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$ et de premier terme 1 donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{3k} = \frac{1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}}{1-\frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26}.\left(1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right) \leq 2\left(1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right)$$

donc $S_n \leq 2\left(1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right)$ et en conclusion : $\forall n \in IN : \frac{1}{3} \leq S_n \leq 2\left(1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right)$.

d) On a (S_n) est croissante et est majorée car

$\forall n \in IN$ on a : $S_n \leq 2\left(1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right) \leq 2$. Donc elle est convergente .

D'après le théorème de comparaison des limites on a :

$\frac{1}{3} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right)$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right) = 2$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{3(n+1)}} = 0$ (suite géometrique de raison $q=\frac{1}{27} \in]-1,1[$)

On a donc $\frac{1}{3} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \leq 2$ alors la limite de (S_n) appartient à $[\frac{1}{3},2]$.

<u>EXERCICE 6 :</u>

1°/Pour n = 0 ; $u_0 = 1$ donc $u_1 = 2 + u_0 - \sqrt{3+u_0^2} = u_0$ et donc $\forall n \in IN$ on a : $u_n = u_0$.

La suite (u_n) est donc constante.

2°/ On a $u_0 \in [0,1[$.

a) Montrons que $\forall n \in IN$ on a : $u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n + \sqrt{3+u_n^2}}$.

$$u_{n+1} = 2 + u_n - \sqrt{3+u_n^2} = 2 + \frac{\left(u_n - \sqrt{3+u_n^2}\right)\left(u_n + \sqrt{3+u_n^2}\right)}{u_n + \sqrt{3+u_n^2}}$$

$$= 2 + \frac{u_n^2 - (3+u_n^2)}{u_n + \sqrt{3+u_n^2}}$$ D'ou $u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n + \sqrt{3+u_n^2}} \quad \forall n \in IN.$

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in IN$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

• Pour $n = 0$ on a $u_0 \in [0{,}1[$ donc on a : $0 \leq u_0 \leq 1$.

Soit $n \in IN$; supposos que : $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

On a : $\forall n \in IN$ on a : $0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq 3 + u_n^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{3+u_n^2} \leq 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \leq u_n + \sqrt{3+u_n^2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n + \sqrt{3+u_n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq \frac{-3}{u_n + \sqrt{3+u_n^2}} \leq -1$$

$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} \leq 2 + \dfrac{-3}{u_n + \sqrt{3+u_n^2}} \leq 1$ d'ou $0 \leq 2 - \sqrt{3} \leq 2 + \dfrac{-3}{u_n + \sqrt{3+u_n^2}} \leq 1$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

Conclusion : $\forall n \in IN$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

c) On a : $u_{n+1} - u_n = 2 - \sqrt{3+u_n^2} = \dfrac{4 - (3+u_n^2)}{2 + \sqrt{3+u_n^2}} = \dfrac{1 - u_n^2}{2 + \sqrt{3+u_n^2}} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{2 + \sqrt{3+u_n^2}}$

et $2 + \sqrt{3+u_n^2} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Or : $u_n \leq 1$ alors $1 - u_n \geq 0$; $1 + u_n \geq 2 > 0$

Cela signifie que la suite (u_n) est croissante.

D'ou : la suite (u_n) est croissante et est majorée donc elle est convergente.

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto 2 + x - \sqrt{3+x^2}$;

f est continue sur [0,1] , d'ou f(l) = l

$\Leftrightarrow l = 1$ ou $l = -1$ or on a $\forall n \in IN$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$ donc d'aprés le théorème de comparaison des limites on a : $0 \leq \ell \leq 1$ donc $\ell = 1$

3°/a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le 1 - u_{n+1} \le (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n)$.

• On a $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le u_n \le 1$ donc $0 \le u_{n+1} \le 1$ d'ou $1 - u_{n+1} \ge 0$.

• D'autre part on a : $1 - u_{n+1} = -1 - u_n + \sqrt{3 + u_n^2} = \dfrac{2(1 - u_n)}{(1 + u_n) + \sqrt{3 + u_n^2}}$

Or on a : $1 + \sqrt{3} \le (1 + u_n) + \sqrt{3 + u_n^2} \le 4 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{2}{(1 + u_n) + \sqrt{3 + u_n^2}} \le \dfrac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$

donc : $1 - u_{n+1} \le (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le 1 - u_{n+1} \le (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n)$.

b) • Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le 1 - u_n \le (\sqrt{3} - 1)^n (1 - u_0)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le 1 - u_{n+1} \le (\sqrt{3} - 1)(1 - u_n)$.

D'ou : $0 \le 1 - u_1 \le (\sqrt{3} - 1)(1 - u_0)$.

$0 \le 1 - u_2 \le (\sqrt{3} - 1)(1 - u_1)$.

$\vdots$

$0 \le 1 - u_n \le (\sqrt{3} - 1)(1 - u_{n-1})$.

On multiplie membres a membres ces inégalités positives, on obtient :

$$0 \le (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)\dots(1 - u_n) \le (\sqrt{3} - 1)^n (1 - u_0)(1 - u_1)\dots(1 - u_{n-1})$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le 1 - u_n \le (\sqrt{3} - 1)^n (1 - u_0)$.

• On pose $X_n = (\sqrt{3} - 1)^n (1 - u_0)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

La suite (X_n) est géométrique de raison $q = \sqrt{3} - 1 \in]-1,1[$

d'ou $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = 0$.

Donc d'après le théorème de comparaison des limites on a :

$$0 \le \lim_{n \to +\infty} (1 - u_n) \le \lim_{n \to +\infty} X_n$$

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-u_n)=0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4°/ on a $S_n = \sum\limits_{k=o}^{n-1}\sqrt{3+u_k^2}$ et $T_n = u_n + S_n$; pour tout $n \in IN$.

a) On a : $T_{n+1} - T_n = u_{n+1} - u_n + S_{n+1} - S_n = 2$

D'ou la suite (T_n) est arithmétique de raison r = 2 donc

$T_n = T_0 + 2n$; $\forall n \in IN$.

Par suite $T_n = u_0 + \sqrt{3+u_0^2} + 2n$; $\forall n \in IN$ alors :

$S_n = u_0 + \sqrt{3+u_0^2} + 2n - u_n$

b) Pour tout $n \in IN$ on a : $\dfrac{S_n}{n+1} = \dfrac{u_0+\sqrt{3+u_0^2}}{n+1} + \dfrac{2n}{n+1} - \dfrac{u_n}{n+1}$.

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_0+\sqrt{3+u_0^2}}{n+1} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{n+1} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n+1} = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n+1} = 2$.

EXERCICE 7 :

On a pour tout n > 0 : $u_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

1°/ Montrons que la suite (u_n) est décroissante et minorée :

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{2^n} - \dfrac{n}{2^{n-1}} = \dfrac{1-n}{2^n}$; Or $n \geq 1$ alors $1-n \leq 0$.

donc $\dfrac{1-n}{2^n} \leq 0 \ \ \forall n > 0$; La suite (u_n) est donc décroissante.

- $\forall n \in IN^*$ on a : $\dfrac{n}{2^{n-1}} \geq 0$ d'ou $u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.

2°/ • Montrons que $\forall n \geq 1$ on a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2^n}$.

On a : $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^n} = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{n}{2^{n-}} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2^n}$ $\forall n \geq 1.$

• On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2^n}\right)$ d'ou $\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\div\infty}\frac{1}{2^n} = 0$

(car $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est une suite géomètrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1{,}1[$) donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3°/ $S_n = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$; pour tout $k \geq 1$.

• Montrons que $\forall n \geq 1$ on a : $S_n = -u_n + 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

On a $\forall\ k \geq 1$ on a : $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2^k}$ alors : $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{k+1} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$

D'où : $-u_1 + u_{n+1} + S_n = \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}S_n + 1 - \frac{1}{2^n}$

d'ou $\frac{1}{2}S_n = u_1 - u_{n+1} + 1 - \frac{1}{2^n}$

Or $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2^n}$ donc $\frac{1}{2}S_n = -\frac{1}{2}u_n + 2 - \frac{2}{2^n}$,

d'ou : $S_n = -u_n + 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-u_n + 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-u_n + 4 - \frac{4}{2^n}\right)$ or on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 4$.

4°/ $\forall n \geq 1$ et $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$ on a : $V_n = n(\sin x)^{n-1}$.

a) Montrons que $\forall n \geq 1$ on a : $V_n \leq u_n$.

On a $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$ donc $\sin x \leq \frac{1}{2}$ d'ou $(\sin x)^{n-1} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

d'ou $n(\sin x)^{n-1} \leq \frac{n}{2^{n-1}}$ alors $V_n \leq u_n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\forall\, n \geq 1$ on a $V_n > 0$ donc d'après le théorème de comparaison des limites on

a : $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} V_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

b) Montrons que pour tout $n \geq 1$ on a $V_{n+1} = (\sin x)\, V_n + (\sin x)^n$.

$V_{n+1} = (n+1)(\sin x)^n = n(\sin x)^n + (\sin x)^n = \sin x . n(\sin x)^{n-1} + (\sin x)^n = \sin x\, V_n + (\sin x)^n$

c) $T_n = 1 + 2 \sin x + 3 (\sin x)^2 + ...+ n (\sin x)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} V_k$; $\forall\, n \geq 1$.

• Montrons que $\forall\, n \geq 1$ on a : $T_n (1 - \sin x) = \dfrac{1 - (\sin x)^n}{1 - \sin x} - (\sin x)\, V_n$.

On a : $V_{n+1} = (\sin x)^n + V_n . \sin x$ pour tout $n > 0$ et x $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$;

$$\text{Alors}: \sum_{k=1}^{n} V_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (\sin x)^k + (\sin x) \sum_{k=1}^{n} V_k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n+1} V_k = \sin x \frac{1 - (\sin x)^n}{1 - \sin x} + (\sin x)\, T_n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} V_k - V_1 + V_{n+1} = \sin x \frac{1 - (\sin x)^n}{1 - \sin x} + (\sin x)\, T_n$$

$$\Leftrightarrow T_n - V_1 + V_{n+1} = \sin x \frac{1 - (\sin x)^n}{1 - \sin x} + (\sin x)\, T_n$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\, T_n = \sin x \frac{1 - (\sin x)^n}{1 - \sin x} + V_1 - V_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\, T_n = \sin x \frac{1 - (\sin x)^n}{1 - \sin x} + 1 - V_n . \sin x - (\sin x)^n$$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)\,T_n = [1+\dfrac{\sin x}{1-\sin x}](1-\sin^n x) - V_n\ .\sin x$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)\,T_n = \dfrac{1-\sin^n x}{1-\sin x} - V_n\,.\sin x$

D'ou on a : $\forall\, n \geq 1$ on a : $T_n\,(1-\sin x) = \dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x} - (\sin x)\,V_n$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(T_n\,(1-\sin x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x} - (\sin x)\,V_n$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin x)^n = 0$

car [$(\sin x)^n$] est une suite géométrique de raison

$q = \sin x \in]-1,1[$ piusque $x \in]0,\frac{\pi}{6}[$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(T_n\,(1-\sin x)\right) = \dfrac{1}{1-\sin x}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{1}{(1-\sin x)^2}$

EXERCICE 8 :

1°/ $u_3 = \forall\, n \geq 0$ on a : $0 < w_n - v_n \leq \dfrac{1}{2^{2n-1}}$ . .

et $u_5 = \dfrac{\sqrt{2-2\sqrt{1-u_4^2}}}{2} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

2°/ Montrons par récurrence que $\forall\, n \geq 2$ on a : $u_{n+1} \leq u_n$.

• Pour $n = 2$ on a : $u_2 = 1$ et $u_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}57$ d'ou $u_3 \leq u_2$.

• On suppose que $\forall\, n \geq 2$ on a : $u_{n+1} \leq u_n$ et montrons que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$u_{n+1} \leq u_n$ alors $u_{n+1}^2 \leq u_n^2$ alors $1-u_{n+1}^2 \geq 1-u_n^2$

alors $\sqrt{2-2\sqrt{1-u_{n+1}^2}} \leq \sqrt{2-2\sqrt{1-u_n^2}}$

alors $\dfrac{\sqrt{2-2\sqrt{1-u_{n+1}^2}}}{2} \leq \dfrac{\sqrt{2-2\sqrt{1-u_n^2}}}{2}$ d'ou $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

Conclusion : $\forall\, n \geq 2$ on a : $u_{n+1} \leq u_n$.

3°/ $u_n = \sin\, v_n$; pour $n \geq 2$.

a) $u_n = \sin v_n$ donc $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2 v_n}}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2(1-\cos v_n)}}{2} = \frac{\sqrt{2\,(2\sin^2\frac{v_n}{2})}}{2} = \sin\frac{v_n}{2}$$

d'ou : $\sin v_{n+1} = \sin \dfrac{v_n}{2}$ or $u_n \in]0,1[$ donc $v_n \in]0,\dfrac{\pi}{2}[$ donc : $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, v_n$.

(v_n) est donc géométrique de raison

$q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

b) On a donc : $v_n = \dfrac{\pi}{2^{n-1}}\ \forall\, n \geq 2$ alors : $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n-1}}\right)\ \forall\, n \geq 2$.

Pour n = 5 on a : $\sin\dfrac{\pi}{16} = u_5 = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$.

EXERCICE 9 :

1°/ La fonction f est dérivable sur [0,1] et on a :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}} - (\sqrt{x^2+1}-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} > 0 \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Donc f est strictement croissante sur [0,1] .

2°/a) Montrons que $u_n = \dfrac{2\,u_{n+1}}{1-u_{n+1}^2}$ pour tout n ≥ 0.

On a : $u_{n+1} = f(u_n) = \; = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}\;+1}$

On a : $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{\sqrt{u_n^2+1}\;-1}{u_n} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}\;+1}$.

On a donc $u_{n+1}\left(\sqrt{u_n^2+1}\;+1\right) = u_n$ alors $u_{n+1}\sqrt{u_n^2+1} = u_n \;- u_{n+1}$

$\Rightarrow\; u_{n+1}^2\,(u_n^2+1) = u_n^2 + u_{n+1}^2 - 2\,u_n u_{n+1} \;\Rightarrow\; u_n^2\,(1-u_{n+1}^2) = 2\,u_n\,u_{n+1} \;\Rightarrow\; u_n = \dfrac{2\,u_{n+1}}{1-u_{n+1}^2}\;;\forall\, n \geq 0.$

b) Montrons par récurrence que $\forall\, n \geq 0$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

• Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1 \in [0,1]$.

• On suppose que $\forall\, n \geq 0$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ et f croissante sur [0,1] donc : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

$\Rightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}-1 \leq 1$ D'ou $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Conclusion : $\forall\, n \geq 0$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

3°/a) Vérifions que $\forall\, x \in [0,1]$ on a : $f(x) \leq \dfrac{1}{2}x$.

On a $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\;+1}$; Or $\forall\, x \in [0,1]$ on a : $x^2+1 \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+1 \geq 2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\;+1} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\;+1} \leq \dfrac{1}{2}x$ donc $f(x) \leq \dfrac{1}{2}x \;\; \forall\, x \in [0,1]$.

b) On prend x = u_n (car $u_n \in [0,1]$) on obtient $f(u_n) \leq \dfrac{1}{2}u_n$, d'ou $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n \;\forall\, n \geq 0$

On a donc : $u_1 \leq \dfrac{1}{2}u_0$

$$u_2 \leq \frac{1}{2}u_1$$

$$\vdots$$

$$u_n \leq \frac{1}{2}u_{n-1}$$

On multiplie membre a membre ces inégalités positives et après simplification on obtient : $u_n \leq \frac{1}{2^n} u_0$ donc : $u_n \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$.

c) On a : $u_n \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$, de plus on a $\forall n \geq 0$ on a : $0 \leq u_n$;

Donc :

d'aprés théorème de comparaison des limites on a : $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ car $(\frac{1}{2^n})$ est une suite géomètrique de raison $q = \frac{1}{2}$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in IN$ on a : $u_n = tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})$.

• Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 = tg(\frac{\pi}{4})$.

• On suppos pour $n \geq 0$ on a : $u_n = tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})$ et montrons que $u_{n+1} = tg(\frac{\pi}{2^{n+3}})$.

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{\sqrt{1 + tg^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})} + 1} = \frac{tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})} + 1}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}}{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})}} = \frac{\sin 2\frac{\pi}{2^{n+3}}}{2\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+3}})} \text{ donc } u_{n+1} = \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+3}}} = tg(\frac{\pi}{2^{n+3}}).$$

Conclusion : $\forall n \in IN$ on a : $u_n = tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})$.

5°/ $v_n = \frac{2^{n+3} u_{n+1}}{1 + u_n^2}$ et $w_n = 2^{n+2} u_n$ $\forall n \geq 0$.

a) Montrons que : $\forall n \geq 0$ on a : $w_n - v_n = \dfrac{2^{n+4}\ u_{n+1}^3}{1 - u_{n+1}^4}$

$$w_n - v_n = 2^{n+2}\, u_n - \frac{2^{n+3}\, u_{n+1}}{1+u_n^2} = \frac{2^{n+2}\ 2\ u_{n+1}}{1-u_{n+1}^2} - \frac{2^{n+3}\, u_{n+1}}{1+u_n^2}$$

Donc $w_n - v_n = \dfrac{2^{n+3}\, u_{n+1}\,(1+u_{n+1}^2 - 1 + u_{n+1}^2\ )}{1-u_{n+1}^4} = \dfrac{2^{n+3}\, u_{n+1}}{1-u_{n+1}^4}$

D'ou : $\forall n \geq 0$ on a : $w_n - v_n = \dfrac{2^{n+4}\ u_{n+1}^3}{1-u_{n+1}^4}$.

b) Montrons que $\forall n \geq 0$ on a : $0 < w_n - v_n \leq \dfrac{1}{2^{2n-1}}$.

On a tout d'abord $w_n - v_n > 0$ $\forall n \geq 0$ $w_n - v_n = \dfrac{2^{n+4}\ u_{n+1}^3}{1-u_{n+1}^4}$; Or $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^n}$ Donc

$$\frac{1}{1-u_{n+1}^4} \leq 1 \Rightarrow \frac{2^{n+4}\ u_{n+1}^3}{1-u_{n+1}^4} \leq \frac{2^{n+4}}{1-u_{n+1}^4}\,\frac{1}{2^{3n+3}} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

alors $u_{n+1}^4 \leq \dfrac{1}{2^{4n}} \Rightarrow 1 - u_{n+1}^4 \geq 1 - \dfrac{1}{2^{4n}} \geq 1$ et en fin on a : $\forall n \geq 0$ on a : $0 < w_n - v_n \leq \dfrac{1}{2^{2n-1}}$.

c) $t_n = w_n - v_n$. D'après le théorème de comparaison des limites

on a :

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{2n-1}} = 0$ car $(\dfrac{1}{2^{2n-1}})$ est une suite géomètrique de raison $\dfrac{1}{4}$,

donc : $0 < \lim\limits_{n\to+\infty} t_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{2n-1}}$; et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

d) $w_{n+1} - w_n = 2^{n+2}\,(\ 2\ u_{n+1} - u_n\ )$ or on a :

$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ alors $2\, u_{n+1} - u_n \leq 0$

Donc $w_{n+1} - w_n \leq 0$ et par suite (w_n) est décroissante.

Or on a :

$w_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$ donc (w_n) est minorée d'ou elle est convergente .

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n$. On a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{,n \to +\infty} v_n = \ell$

D'ou les suite (w_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limites ℓ.

e) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n+2}\, tg(\frac{\pi}{2^{n+2}}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \pi . \dfrac{tg\,(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}$.

On pose $X = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ et on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} X = 0$ d'ou $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \pi \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x}{x} = \pi$;

car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x}{x} = 1$; Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell = \pi$.