A. Barycentre

I- Barycentre de deux points pondérés

I. 1. Définition 1:

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$, Il existe un point unique G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; le point G est appelé barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).On note $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$

I. 2. Propriétés :

Propriété 1 :

Le barycentre G de $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$ est le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.

Démonstration :

L'égalité vectorielle $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ équivaut à :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \beta\overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB} \text{ (car } \alpha + \beta \neq 0)$$

Propriété 2 :

Si G est le barycentre de $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$ alors pour tout réel k non nul G est aussi le barycentre de $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline k\alpha & k\beta \\ \hline\end{array}$

Démonstration :

Si G est le barycentre de (A, α), (B, β), on peut écrire $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. En multipliant par k non nul, il vient $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, avec $k\alpha + k\beta \neq 0$, ce qui prouve que G est aussi barycentre de $(A, k\alpha)$, $(B, k\beta)$.

- *Conséquence* :

Si on a $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \alpha \\ \hline\end{array}$ avec $\alpha \neq 0$, alors on aura $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$.

Ce point s'appelle l'isobarycentre des points A et B ou tout simplement le milieu de A et B.

Propriété 3 :

La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.
La projection conserve le barycentre

Propriété 4 : *(Propriété caractéristique)*

$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow$ pour tout point M du plan $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

Propriété 5: La projection conserve le barycentre

I. 3. Construction :

1.3. 1. Méthode de l'abscisse :

$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, d'où G est le point de la droite (AB) d'abscisse $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB}\right)$.

Exemple1 : Soit $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, d'où la construction du point G

Méthode du parallélogramme :

Soit $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$ où α et β sont des réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$

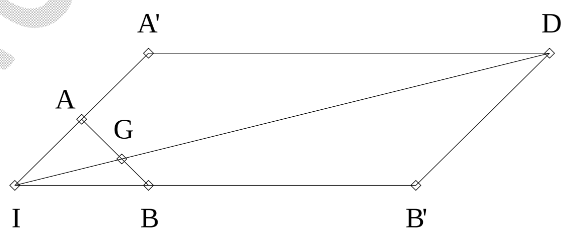
Dans cette méthode on définit les points A' et B' tels que $\overrightarrow{IA'} = \alpha\,\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB'} = \beta\,\overrightarrow{IB}$, I étant un point quelconque du plan, non aligné avec A et B.
D'après la propriété 4 on a $\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{IG}$.

Notons M le point du plan tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$ ($IA'MB'$ est alors un parallélogramme), on a alors que $\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\overrightarrow{IM}$ d'où G est un point de la droite (IM) . D'autre part G est un point de la droite (AB).
On en déduit donc que G est le point d'intersection des droites (AB) et (IM) .

Exemple 2 :

Soit $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$. Dans cette méthode on se base sur la relation $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = 5\overrightarrow{IG}$.

Soient A' et B' tels que $\overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB'} = 3\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$, d'où $\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = 5\overrightarrow{IG}$,G est alors le point d'intersection des droites (ID) et (AB).



1.3. 2. Coordonnées du barycentre :

Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, notons (x_A, x_B) les coordonnées du point A et (y_A, y_B) celles de B. Les coordonnées du point $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$ sont (X_G, Y_G) définies par

$$X_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad Y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}$$

II. Barycentre de trois points

II. 2. 1. Définition :

Soit (A, α) ; (B, β) et (C, γ) trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$,il existe un point unique G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ le point G est appelé **barycentre** des trois points pondérés (A, α) ; (B, β) et (C, γ).

II. 2. 2. Propriétés

- **Propriété 5 : (Propriété caractéristique)**

$$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \forall M \in P: \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$$

Démonstration :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} + \left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}\right)$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} \quad \left(\text{car } \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}\right)$$

- **Conséquence** Si $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array}$ alors on a : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$

-**Propriété 6 :** Le barycentre de trois points non alignés de l'espace appartiennent au plan définit par ces trois points

- **Propriété 7** :

Si G est le barycentre de $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array}$ alors pour tout réel k non nul G est aussi le barycentre de $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline k\alpha & k\beta & k\gamma \\ \hline\end{array}$

- ***Conséquence :*** Si on a $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline\end{array}$ avec $\alpha \neq 0$, alors on aura $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$

. Ce point s'appelle l'isobarycentre des points A, B et C.

- **Propriété 8** : L'isobarycentre de trois points non alignés A, B, C est le centre de gravité du triangle ABC
- **Propriété 9:** La projection conserve le barycentre

II. 2. 3. Barycentre partiel

Théorème :

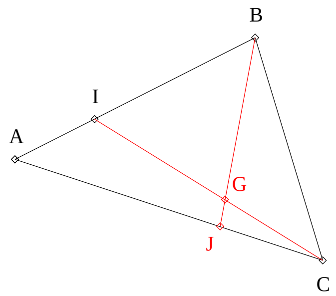
On ne change pas le barycentre de trois points pondérés en remplaçant deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux coefficients.

Exemple :

Soit $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 1 & 4 \\ \hline\end{array}$ Notons $I = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array}$ et $J = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}$

Le théorème du barycentre partiel nous montre que : $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline I & C \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$ et encore

$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline J & B \\ \hline 6 & 1 \\ \hline\end{array}$



II. 2. 4. Coordonnées du barycentre :

Soient A, B, C trois points non alignés et $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array}$

La relation $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ montre que G est de coordonnées $\left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

II. 2. 5. Barycentre et aire

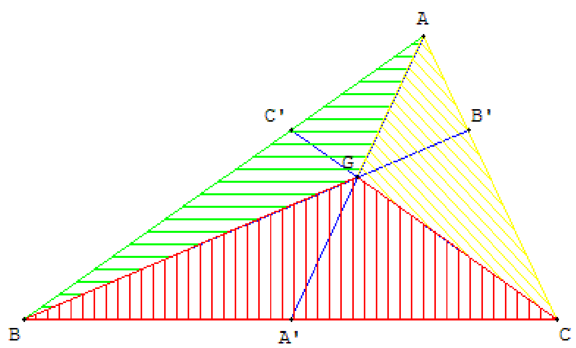
Théorème :

Tout point G situé à l'intérieur d'un triangle ABC peut être défini comme le barycentre de :

$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \text{Aire(BCG)} & \text{Aire(ACG)} & \text{Aire(ABG)} \\ \hline\end{array}$

Démonstration :

Soit G est un point à l'intérieur d'un triangle ABC, on nomme A’ le point d'intersection de (AG) et de (BC), B’ le point d'intersection de (BG) et de (AC).
Le théorème du chevron permet de montrer que le barycentre partiel de [B, *Aire*(ACG)] ; [C, *Aire*(ABG)] est aussi celui de [B, CA’] ; [C, BA’], qui est A’
Le même théorème montre que le barycentre partiel de [A, *Aire*(BCG)] ; [C, *Aire*(ABG)], est aussi celui de [A, CB’] ; [C, AB’], qui est B’.
Par associativité, le barycentre de [A, *Aire*(BCG)] ; [B, *Aire*(ACG)] ; [C, *Aire*(ABG)] est situé à l'intersection des droites (AA’) et (BB’) : c'est donc le point G.
Ce résultat se généralise au cas où le point G est extérieur au triangle ABC en comptant négativement les aires entièrement extérieures au triangle ABC.



B. Produit Scalaire

Notation : le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (c'est un nombre réel)

I- Produit scalaire dans le plan :

1. Expressions :

Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
Supposons alors que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls

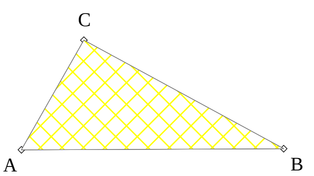
Avec l'angle	Avec la projection	*Avec les coordonnées*
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\\|\vec{u}\\|\\|\vec{v}\\|\cos(\vec{u},\vec{v})$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overline{AB}\times\overline{AH}$ *H étant le projeté orthogonal de C sur (AB)*	*Dans un repère orthonormé, si* $\vec{u}(x,y)$ *et* $\vec{v}(x',y')$ *alors* $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

2. Propriétés :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})=\alpha\ \vec{u}\cdot\vec{v}$ $\vec{u}\cdot\vec{u}=\\|\vec{u}\\|^2$	$\\|\vec{u}+\vec{v}\\|^2=\\|\vec{u}\\|^2+\\|\vec{v}\\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$ $\\|\vec{u}-\vec{v}\\|^2=\\|\vec{u}\\|^2+\\|\vec{v}\\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$ $\\|\vec{u}\\|^2-\\|\vec{v}\\|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$	Soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ on a : $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$ $\\|\vec{u}\\|=\sqrt{x^2+y^2}$ Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire alors le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$

3. Applications :

a) Relations métriques :



Notons
a = BC
b = CA
c = AB

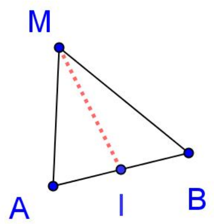
Aire (ABC) : $S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

Formules du sinus: $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$

b) *Théorèmes de la médiane:*

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ $\quad MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$ $\quad MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$



c) ***Distance* d'un point A à une droite D :**

C'est la valeur minimale de la distance AM lorsque M décrit D. Alors d(A,D) = AH, où H est le projeté orthogonal de A sur D. Si D est d'équation ax + by + c = 0 alors

$d(A,D)=\frac{|ax_o+by_o+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, où (x_o,y_o) sont les coordonnées de A.

Conséquence : soit C le cercle de centre A, de rayon R et D une droite

d(A,D) < R	d(A,D) = R	d(A,D) > R
C et D sont sécant	C et D sont tangent	C et D sont disjoint

II- Produit scalaire dans l'espace :

1. ***Définitions :*** On appelle angle des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'angle géométrique $\widehat{AOB}$, où O est un point quelconque de l'espace et A et B les points définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

Définition : Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, lorsque les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls on a :

✓ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

✓ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$, H étant le projeté orthogonal de B sur (OA)

✓ Dans une base orthonormé on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$, où $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$

2. Propriétés :

✓ Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan s'appliquent dans l'espace à des points et des vecteurs coplanaires.

✓ Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales ssi : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

✓ Un vecteur $\vec{u}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ ssi il est orthogonal à tout vecteur de ce plan ; c-à-d : $\forall M \in \mathcal{P}, \forall N \in \mathcal{P}$ on a $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN} = 0$, mais il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

3. Applications

a. Equation cartésienne d'un plan

L'équation du plan de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ et qui passe par le point $A(x_o, y_o, z_o)$ est

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$$

Réciproquement : L'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b, c trois réels non tous nuls, est un plan dont un vecteur normal est de coordonnées (a, b, c)

b. Equation cartésienne d'une sphère:

L'équation de la sphère de centre $A(x_o, y_o, z_o)$ et de rayon R est

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$$

c. Distance d'un point A à un plan P :

c'est la valeur minimale de la distance AM lorsque M décrit P. Alors d(A,P) = AH, où H est le projeté orthogonal de A sur P. Si P est d'équation ax + by + cz +d = 0 alors

$$d(A,P) = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$, où (x_o, y_o, z_o) sont les coordonnées de A.

Conséquence : soit S la sphère de centre A, de rayon R et P un plan

d(A,P) < R	d(A,P) = R	d(A,P) > R
S et P sont sécant	S et P sont tangent	S et P sont disjoint

d. Lignes et Surfaces de niveau :

l'ensemble E des points M tels que		dans le plan	dans l'espace
$\frac{MA}{MB} = k$ pour	$k = 1$	E est la médiatrice de [AB]	E est le plan médiateur de [AB]
	$\begin{cases} k > 0 \\ k \neq 1 \end{cases}$	E est le cercle de diamètre [IJ]	E est la sphère de diamètre [IJ]
		$I = \text{bar}\begin{array}{\|c\|c\|} A & B \\ 1 & k \end{array}$ et $J = \text{bar}\begin{array}{\|c\|c\|} A & B \\ 1 & -k \end{array}$	
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} = k$		E est une droite orthogonale à (AB)	E est un plan orthogonal à (AB)
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$		E est un cercle centré sur (AB)	E est une sphère centrée sur (AB)

C. Déterminant

a. Définition :Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ du plan, on appelle déterminant de $(\vec{u},\vec{v})$ le réel noté

$\det(\vec{u},\vec{v})$ défini par : $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-yx'$

Si $(\vec{i},\vec{j})$ est orthonormale directe alors :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{cases} 0 \text{ si l'un des vecteurs } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}) \text{ lorsque } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \end{cases}$$

b. Propriétés :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u},\vec{v})=0$
- L'aire d'un triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$
- L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à $\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$

D. Angles Orientés

1. Orientation du plan :

Orienter un cercle C, c'est choisir, sur C, l'un des sens de parcours.
Orienter le plan P, c'est choisir, sur tous les cercles du plan, le même sens de parcours.
Sens direct = sens trigonométrique = sens positif = sens contraire des aiguilles d'une montre.
Sens indirect = sens rétrograde = sens négatif = sens des aiguilles d'une montre.
Cercle trigonomètrique = cercle orienté dans le sens direct et dont le rayon est égal à 1.

2. *Angles orientés de vecteurs*

$(\vec{u},\vec{v})=\alpha[2\pi]$, signifie que α est une mesure en radian de l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et que toute autre mesure de cet angle s'écrit de la forme $\alpha+2k\pi$ où k est un entier,
($\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non nuls)
Une et une seule de ces mesures est comprise entre $-\pi$ et π, elle s'appelle la mesure principale de l'angle $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La valeur absolue de cette mesure est la mesure de l'angle géométrique des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Propriétés : soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs non nuls

✓ $\alpha=\beta[2\pi]\Leftrightarrow\beta-\alpha=2k\pi \;\; k\in\mathbb{Z}$ ✓ $\alpha=\beta[\pi]\Leftrightarrow\beta-\alpha=k\pi \; ; \;\; k\in\mathbb{Z}$ ✓ $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$ ✓ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}[\pi]$ ✓ Relation de Chasles : $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$	✓ $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v}) \;\; [\pi]=\begin{cases}(\vec{u},\vec{v}) \;\; [2\pi] \;\; \text{si } kk'>0 \\ (\vec{u},\vec{v})+\pi \;\; [2\pi] \;\; \text{si } kk'<0\end{cases}$ ✓ $(\vec{u},\vec{v})=\alpha[2\pi]\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=\alpha[\pi]$ ✓ $(\vec{u},\vec{v})=\alpha[\pi]\Leftrightarrow 2(\vec{u},\vec{v})=\alpha[2\pi]$ ✓ $(\vec{u},\vec{v})=\alpha[\pi]\Leftrightarrow(\vec{u},\vec{v})=\alpha[2\pi]$ ou $(\vec{u},\vec{v})=\alpha+\pi[2\pi]$

3. Angles de droites :

Deux droites D et D' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent deux angles orientés $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u},-\vec{v})$

Si α est une mesure de l'un de ces angles alors l'autre mesure serait α + π

D'où : $(D,D')=\alpha[\pi]$

4. Théorèmes usuels

Sot (C) un cercle de centre O , A et B deux points distincts de (C)

a. Théorème de l'angle inscrit :

Pour tout point M de (C), distinct de A et B on a : $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})[2\pi]$

b. Théorème de tangente :

Pour tout point T de la tangente à (C) en A, on a : $2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})[2\pi]$

c. Cocyclicité :

Quatre points distincts A, B, C, D, non alignés sont cocycliques ssi

$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[\pi]$ ce qui est équivalent à $\dfrac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\times\dfrac{z_D-z_A}{z_D-z_B}$ est réel

5. Ensemble des pts M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\alpha$

	au modulo π	au modulo 2π
$\alpha=0$	E est la droite (AB) privée de A et B	E est la droite (AB) privée du segment [AB]
$\alpha=\pi$		E est le segment [AB] privé de A et B
Pour α ≠ 0 [π], soit T un point du plan tel que $(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})=\alpha[2\pi]$	E est le cercle Γ passant par A et B (A et B n'appartenant pas à E) dont (AT) est la tangente en A	E est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (privé de A et B) du cercle contenu dans le demi – plan de frontière (AB) ne contenant pas les points T

E. Parallélisme et Orthogonalité dans l'Espace

1. Règles de base (ou axiomes) de la géométrie de l'espace :

- ☞ Par deux points distincts passe une et une seule droite
- ☞ Par trois points non alignés passe un plan et un seul
- ☞ Si A et B sont deux points du plan P alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P
- ☞ Si deux plans distincts ont un point commun alors leur intersection est une droite
- ☞ Tous les résultats de la géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace
- ☞ Un plan peut être déterminé par :
- – Un point et une droite ne passant pas par ce point
- – Deux droites sécantes
- – Trois points non alignés

2. Perspective cavalière :

☞Des droites sécantes sont représentées par des droites sécantes sur le dessin (mais deux droites sécantes sur le dessin ne signifie pas forcement qu'elles sont réellement sécantes)
☞Dans cette perspective on reflète le parallélisme, l'alignement et l'intersection
☞Les arêtes visibles sont représentées en traits continus, les arêtes cachées en pointillé
☞Tout ce qui est parallèle au plan frontal est représenté en grandeur réelle, par contre pour le reste les longueurs ne sont pas conservées mais les rapports de longueurs sont conservés

3. Représentations paramétriques :

a) d'une droite de l'espace :

Soit D une droite de l'espace, A et B deux points distincts de D. Dire qu'un point M de l'espace appartient à D signifie que :

point de vue vectoriel	*point de vue barycentrique*	*point de vue analytique*
$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ où k est un réel	$M = \text{bar}\begin{array}{\|c\|c\|}\hline A & B \\ \hline 1-k & k \\ \hline\end{array}$	Si M(x, y, z), $A(x_o, y_o, z_o)$ et $\overrightarrow{AB}(a, b, c)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors on a : $\begin{cases} x = x_o + ka \\ y = y_o + kb \\ z = z_o + kc \end{cases}$ Ce système est une représentation paramétrique de D dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

b) d'un plan :

Soit P un plan, A, B,C trois points non alignés de P. dire qu'un point M quelconque appartient à P signifie que :

point de vue vectoriel	*point de vue barycentrique*	*point de vue analytique*
$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$ où k et k' sont deux réels	$M = \text{bar}\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline A & B & C \\ \hline 1-k-k' & k & k' \\ \hline\end{array}$	Si M(x,y,z), $A(x_o, y_o, z_o)$, $\overrightarrow{AB}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{AC}(a', b', c')$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors on a : $\begin{cases} x = x_o + ka + k'a' \\ y = y_o + kb + k'b' \\ z = z_o + kc + k'c' \end{cases}$ Ce système est une (représentation paramétrique de P dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

4. Parallélisme dans l'espace

a. Position relative de deux plans

Deux plans peuvent être :
- Confondus
- Strictement Parallèles (ils n'ont aucun point commun)
- Sécants (leur intersection est une droite)

b. Position relative d'une droite et d'un plan

- ✍ Une droite peut être sécante à un plan (ils ont un seul point commun)
- ✍ Strictement parallèle au plan (ils n'ont aucun point commun)
- ✍ Contenue dans le plan

c. Position relative de deux droites de l'espace

Deux droites de l'espace peuvent être coplanaires (sécantes ou parallèles) ou non coplanaires
Deux droites strictement parallèles définissent un plan et un seul
Soit d une droite et A un point, il existe une unique droite parallèle à d et passant par A.

d. Propriétés du parallélisme

- ✍ Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle au moins à une droite de ce plan
- ✍ Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre
- ✍ Si deux plans sont parallèles alors toute droite qui coupe l'un coupe l'autre
- ✍ Si deux plans sont parallèles alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre
- ✍ Si deux droites sont parallèles alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre
- ✍ Si deux droites sont parallèles alors tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre
- ✍ Si deux plans sont parallèles alors toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre
- ✍ Si deux plans sont sécants(en une droite d') et parallèles à une droite d, alors d et d' sont parallèles
- ✍ Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont deux droites parallèles
- ✍ Si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles
- ✍ Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan

5. Orthogonalité dans l'espace

a. Orthogonalité et perpendicularité

Dans l'espace, deux droites orthogonales ne sont pas forcement perpendiculaires. En effet, deux droites orthogonales ne sont perpendiculaires que si elles sont coplanaires.
Une droite d qui coupe un plan P en un point A, est orthogonale (donc perpendiculaire) à ce plan ssi elle est perpendiculaire à deux droites de P passant par A.

b. Définition

D est orthogonal à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à toute droite de P, mais il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de P

c. Propriétés

- ✍ Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles
- ✍ Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre
- ✍ Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles
- ✍ Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre
- ✍ Si deux plans sont orthogonaux alors toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre

F. Produit Vectoriel

1. Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté, on appelle produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors

✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ *direction*

✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est directe *sens*

✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est de norme $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot|\sin(\vec{u},\vec{v})|$ *norme*

2. Propriètés :

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\vec{v}\wedge\vec{u}=-(\vec{u}\wedge\vec{v})$

$(k\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(k\vec{v})=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$

$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

A, B, C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Si, dans une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ alors les coordonnées du vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont $(yz'-zy';zx'-xz';xy'-yx')$

3. Applications :

✓ Plan ABC est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$

✓ La distance d'un point M de l'espace à la droite D (qui passe par A et dont un vecteur directeur est $\vec{u}$) est $d(M,D)=\dfrac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

✓ La distance d'un point M de l'espace au plan P dont de repère $A(A;\vec{u},\vec{v})$) est

$$d(M,P)=\frac{|\overrightarrow{MA}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$$

✓ L'aire d'un triangle ABC est $\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

✓ Le volume d'un tétraèdre ABCD est $\dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$