نيابة ثانوية المنصور الذهبي التأهيلية سيدي البرنوصي – زناتة أكاديمية: الدار البيضاء الكبرى	**الدوال اللوغاريتمية**	الأستاذ : تباع خالد المستوى : السنة الثانية بكالوريا علوم تجريبية

❖ محتوى الدرس

I. دالة اللوغاريتم النيبري :

II. دالة اللوغاريتم للأساس a ودالة اللوغاريتم العشري:

❖ القدرات المنتظرة

- ✓ التمكن من حساب اللوغاريتميات
- ✓ حل معادلات و متراجحات لوغاريتمية
- ✓ معرفة و تطبيق اللوغاريتم العشري
- ✓ معرفة النهايات اللوغاريتمية الأساسية و توظيفها
- ✓ دراسة دوال تحتوي على لو غاريتميات

الأستاذ : تباع خالد المستوى : السنة الثانية بكالوريا علوم تجريبية	**الدوال اللوغاريتمية**	ثانوية المنصور الذهبي التأهيلية نيابة سيدي البرنوصي – زناتة أكاديمية: الدار البيضاء الكبرى

I. دالة اللوغاريتم النيبري :

1. تعريف:

تعريف: دالة اللوغاريتم النيبري هي الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1 ونرمز لها ب $\ln$.

2. نتائج :

- مجموعة تعريف الدالة $\ln$ هي المجال: $]0;+\infty[$.
- $\ln 1 = 0$.
- الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ ولدينا : $\forall x \in]0;+\infty[; (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- ليكن $x \in]0;+\infty[$ و $y \in]0;+\infty[$ إذن لدينا :
  - ✓ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
  - ✓ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- ليكن $x \in]0;+\infty[$ إذن :
  - ✓ $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
  - ✓ $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
  - ✓ $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

3. خاصيات :

خاصية أساسية :

ليكن $x \in]0;+\infty[$ و $y \in]0;+\infty[$ إذن لدينا : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$.

نتائج : ليكن $x \in]0;+\infty[$ و $y \in]0;+\infty[$ و $r \in \mathbb{Q}$ إذن لدينا :

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^r) = r.\ln x$

حالات خاصة : ليكن $x \in]0;+\infty[$ إذن لدينا :

- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}.\ln x$
- $\ln(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}.\ln x$

4. ملاحظات هامة :

- ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^*$ بحيث $x.y > 0$ إذن لدينا :
  - ✓ $\ln(x \times y) = \ln|x| + \ln|y|$
  - ✓ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$

✓ $\ln(x^2) = 2.\ln|x|$

5. <u>دراسة الدالة $\ln$:</u>

مبرهنة نقبلها : $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \; ; \; \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

ملاحظة : الدالة $\ln$ متصلة وتزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ إذن فهي تقبل دالة عكسية معرفة من $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$ نحو $]0;+\infty[$ و بما أن $1 \in \mathbb{R}$ أي $1 \in \ln(]0;+\infty[)$ فإن المعادلة $\ln x = 1$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$ ونرمز لهذا الحل ب e . العدد e عدد لا جذري وقيمته المقربة إلى 10^{-3} هي $e \approx 2{,}718$ ولدينا : $\ln e = 1$.

الفروع اللانهائية :

✓ لدينا $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_{ln}) .

✓ نقبل المبرهنة التالية : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ إذن المنحنى (C_{ln}) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار$+\infty$.

جدول تغيرات الدالة $\ln$ هو كالتالي :

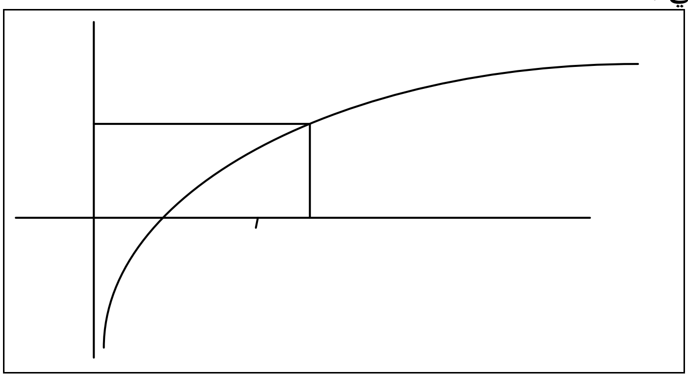
x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ e $\qquad$ $+\infty$
$(\ln x)'$	$+$
$\ln x$	↗

التقعر والتحدب :

لدينا: $\forall x \in]0;+\infty[\; : \; (\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} < 0$

إذن (C_{ln}) مقعر على $]0;+\infty[$.

التمثيل المبياني :



6. <u>نهايات هامة :</u>

- $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = 0$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \lim_{x\to 0^+} x^n \cdot \ln x = 0$
- $n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

7. المشتقة اللوغاريتمية :

خاصية و تعريف : لتكن U دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I . إذا كانت U لا تنعدم على I فإن:
الدالة: $x \to \ln|U(x)|$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x \in I : \ (\ln|U(x)|)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$.
الدالة: $x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة U على I .

تمرين تطبيقي : نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.
أ - حدد D_f .
ب -بين أن قابلة للاشتقاق على D_f ثم احسب $f'(x)$ لكل $x \in D_f$.

8. الدوال الأصلية للدالة $x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$:

خاصية : إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم عليه فإن الدوال الأصلية للدالة $x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$ على I هي الدوال $x \to \ln|U(x)| + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

تمرين تطبيقي : نعتبر الدالة العددية f بحيث : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{6x}{3x^2+8}$.
أ - حدد الدوال الأصلية للدالة على $\mathbb{R}$.
ب -حدد الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في -1 .

II. دالة اللوغاريتم للأساس a ودالة اللوغاريتم العشري:

1. دالة اللوغاريتم للأساس a :

تعريف : ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا ومخالفا للعدد 1 . الدالة $x \to \frac{\ln x}{\ln a}$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها ب $\log_a$ ولدينا : $\forall x \in]0; +\infty[: \ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

ملاحظات :

- الدالة $\log_e$ هي دالة اللوغاريتم النيبري لأن :
$\forall x \in]0; +\infty[: \ \log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$.
- $\log_a a = 1$ و $\log_a 1 = 0$.
- لكل $r \in \mathbb{Q}$ لدينا $\log_a a^r = r$.

خاصيات : ليكن x و y و a أعداد حقيقية موجبة قطعا مع $a \neq 1$.لدينا :

- $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x \ ; r \in \mathbb{Q}$

2. دالة اللوغاريتم العشري :

تعريف : دالة اللوغاريتم العشري هي دالة اللوغاريتم للأساس 10 ونرمز لها ب $\log_{10}$ أو $\log$
ولدينا : $\forall x \in]0; +\infty[: \ \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.
ملاحظة : لكل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $\log 10^n = n$.