Chap 2 : Ensembles de nombres, calculs dans Q et R

1. L'ensemble ℕ des nombres naturels

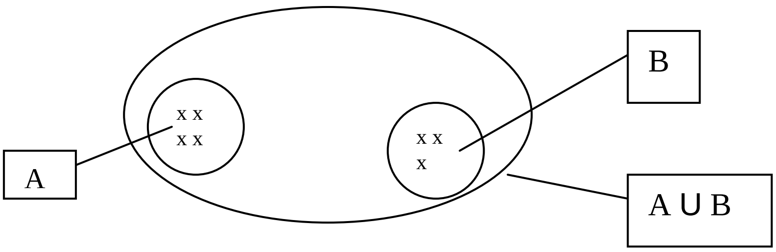
1.1 Caractérisation

- 2 ensembles sont définis comme **équipotents si on peut établir une bijection** (= correspondance terme à terme) entre eux. Le nombre cardinal est le représentant de tous els ensembles qui sont équipotents entre eux.
- Un nombre est un élément d'une suite organisée :
  - Chaque élément a un successeur unique appartenant à cet ensemble (n, n+1).
  - 2 éléments différents ont des successeurs différents.
  - Zéro n'est le successeur d'aucun nombre.
  - Toute partie de ℕ vérifiant ces propriétés et contenant zéro est égale à ℕ.

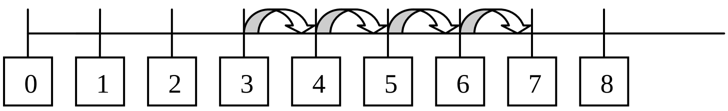
1.2 Propriétés dans ℕ

➢ **L'addition fait correspondre à tout couple *(a, b)* de ℕ x ℕ le nombre noté *a*+*b* appartenant à ℕ**

- **Du point de vue cardinal, la somme *a*+*b* est associée à la réunion de 2 ensembles disjoints qui ont respectivement *a* et *b* éléments.**



- **Du point de vue ordinal, la somme *a* + *b* représente le nombre qui se situe *b* après *a*.**
  Par exemple, 3 + 4 :



L'addition dans ℕ est : - associative : $(a + b) + c = a + (b + c)$ - commutative : $a + b = b + a$ - régulière : si $a + c = b + c$ alors $a = b$ - elle possède 0 comme élément neutre.

➢ **La multiplication fait correspondre à tout couple *(a, b)* de ℕ × ℕ le nombre noté *a* × *b* appartenant à ℕ**

- Du point de vue cardinal, le produit $a \times b$ est associé au cardinal du produit cartésien de 2 ensembles.

- Du point de vue ordinal, le produit $a \times b$ est associé au b-ième terme de la suite de a en a à partir de 0.

La multiplication dans $\mathbb{N}$ est :
- associative : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- commutative : $a \times b = b \times a$
- régulière : si $c \neq 0$: $a \times c = b \times c \Rightarrow a = b$
- distributive par rapport à l'addition : $a \text{ x } (b + c) = (a \text{ x } b) + (a \text{ x } c)$
- le nombre 1 est élément neutre.
- 0 est élément absorbant.

➢ **L'ensemble $\mathbb{N}$ est ordonné par une relation qui permet de comparer les nombres**

$a \leq b$ si et seulement s'il existe c appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $b = a + c$
Cet ordre correspond :
- Du point de vue cardinal, au fait que l'ensemble A (de cardinal a) a moins d'éléments que l'ensemble B (de cardinal b).
- Du point de vue ordinal, le fait que « a est situé avant b dans la suite des nombres ».

1.3 Les insuffisances de $\mathbb{N}$

- Dans l'ensemble des nombres entiers naturels, la soustraction n'est pas toujours possible : $x = a - b$ n'a de solution dans $\mathbb{N}$ que si $a \geq b$.
- Les nombres naturels ne permettent de graduer qu'une demi-droite.

2. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers

2.1 Caractérisation

L'ensemble des entiers relatifs complète l'ensemble des entiers naturels.
Il est composé des naturels et de leurs opposés.

2.2 Propriétés dans $\mathbb{Z}$

➢ **L'addition dans $\mathbb{Z}$**
- Elle est associative et commutative.
- Elle possède un élément neutre 0.
- Tout élément x a un opposé x' qui vérifie $x + x' = x' + x = 0$ et est noté $-x$.

➢ **La multiplication des entiers naturels**
- Mêmes propriétés que dans $\mathbb{N}$.
- **Règles des signes :**
  - Le produit de 2 nombres positifs est positif.
  - Le produit de 2 nombres négatifs est positif.
  - Le produit d'un nombre positif par un nombre négatif est négatif.

➢ **L'ordre de $\mathbb{Z}$ prolonge celui de $\mathbb{N}$**

Il est compatible avec l'addition, la multiplication par un entier strictement positif.
Si $c > 0$ et $a \leq b$ alors $a \times c \leq b \times c$.
Si $c < 0$ et $a \leq b$ alors $a \times c \geq b \times c$.
D'autre part si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$

2.3 Les insuffisances dans $\mathbb{Z}$

- Certaines équations $a \times x = b$ n'ont pas de solution dans $\mathbb{Z}$, comme par ex $2 \times x = 5$.
- Les nombres entiers relatifs, sauf 1 et -1 n'ont pas d'inverse pour la multiplication.

3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

3.1 Caractérisation

Un rationnel est un nombre x qui est solution d'une équation $b \times x = a$ avec a et b entiers et $b \neq 0$. Ce nombre x peut s'écrire sous la forme d'une fraction a/b, a étant le numérateur, b le dénominateur et a/b le quotient de a par b.

➢ **Fractions égales**

2 fractions a/b et c/d sont égales si elles représentent le même rationnel.
On a alors $a \times d = b \times c$.

➢ **Simplification de fractions**

- Une fraction peut être simplifiée en divisant son numérateur et son dénominateur par un diviseur commun.
- Une fraction est irréductible si le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.
- Un nombre rationnel peut être représenté par une infinité de fractions égales.
- La décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur peut faciliter la simplification des fractions.

3.2 Propriétés dans $\mathbb{Q}$

➢ **Tout élément non nul a un inverse pour la multiplication**

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ car $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$ donc $\frac{-1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

➢ **La somme et le produit de 2 rationnels *a* et *b* sont des rationnels, ainsi que leur différence et leur quotient.**

➢ **Pour additionner ou soustraire des fractions :**

- Si les dénominateurs sont égaux, on additionne les numérateurs.
- Si les dénominateurs sont différents, on cherche d'abord un dénominateur commun (multiple commun, en général ppcm)

➢ **Pour multiplier une fraction par un entier :** on multiplie le numérateur par cet entier.
➢ **Pour multiplier 2 fractions entre elles :** on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
➢ **Pour diviser une fraction par une autre :** on multiplie la $1^{\text{ère}}$ par l'inverse de la $2^{\text{ème}}$.

➢ **L'ensemble des nombres rationnels est totalement ordonné :**

Pour comparer 2 fractions, plusieurs méthodes :

- Si les dénominateurs sont égaux, on compare les numérateurs : la fraction la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.
- Si les numérateurs sont égaux, on compare les dénominateurs : la fraction la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.
- Réduire les fractions au même dénominateur.

4. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

4.1 Caractérisation

Un nombre décimal peut s'écrire :

- Avec une écriture décimale : partie entière + partie décimale dont le nombre de chiffres différents de 0 et situés après la virgule est fini.
- Sous forme d'une fraction décimale : $a = b/\ 10^n$.
- Comme le produit d'un entier par une puissance de 10 : $a = b \times 10^{-n}$
  $10^{-n} = 1/10^n = 0{,}00...01$ (n chiffres après la virgule)

> Un nombre *a* est décimal s'il existe un entier naturel *n* tel que $a \times 10^n$ soit un entier relatif *b*.
> $a \times 10^n = b$ donc $a = b/10^n$

4.2 Propriétés

➢ **L'ensemble des nombres décimaux est stable pour l'addition et la multiplication**

La somme ou le produit de 2 nombres décimaux sont des nombres décimaux.
L'opposé $-x$ d'un décimal x est un nombre décimal.
L'inverse $1/x$ d'un nombre décimal x non nul n'est pas toujours un nombre décimal.

Ex : *0,3 (ou 3/10) est un nombre décimal mais son inverse 10/3 = 3,3333… (avec une infinité de 3 ne l'est pas)*

➢ **Comparaison des décimaux**

Pour comparer 2 décimaux, on compare les parties entières puis respectivement chaque chiffre des parties décimales à partir des dixièmes.

➢ **Densité**

Entre 2 décimaux on peut toujours trouver un nombre décimal. C'est un ensemble dense.

5. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

5.1 Caractérisation

- Les nombres réels permettent de graduer parfaitement (sans trou) la droite.
- Certains nombres irrationnels sont solution d'équations : ce sont des nombres **algébriques**.
  Ex : $\sqrt{2}$ est solution de $x^2 = 2$.
- D'autres nombres irrationnels ne sont pas solution de telles équations et sont appelés **transcendants**.

5.2 Propriétés

- Les propriétés vérifiées dans $\mathbb{Q}$ le sont aussi dans $\mathbb{R}$.
- Tout réel peut être approché d'aussi près que l'on veut à l'aide des décimaux. On appelle valeur approchée du réel x à 0,01 près tout décimal a tel que $a - 0{,}01 \leq x \leq a + 0{,}01$.
  Si $a < x$, a est appelé **valeur approchée par défaut** à 0,01 près.
  Si $a > x$, a est appelé **valeur approchée par excès** à 0,01 près.

5.3 Puissances dans $\mathbb{R}$

- Si n est un naturel non nul $a^n = a \times a \times ... \times a$ (n fois) et $a^0 = 1$ avec $a \neq 0$.
- On définit que $a^{-n} = 1/a^n$ avec $a \neq 0$.
- $a^{n+p} = a^n \times a^p$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Identités remarquables :

$(a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2a \times b + b^2$
$a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

5.4 Calculs sur les radicaux

- Pour a appartenant à $\mathbb{R}+$, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est égal à $a : (\sqrt{a})^2 = a$.
- Pour a et b appartenant à $\mathbb{R}+$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Pour a et b appartenant à $\mathbb{R}+$, $\sqrt{a/b} = \sqrt{a} / \sqrt{b}$ (avec $b \neq 0$).
- Si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$.
- Si $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$.
- **ATTENTION** $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

6. Ecritures décimales

6.1 Fractions décimales

- Un rationnel est un décimal si, parmi toutes les fractions qui le représentent, il y a au moins une fraction décimale.
- Fraction décimale = fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 de la forme $a/10^n$.
- Les seuls rationnels qui sont des décimaux sont ceux qui peuvent s'écrire à l'aide d'une fraction irréductible dont le dénominateur est composé par le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5.

6.2 Ecritures décimales

- Une écriture décimale peut désigner : un entier (3,00), un décimal (3,25), un rationnel non décimal (0,3333… avec une infinité de 3 est égal à 1/3), ou un irrationnel ($\sqrt{2} = 1{,}414...$).
  → **ne pas confondre « nombre décimal » et « écriture décimale ».**
- **L'écriture décimale de *x* est finie :** elle comporte un nombre fini *n* de chiffres non nuls après la virgule.
- ***x* est un rationnel non décimal** : il peut s'écrire sous la forme *p/q* avec *p* et *q* premiers entre eux.
- **Si une suite est périodique et illimitée, elle est l'écriture d'un nombre rationnel.**
- **Une écriture décimale illimitée mais non périodique sera l'écriture d'un nombre irrationnel.**