Généralités sur les fonctions

I) Notion de fonction et ensemble de définition :

Définition1 : *Soit E une partie de IR et f une relation de E dans IR . Lorsque tout élément x de E à au plus une image par f (à 0 ou 1 image par f) on dit que f une fonction de E vers IR on note.*

$$f : E \to IR$$
$$x \mapsto f(x)$$

Définition2 : *L'ensemble Df des réel x tel que f(x) existe est appelé ensemble de définition de la fonction f ou domaine de définition on dira alors f est définie sur Df*

Activité 3page 9 : *Déterminer le domaine de définition Df de la fonction f de chacun des cas suivants*

$$: f(x) = x^2 + x - 4, \; f(x) = \frac{1}{x^2 - x} \; , \; f(x) = \frac{x}{|x| - 2} \; , \; f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+1} - 1}$$

❖ $f(x) = \dfrac{3x}{2x-1}$; $f(x) = \sqrt{3x-1}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$; $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$.

II) Représentation graphique d'une fonction :

Définition :

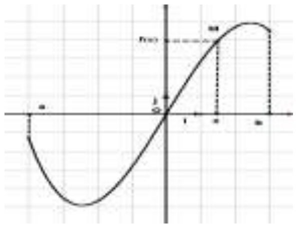
- ❖ *Le plan est muni d'un repère* $\mathbf{R}\ (o, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f est une fonction définie sur E (E ⊂ IR) . On appelle représentation graphique de f ,ou courbe représentative de f , l'ensemble des points M de coordonnées (x ,f(x)), ou x ∈ E

- ❖ *Si* $\mathscr{C}_f$ *désigne la courbe représentative d'une fonction f , alors* $\mathscr{C}_f$ *={M (x ,f(x)) avec x un élément de E }*
- ❖ *On dit que y=f(x) est l'équation de la courbe* $\mathscr{C}_f$

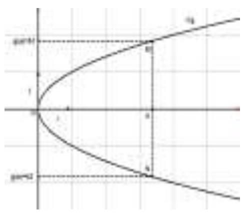
Exemple :f est une fonction définie sur E = [a b]

M(x ,y) appartient à ($\mathscr{C}_f$) équivaut à $\begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}$

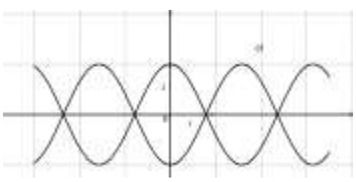
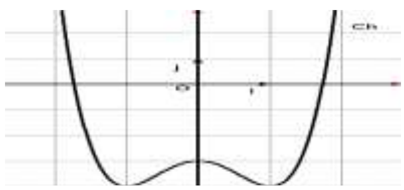
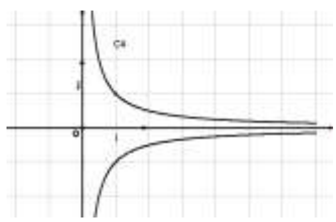


Remarque :

- ❖ *($\mathscr{C}$g) : Cette courbe ne représente pas une fonction car le réel a possède plus qu'une image par g .*
- ❖ $\begin{cases} g(a) = b_1 \\ g(a) = b_2 \end{cases}$ *et* $b_1 \neq b_2$ *donc (Cg) ne représente pas une fonction*



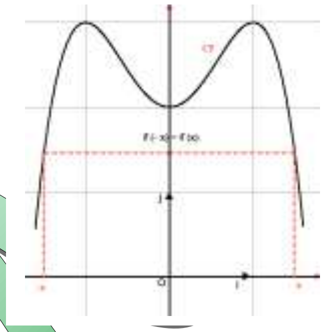
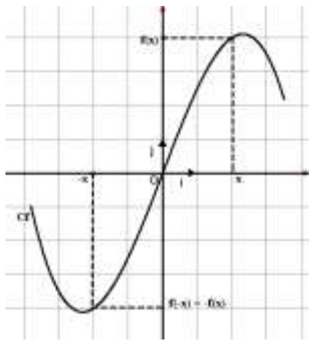
Activité 1 : *Parmi les courbes ci-dessous, indiquer celle qui représentent une fonction.*

1.	2.	3.
		

Activité 2 : *soit la fonction definie sur IR par* $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$

1. *Montrer qu' il existe 3 réels a , α et β tel que* $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
2. *Représenter la fonction f dans un repère orthonormé* $\mathrm{R}(o, \vec{i}, \vec{j})$.

III) Fonctions : parité

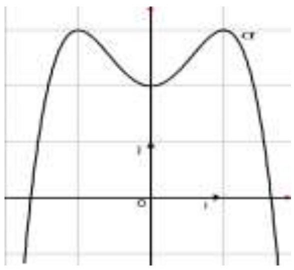
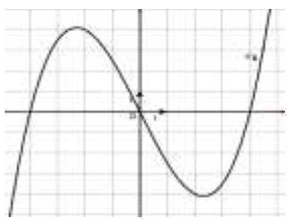
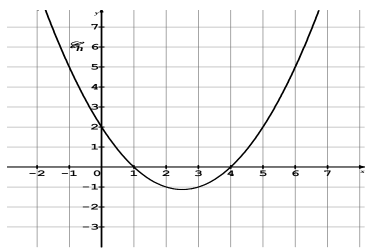
Définition	*Interprétation graphique*	*Conséquence*
Soit f une fonction définie sur D f et ($\mathscr{C}f$) sa courbe représentative dans un repère $\mathscr{R}(o, \vec{i}, \vec{j})$. ❖ *On dit que f est paire si, pour tout réel x de D f* $\begin{cases} -x \in Df \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ ❖ $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$ *f est définie sur IR* $\begin{cases} x \in IR \text{ et } -x \in IR \\ f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 2 = f(x) \end{cases}$ *Donc f est une fonction paire*		❖ *Une fonction est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées*
❖ *On dit que f est impaire si, pour tout réel x de D* $f \begin{cases} -x \in Df \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$ ❖ $f(x) = \frac{8}{3}x - \frac{1}{6}x^3$ *f est définie sur IR* $\begin{cases} x \in IR \text{ et } -x \in IR \\ f(-x) = \frac{8}{3}(-x) - \frac{1}{3}(-x)^3 \\ \quad = -\frac{8}{3}x + \frac{1}{3}x^3 = -f(x) \end{cases}$ *Donc f est une fonction impaire*		❖ *Une fonction est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère*

Activité 1: *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes puis dire si la fonction est paire, impaire ou ni paire ni impaire .*

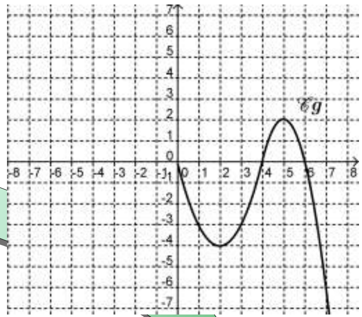
❖ $f : IR \to IR$; 2) $g : IR \to IR$; 3) $h : IR \to IR$; 4) $k : IR \to IR$

$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 3$ $\qquad x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$ $\qquad x \mapsto \frac{x}{x^2 - 2}$ $\qquad x \mapsto \sqrt{3 - x^2}$

Activité 2: *Le plan est muni d'un repère orthogonale R (o, $\vec{i}, \vec{j}$). Les courbes C_1, C_2, et C_3 représentent respectivement trois fonctions f, g, et h.A l'aide des graphiques déterminer la parité de f,g et h (si elle est paire , impaire ou ni paire ni impaire)*

1.	2.	3.
		

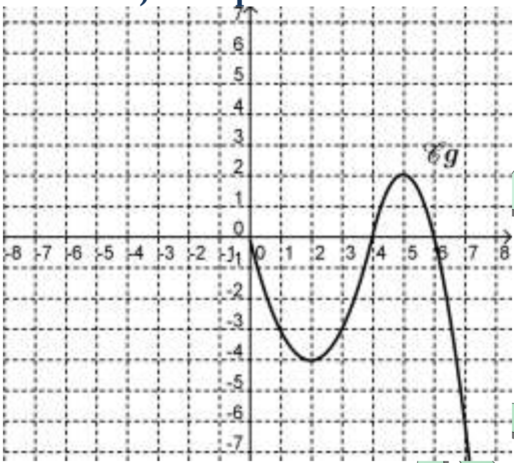
Activité 3: *On donne la restriction sur l'intervalle [0, 6] de la courbe représentative d'une fonction f.*



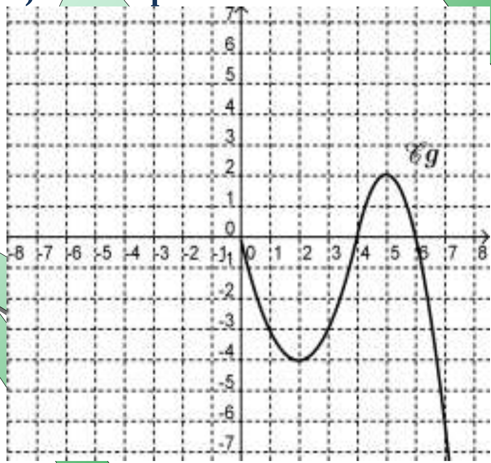
1) Lire sur cette courbe : f(0) , f(1), f(2),f(4) ,f(5) ,f(6) et f(7).

2) Compléter la courbe de f dans les deux cas suivants :

a) f est paire



b) f est impaire



Activité 4

1/ Choisir la réponse exacte.

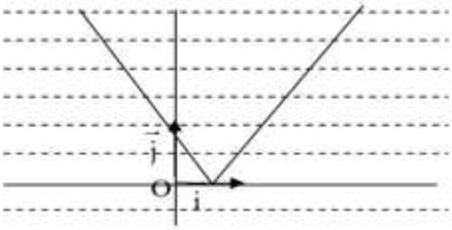
a) La fonction f définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x}{1+|x|}$

* est paire * est impaire * n'est ni paire ni impaire

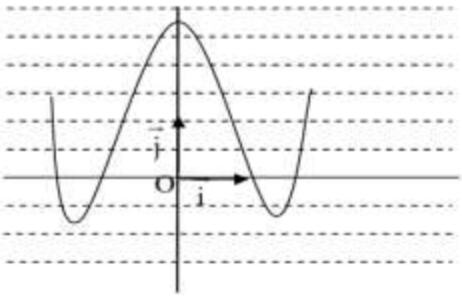
b) Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Une des courbes suivantes ne représente ni une fonction paire ni une fonction impaire. Laquelle ?

Courbe (1)



Courbe (2)



c/ L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{|4-2x|}$ est :

* $]-\infty,2]$ * $[2,+\infty[$ * IR

Sens de variations d'une Fonction :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR.

On dit que :

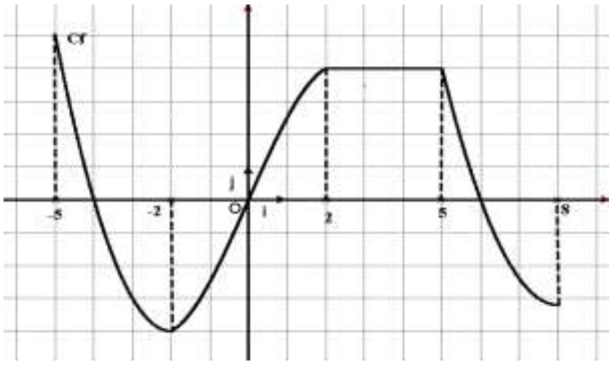
- f est croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$
- f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$

Remarques :

- *Une fonction est dite monotone sur un intervalle I , si elle est croissante ou décroissante sur I .*

Activité 1 :

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle [-5 ,8].
Indiquer par lecture graphique le sens de variation de f sur cet intervalle.



IV) Extremums d 'une Fonction :

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie D de IR et x_0 un réel de D.

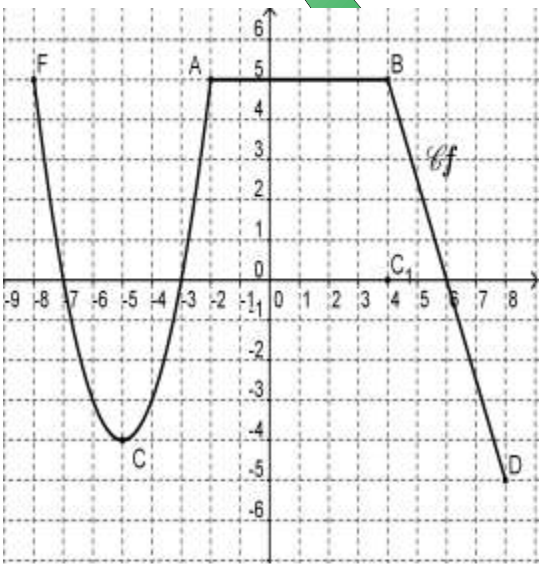
- Lorsque $f(x_0)$ est la plus grande valeur de f sur D , on dit que f admet un maximum absolu en x_0 . c'est-à-dire pour tout réel x de D , $f(x) \leq f(x_0)$.
- Lorsque $f(x_0)$ est la plus petite valeur de f sur D , on dit que f admet un minimum absolu en x_0 . c'est-à-dire pour tout réel x de D , $f(x) \geq f(x_0)$.
- on dit que f admet un maximum local (ou relatif) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D où $f(x_0)$ est la plus grande valeur de f sur I.
- on dit que f admet un minimum local (ou relatif) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D où $f(x_0)$ est la plus petite valeur de f sur I.

Remarques :

- *Lorsque f admet un maximum ou un minimum en a on dit que f admet un extremum en a .*

Activité 1 : *Ci –dessous ($\mathscr{C}f$) , la courbe représentative d'une fonction f définies sur [- 8 , 8] .*

Pour chacune des questions suivantes. Compléter par Vrai ou Faux (aucune justification n'est demandée)



	Faux	Vrai
a) *-4 est l'image de – 5 par f .*	☐	☐
b) *f est une fonction impaire.*	☐	☐
c) *f est strictement décroissante sur l'intervalle [-2 , 8].*	☐	☐
d) *f est constante sur l'intervalle [- 2 , 4].*	☐	☐
e) *-5est le minimum absolue de f sur l'intervalle [- 8 , 8].*	☐	☐
f) *Les solutions de l'équation f(x) = 0 :* $S_{[-8,8]} = \{-7,6\}$.	☐	☐
g) *f est croissante sur l'intervalle [-5, 4].*	☐	☐
h) *Les solutions de l'inéquation* $f(x) \geq 0$ *:* $S_{[-8,8]} = [-8,7] \cup [-3,6]$.	☐	☐

N*MY