Angles. Aires des surfaces planes.

Paul Milan

Professeurs des écoles le 29 septembre 2009

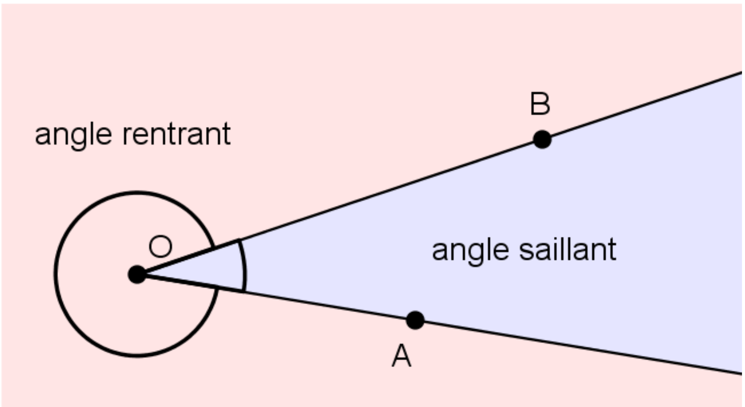
Table des matières

1 Les angles

1.1 Définition

Définition 1 *Un angle est un secteur du plan délimité par deux demi-droites. On distingue alors deux types d'angles :*

- *Les angles saillants (ou géométriques) notés :* $\widehat{AOB}$ *compris entre 0 et 180°.*
- *Les angles rentrants compris entre 180°et 360°*



1.2 Angles saillants

Dans toutes la suite nous considèrerons un angle comme un angle saillant.

On distingue parmi les angles saillants, les types suivants :

- Les angles aigus : compris entre 0°et 90°
- Les angles droits : 90°
- Les angles obtus : compris entre 90°et 180°
- Les angles plats : 180°

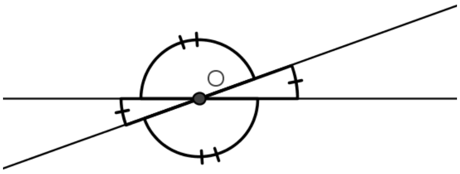
Définition 2 *On dit que deux angles sont complémentaires, supplémentaires si leur somme vaut respectivement 90°et 180°.*

$$\alpha + \beta = 90 \qquad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont complémentaires}$$
$$\alpha + \beta = 180 \qquad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont supplémentaires}$$

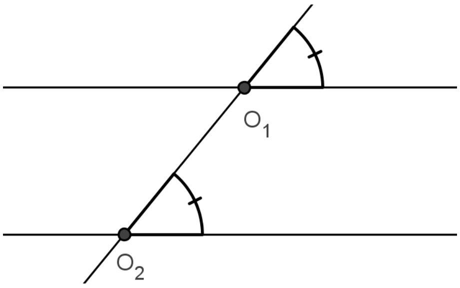
1.3 Égalité entre deux angles

On distingue 4 configurations où deux angles sont égaux

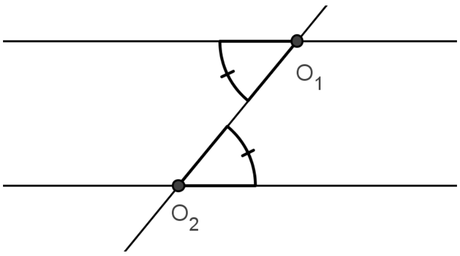
Opposés par le sommet



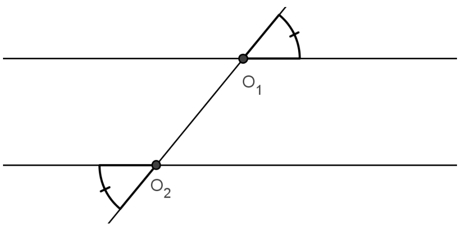
Correspondants



Alternes-internes



Alternes-externes



Application

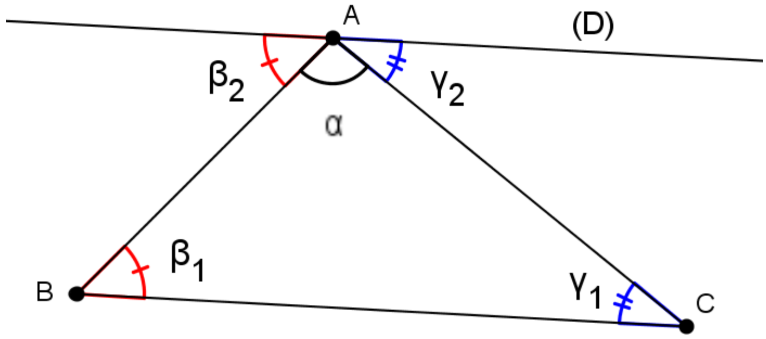
Démontrer que la somme des angles d'un triangle est égal à 180°.

Faisons d'abord un figure, sur laquelle on trace la droite (D) parallèle à (BC).

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_2 && \text{les angles sont alternes-internes} \\ \gamma_1 &= \gamma_2 && \text{les angles sont alternes-internes} \\ \beta_2 + \alpha + \gamma_2 &= 180 \end{aligned}$$

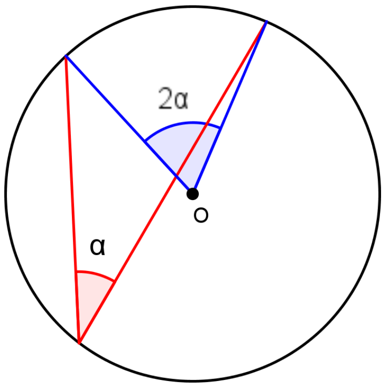
La somme des angles dans un triangle vaut donc 180°



1.4 Angles dans un cercle

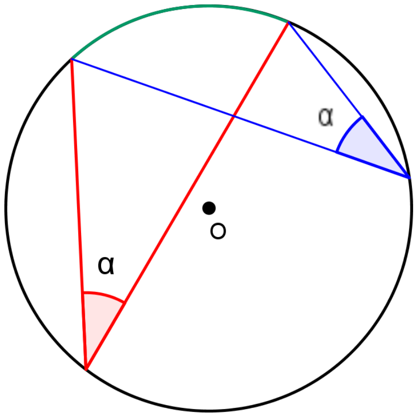
Angle inscrit et angle au centre

Théorème 1 *Dans un cercle, l'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit*



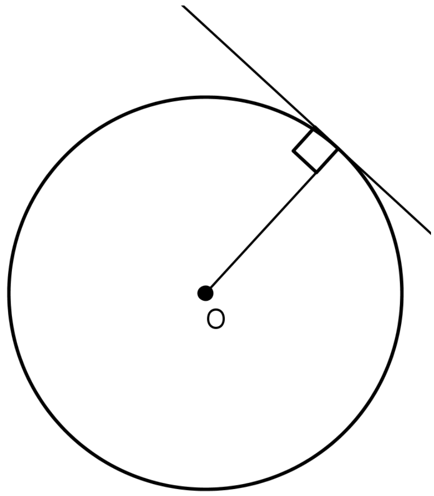
Angles inscrits

Théorème 2 *Dans un cercle, deux angles qui interceptent le même arc sont égaux.*



Tangente

Théorème 3 *Dans un cercle, la tangente en un point est perpendiculaire au rayon.*



1.5 Angles dans un polygone régulier

Théorème 4 *Un polygone de n côté peut être décomposé en $n-2$ triangles. L'angle α que forme deux côtés adjacents d'un polygone régulier vérifie donc :*

$$\alpha = \frac{(n-2)180}{n}$$

L'angle θ au centre s'obtient en divisant 360°par le nombre de côtés. On a alors :

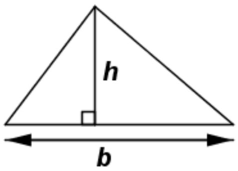
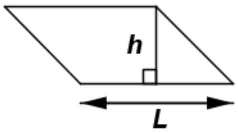
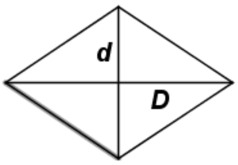
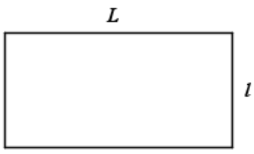
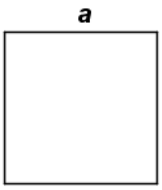
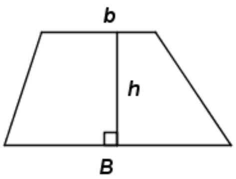
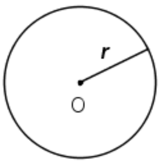
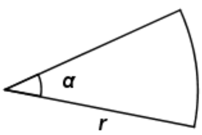
$$\theta = \frac{360}{n}$$

On obtient le tableau suivant pour les polygones réguliers usuels.

Polygone régulier	Angle entre deux côtés adjacents α	Angle au centre θ
Triangle	60	120
Carré	90	90
Pentagone	108	72
Hexagone	120	60
Octogone	135	45
Décagone	144	36
Dodécagone	150	30

2 Aires des surfaces planes

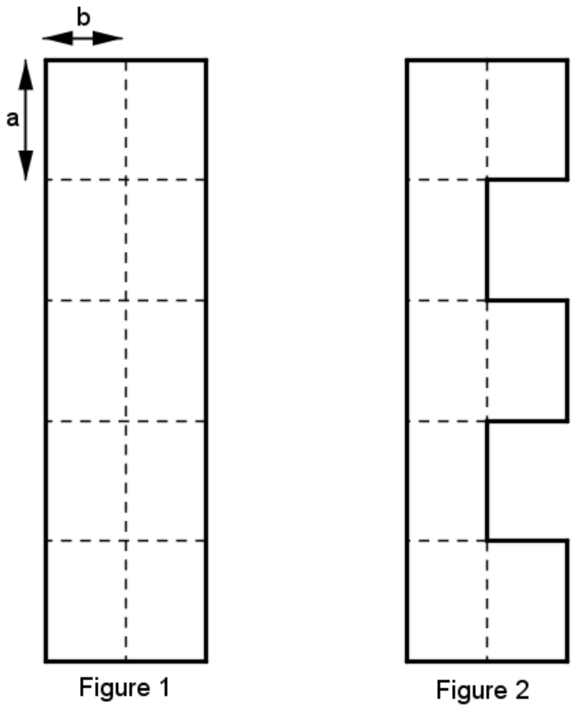
2.1 Tableau récapitulatif

Surface	Périmètre	Aire
	somme des côtés	$\dfrac{b \times h}{2}$
	somme des côtés	$L \times h$
	somme des côtés	$\dfrac{D \times d}{2}$
	$2(L + l)$	$L \times l$
	$4a$	a^2
	somme des côtés	$\dfrac{(B + b) \times h}{2}$
	$2\pi \times r$	$\pi \times r^2$
	$\dfrac{\pi \times r}{180}\alpha$	$\dfrac{\pi \times r^2}{360}\alpha$

2.2 Relation entre périmètre et aire

L'aire et le périmètre ne varient pas nécessairement dans le même sens. On peut par exemple aigmenter le périmètre et diminuer l'aire ou inversement.

Exemple 1 : Soit les deux figures suivantes constituées de rectangle de longueur a et de largeur b.



Le périmètre et l'aire de la 1re figure sont :

$$\mathscr{P}_1 = 10a + 4b \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_1 = 10ab$$

Le périmètre et l'aire de la 2e figure sont :

$$\mathscr{P}_2 = 10a + 8b \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_2 = 8ab$$

On a donc $\mathscr{P}_1 < \mathscr{P}_2 \quad \text{mais} \quad \mathscr{A}_1 > \mathscr{A}_2$.

Exemple 2 : Soit un carré de côté 3 et un rectangle de longueur 4 et de largeur 2. Calculons l'aire et le périmètre du carré et de rectangle.

$$\mathscr{P}_{carre} = 4 \times 3 = 12 \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_{carre} = 3^2 = 9$$

$$\mathscr{P}_{rectangle} = 2(4+2) = 12 \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_{rectangle} = 4^2 = 8$$

On a donc $\mathscr{P}_{carre} < \mathscr{P}_{rectangle} \quad \text{mais} \quad \mathscr{A}_{carre} > \mathscr{A}_{rectangle}$.