Table des matières

Descriptif

Introduction

Cette séquence d'enseignement est constituée de six à huit séances dont la durée varie entre une heure et une heure et demie.
Seules trois séances ont été filmées : les deux premières puis la quatrième. Des analyses de productions d'élèves obtenues dans les séances non filmées sont retranscrites dans ce document pour enrichir les ressources des enseignants.

Les quatre premières séances sont destinées à la construction de la propriété caractéristique du cercle. Dans les séances suivantes, il s'agit de compléter ce point de vue par des activités qui permettent de réinvestir implicitement cette propriété, ainsi que le vocabulaire géométrique associé, par des tâches de reproduction, de construction et de description conformément aux Instructions Officielles.

Pendant les différentes séances, les élèves travaillent par deux ou individuellement mais l'organisation spatiale de la classe permet la diffusion collective des procédures pour des élèves ayant des difficultés.
Les moments de mise en commun sont essentiels : il ne s'agit pas seulement de proposer une correction des exercices mais principalement de fixer les nouvelles connaissances abordées.

Le compas de chaque élève est toujours conservé dans la classe ce qui élimine le problème lié à l'oubli de matériel.

La séquence

But de la séquence
Le principal objectif de l'enseignant de cycle 3, ne doit plus être celui du maniement du compas. Les élèves doivent être capables de l'utiliser pour tracer des cercles. Les termes géométriques (rayon, centre, diamètre, disque) sont à réactiver par des activités pertinentes et fonctionnelles.

Ainsi le but de la séquence est :
- l'introduction du cercle comme un ensemble de points équidistants d'un point, le centre du cercle ;
- l'utilisation de cette propriété pour résoudre des problèmes de distance ;
- l'utilisation du compas comme report de distance pour construire des figures géométriques particulières (triangle, losange, hexagone régulier...).

Objectifs de l'enseignant :
- Faire évoluer la notion de cercle : de la figure tracée avec un compas à une définition géométrique.
- Initier des raisonnements mathématiques à partir de dessins à main levée.
- Donner à l'outil « compas » un statut de « reporteur » de distance.

Séance 0 **:** Évaluation diagnostique *(non filmée)*

séance proposée un mois avant le début des autres séances.

Objectif du maître :
Évaluer les compétences de ses élèves concernant :
- le maniement du compas ;
- la maîtrise du vocabulaire lié au cercle (rayon, centre et cercle).

Tâches de l'élève :
1. Construire une rosace (pour évaluer le maniement du compas).
2. Sur une feuille sur laquelle plusieurs cercles sont tracés, demander de repasser en rouge le centre des cercles, puis de tracer en bleu un rayon de chaque cercle, puis en vert un diamètre.
3. Construire, sur papier quadrillé, un cercle dont la caractéristique aura été donnée oralement (exemple : *un cercle de centre le point A et de rayon 6 carreaux*).

Descriptif (suite)

<u>Séance 1</u> : Séance introductive (*filmée*)

durée effective : 1h

Objectifs du maître :

- Mettre en évidence que l'ensemble des points équidistants d'un point définit un cercle.
- Faire faire le lien entre ces *points* et *ce cercle*, entre *la distance* et *le rayon du cercle*.

Tâches de l'élève :

- Construire des points à égale distance d'un point donné.
- Construire des points à une distance supérieure ou inférieure à une distance donnée.

Institutionnalisation :
Un cercle est constitué d'une infinité de points situés à égale distance d'un point nommé le centre.

Affiche reprenant cercle et disque.

<u>Séance 2</u> : Entraîner la propriété caractéristique du cercle (*filmée*)

durée effective : 1h10

Objectifs du maître :

- Rendre fonctionnelle la propriété caractéristique d'un cercle : ensemble des points équidistants d'un point donné.
- Réinvestir le vocabulaire géométrique lié au cercle.

Tâche de l'élève :
Résoudre des exercices mettant en jeu la propriété caractéristique du cercle.

Institutionnalisation :
Reprendre le sens et l'usage de la propriété caractéristique du cercle et du disque.
Selon la position d'un point par rapport à un cercle donné, on pourra avoir des informations sur la distance de ce point au centre du cercle.

<u>Séance 3</u> : Résoudre des problèmes de distance sur des dessins à main levée (*non filmée*)

durée effective : 1h

Objectifs du maître :

- Introduire les dessins à main levée .
- Donner du sens à la propriété caractéristique du cercle en la faisant fonctionner sur des dessins à main levée.

Tâche de l'élève :
Résoudre des problèmes.

Institutionnalisation :
Le statut des dessins à main levée.

Descriptif (suite)

<u>Séance 4</u> : Le cercle est un outil pour modéliser des situations de la réalité (*filmée*)

durée effective : 1h15

Objectifs du maître :
Faire découvrir l'usage du cercle et l'usage du disque pour résoudre des problèmes d'équidistance.

Tâches de l'élève :
Modéliser une situation de la vie réelle et la résoudre.

Institutionnalisation :
Le cercle est un outil pour résoudre des problèmes d'équidistance.

Des pistes pour poursuivre l'enseignement : proposition de scénarios pour les séances suivantes *(non filmées)*

<u>Séance 5</u> : Construction de figures complexes

Objectif du maître :
Faire fonctionner le vocabulaire concernant le cercle et faire utiliser la propriété caractéristique du cercle.

Tâche de l'élève :
À partir d'un programme de construction, construire une figure complexe sur papier quadrillé.

Institutionnalisation :
Les caractéristiques d'un programme de construction.

<u>Séance 6</u> : Reproduction de figures complexes

Objectifs du maître :
- Faire prendre conscience de la nécessité d'analyser des figures géométriques complexes avant leur reproduction.
- Faire écrire en mathématiques : exemple de programmes de construction.

Tâches de l'élève :
- À partir de modèles, reproduire à l'identique ou en agrandissant des figures géométriques complexes.
- Rédiger un programme de construction.

Institutionnalisation :
Élaboration de démarches pour reproduire des figures géométriques complexes.

<u>Séance 7</u> : Construction de triangles

Objectifs du maître :
- Réinvestir la propriété caractéristique du cercle pour faire construire des triangles dont la longueur des côtés est donnée.
- Présenter le compas comme un outil de report de distance.

Tâche de l'élève :
Construire à l'aide du compas des triangles de dimension donnée.

Institutionnalisation :
- Construction de triangles à l'aide du compas.
- Le compas : outil de report de distance.

<u>Séance 8</u> : Un état des lieux

Objectif du maître :
Évaluer les compétences de ses élèves concernant la notion de cercle et d'usage du compas comme report de distance.

Tâche de l'élève :
Résoudre les problèmes proposés

Évidemment, cette séquence d'enseignement doit se poursuivre, régulièrement pendant l'année scolaire, par des situations d'approfondissement et de réinvestissement dans lesquelles les tâches de reproduction, de construction et de résolution de problèmes liées à la notion de distance et d'équidistance seraient proposées aux élèves.
L'acquisition par les élèves de ces notions importantes ne se fera que par un entraînement régulier sur la durée.

Des situations autour des dessins à main levée permettant aux élèves de s'initier au raisonnement doivent être proposées régulièrement afin que les définitions et les propriétés géométriques prennent sens dans la fonctionnalité.

Séance 1
Fiche de préparation

Objectifs

Mettre en évidence que l'ensemble des points équidistants d'un point définit un cercle.
Faire faire le lien entre *ces points* et *ce cercle,* entre *la distance* et *le rayon du cercle.*

Tâche des élèves

Construire des points à égale distance d'un point donné. Construire des points à une distance supérieure ou inférieure à une distance donnée.

Matériel

- Bande de papier, feuille de papier calque, ficelle, équerre, compas. *Même matériel pour le maître.*
- Feuille blanche de format A3.
- Feutres de couleur.

Organisation

Alternance entre travail collectif et travail en binôme.

Déroulement

Phase 1 (par binôme) *:* ***15 points à la même distance du point A***

Chaque binôme dispose de l'ensemble du matériel et d'une feuille format A3.
Il s'agit de faire construire, par une méthode personnelle, 15 points équidistants d'un point donné.

Consigne : « Placez un point sur votre feuille. Appelez-le **A** (repassez-le en couleur **rouge** par exemple). Positionnez-le plutôt au centre de votre feuille. Puis placez, d'une autre couleur (bleu par exemple), un second point (différent de **A**) sur votre feuille. Appelez-le **B**. »
Le maître place lui aussi en même temps, sur une feuille fixée au tableau, les points A et B.

« Maintenant placez **15 autres points** sur votre feuille de telle sorte que leur distance au point A soit la même que la distance du point B à A. Mettre tous ces points de la même couleur que B.
Vous pouvez utiliser tout le matériel dont vous disposez sur la table.
Vous devrez ensuite être capable d'expliquer comment vous avez fait et pourquoi.»

Remarque : les feutres en couleurs permettent de mieux voir les productions affichées pour la mise en commun.

Phase 2 (collective) : **mise en commun et analyse des productions d'élèves**

Le maître choisit quelques productions de groupes d'élèves qu'il expose au tableau en demandant, pour chaque cas, le matériel utilisé et l'allure des points « bleus » tracés sur la feuille.

- Faire valider la notion de cercle évoquée par les élèves, par la construction effective de celui-ci sur chaque production.
- Faire argumenter sur l'imprécision des tracés par le fait que des points ne sont pas sur le cercle alors qu'ils devraient l'être.
- Faire émerger la notion d'équidistance à un point comme les points situés sur un même cercle.
- Réactiver les termes de *centre* et *rayon* du cercle.

Séance 1 : Fiches de préparation (suite)

Phase 3 (par binôme) ***: réinvestissement***

Le maître veut évaluer l'appropriation de cette notion de façon immédiate. Les élèves disposent toujours de l'ensemble du matériel.
Consigne : « Maintenant je vous demande de mettre encore dix autres points **C** avec un stylo vert, à la même distance de **A** que la distance de B à A. Allez-y ! »
La procédure attendue est le tracé immédiat des dix points sur le cercle, qui vient d'être construit précédemment, sans avoir recours aux instruments de construction (ficelle, compas, bande de papier…).

Phase 4 (collective puis par binôme) ***: mise en commun et notion de disque***

Analyse collective concernant le tracé de ces dix nouveaux points et reformulation du lien entre l'équidistance de points et les points du cercle.
Puis compléter la construction de la notion par la consigne suivante :
« Construire, d'une nouvelle couleur, **cinq points** tels que leur distance au point A soit plus **grande** que la longueur de A à B et en changeant de couleur, **cinq autres points** tels que leur distance au point A soit plus **petite** que la longueur de A à B. »

Phase 5 (collective) ***: mise en commun et synthèse***

La mise en commun à partir de productions d'élèves doit permettre d'avancer vers la synthèse qui constituera la phase d'institutionnalisation.

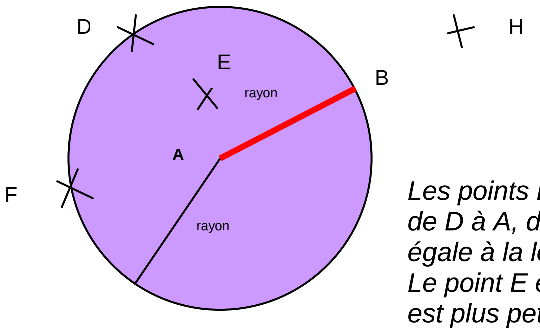
Synthèse

- Tous les points B qui sont situés à égale distance de A sont tous sur le **cercle** de centre A et de rayon AB (par exemple).
- Tous les points qui ont leur distance à A plus petite que la longueur du rayon sont situés dans le **disque** de centre A et de rayon AB.
- Tous les points qui ont leur distance à A plus grande que la longueur du rayon sont situés à l'extérieur du disque de centre A et de rayon AB.
- La surface limitée par le cercle est appelée *disque* (le colorier). Le cercle représente la frontière du disque.

Trace écrite à envisager : affiche synthèse

« Le cercle est constitué d'un ensemble de points (une infinité) qui sont tous situés à la même distance du centre. Cette distance est appelée le rayon du cercle. »
« Tous les points du cercle sont situés à égale distance du centre. »

Dessin illustrant cette propriété.



Les points D, F et B sont sur le cercle de centre A car la distance de D à A, de F à A et de B à A est la même. Cette distance est égale à la longueur du rayon du cercle.
Le point E est dans le disque de centre A car la distance de E à A est plus petite que la longueur du rayon du cercle.
Le point H est à l'extérieur du disque de centre A car la distance de H à A est plus grande que la longueur du rayon du cercle.

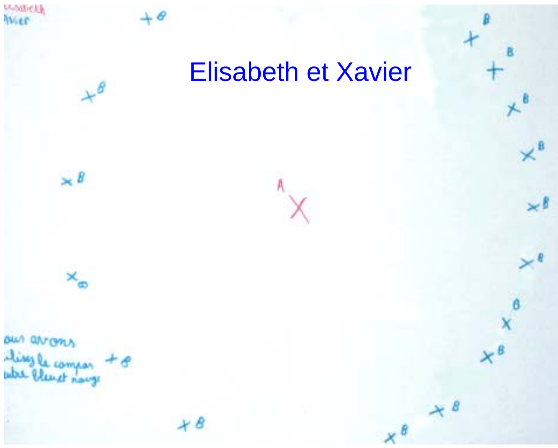
Remarque : le mot *rayon* ayant plusieurs sens (un segment ou une longueur), il est possible d'utiliser l'expression *longueur du rayon*, qui peut être considérée comme redondante mais qui permet d'insister sur le sens choisi.

Analyse de productions d'élèves

Suite à la consigne de l'enseignant « construire quinze points situés à la même distance de A que la distance de A à B », deux groupes ont utilisé leur compas comme outil de report de longueur, sept groupes ont utilisé la bande de papier, un groupe a alterné entre compas et bande de papier. Aucun élève n'a utilisé la ficelle ni le papier calque, sûrement par un manque de fréquentation de ce type de matériel.

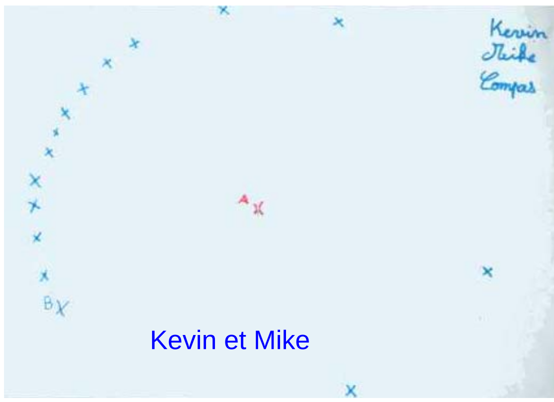
Parmi les **solutions correctes**, deux types de productions apparaissent : celles permettant une bonne perception du cercle et celles ne mettant pas en évidence la présence d'un cercle.

Les productions, telles que celle de **Elisabeth** et **Xavier**, où les points bleus sont régulièrement répartis autour du point A permettent une bonne perception du cercle.



Elisabeth et Xavier

Hichem et Medhi

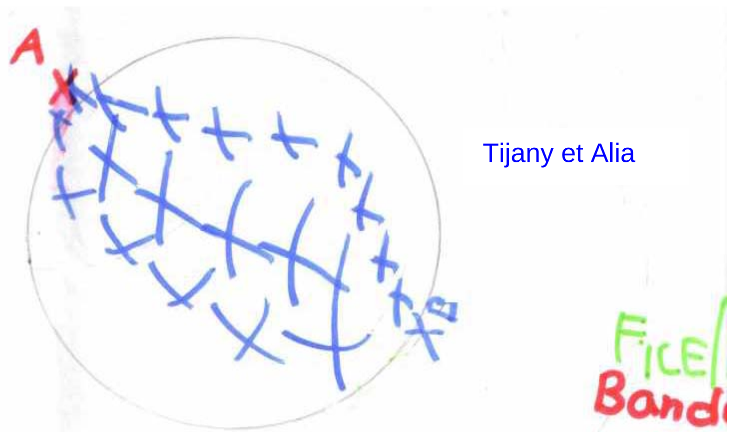


Kevin et Mike

Puis celles comme les productions d'**Hichem** et-**Medhi** et *de* **Kevin** et-**Mike**, où la majorité des 15 points bleus sont situés les uns à cotés des autres et dont la perception du cercle est beaucoup moins évidente.

Parmi les groupes qui ont produit des **réponses erronées**, on peut repérer deux binômes d'élèves qui ne s'approprient pas le problème.

Tijany et **Alia**, d'une part, tracent au crayon un cercle d'un diamètre un peu plus petit que la distance AB puis tracent les points bleus à l'intérieur de ce cercle, tout en les répartissant en une sorte de « rond ». Pour finir, ils effacent le cercle.



Tijany et Alia

Houria et Ali

D'autre part, **Houria** et **Ali** tracent 11 points quasiment alignés entre B et A puis tracent les quatre derniers en formant une ligne courbe après le point B. Concernant l'alignement des points, cela peut être lié au fait que le seul ensemble de points que les élèves ont approché en géométrie, de manière plus ou moins explicite, est la droite. Concernant les quatre derniers points :

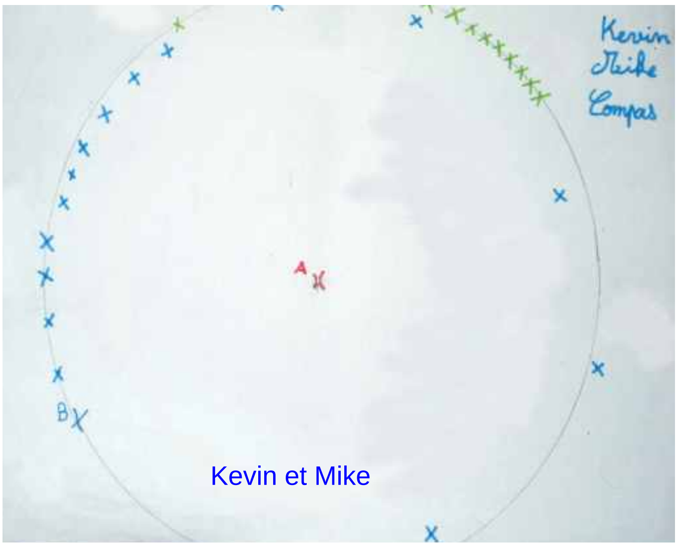
- est-ce un effet de contrat : il n'y a plus de place entre A et B pour les quatre points restant ?
- est-ce un effet de diffusion des productions des autres élèves où il apparaît des éléments courbes sur leur production ?

Validation de la présence du cercle et tracé des points verts.

La vérification de la présence d'un cercle va permettre de repérer le manque de précisions de construction en lien avec les outils employés.

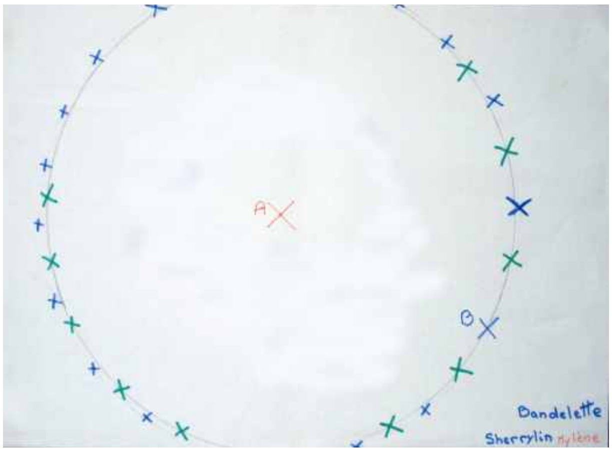
Hichem et Medhi

L'usage de la bandelette pour **Hichem** et **Medhi** met en évidence l'imprécision du tracé pour les points bleus. On remarque que ces élèves ont compris la propriété des points d'un cercle par le tracé immédiat des points verts sur le cercle sans usage d'outil de construction.

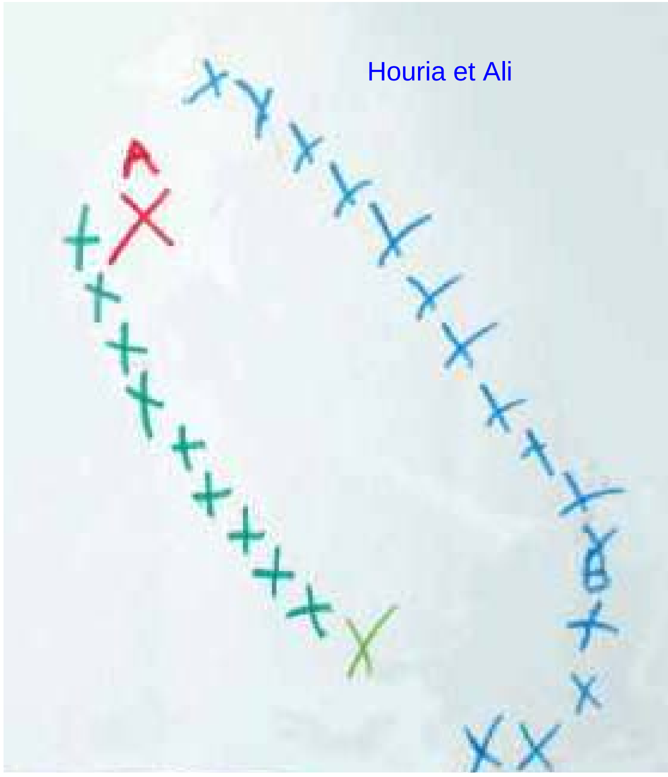


Kevin et Mike

De même, pour **Kevin** et **Mike**, l'usage du compas pour construire, un à un, les 15 points bleus fait apparaître, au moment de la vérification des points sur le cercle, l'imprécision des tracés. Comme pour le binôme précédent, les points verts sont tracés immédiatement par compréhension de la notion d'équidistance.



En revanche, **Sherrylin** et **Mylène**, ont obtenu une grande précision de la construction des points bleus en utilisant uniquement la bandelette. Même remarque que précédemment sur le tracé des points verts.


Houria et Ali

La production d'**Houria** et **Ali**, met en évidence que la mise en commun réalisée dans la classe, suite à la construction des points bleus, faisant ressortir l'émergence d'un cercle, n'a pas pris sens pour eux. Ils poursuivent l'activité avec la même procédure : ils alignent les points verts entre les points A et B.

Les points dans le disque


Sherrylin et Mylène

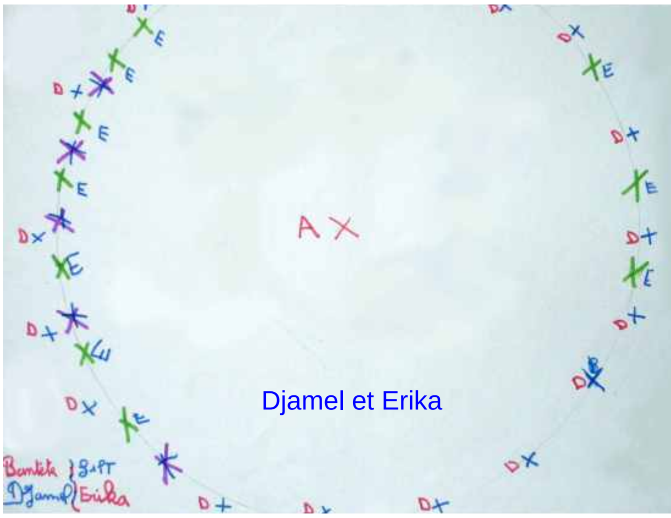
Concernant la consigne « *Tracer 5 points à une distance de A plus petite que la distance entre les points A et B* », beaucoup d'élèves (comme **Sherrylin** et **Mylène**) ont choisi de tracer un cercle de centre A et d'un rayon inférieur à AB, puis de tracer 5 points sur ce cercle. Ils restent attachés à la tâche précédente et s'ajoutent une contrainte.

On remarque que la mise en commun permet aux élèves (comme les binômes **Belkacem-Mickaël** et **Rachel-Ben Youcef** (page suivante)) de mieux comprendre la dernière consigne «*Tracer 5 points à une distance de A plus grande que la distance entre les points A et B* ». Les points extérieurs au disque ne sont pas sur un autre cercle de centre A mais répartis sans propriétés particulière.


Belkacem et Mickaël

Rachel-Ben Youcef

Le cadre de la feuille permet moins facilement cette fois de construire un cercle de centre A et d'un rayon supérieur à AB. Cet aspect a peut être aussi contribué à limiter des constructions particulières ?

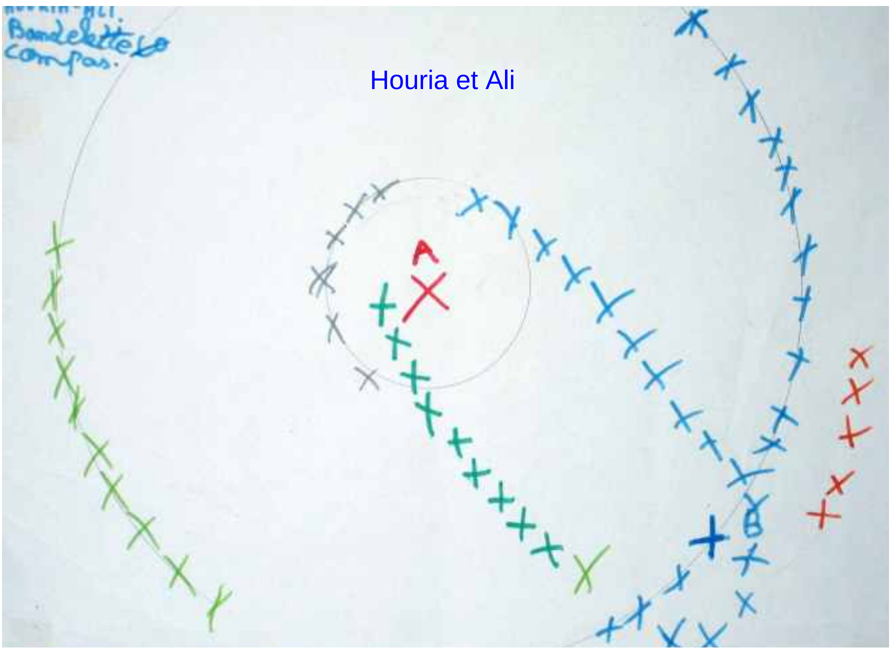


Djamel et Erika

En revanche certains élèves (**Djamel** et **Erika**) poursuivent la tâche liée à la construction des points bleus et verts et placent leurs nouveaux points encore sur le cercle de rayon AB. La compréhension de la notion de distance par rapport au point A semble difficile.

Un groupe en difficultés

La production finale d'**Houria** et **Ali** permet de penser que, petit à petit, ces élèves ont donné du sens à la situation proposée par le maître et ont réussi à réaliser correctement les dernières consignes (points situés à une distance inférieure à la distance AB puis les points situés à une distance supérieure à la distance AB).



Houria et Ali

Analyse didactique

<u>Analyse a priori</u>

Connaissances mathématiques en jeu

Il s'agit de faire émerger la propriété caractéristique des points d'un cercle, c'est à dire leur équidistance à un point appelé le centre du cercle.

À ce propos voici quelques remarques qui permettent d'expliciter les difficultés qui seront rencontrées dans cette séquence d'enseignement.

La distance d'un point A à un point B est la longueur du segment [AB].

Dans cette situation, quand on parle de la longueur du rayon, le rayon est considéré comme un segment. Mais pendant la séance, le terme de rayon est employé soit pour désigner *le segment* soit pour désigner la *longueur du segment*, c'est à dire une *distance.* Cette alternance d'usage est très souvent source d'ambiguïté pour les élèves.

Le cercle et le disque

Ce sont les seuls objets de la géométrie plane qui sont désignés par deux termes différents – cercle ou disque – selon que l'on parle de la ligne (contour) ou de la surface. Par exemple la surface d'un carré n'est pas désignée par un autre terme mathématique. Cette particularité doit être comprise par les enseignants afin de l'expliciter aux élèves et d'être rigoureux dans l'usage de ces termes. L'intersection de deux cercles donne un point alors que l'intersection de deux disques donne une surface.

Définitions du cercle

Voici plusieurs définitions possibles du cercle[1] :

- On appelle cercle, toute courbe fermée du plan dont la courbure est constante.
- On appelle cercle, toute courbe admettant une infinité d'axes de symétrie.
- Étant donnés un point *O* et un nombre réel positif *r*, on appelle cercle, l'ensemble des points du plan situés à la distance *r* du point *O*. Ce cercle aura pour centre *O* et pour rayon *r.*

La dernière définition est une définition ponctuelle du cercle et c'est celle-ci que nous allons mettre en évidence dans la situation « *du cercle sans tourner en rond* ».

Variables didactiques

Les différents types d'outils de construction, excepté la règle graduée.

Procédures des élèves pour tracer les points bleus

Utilisation de la bandelette comme outil de repérage, une longueur étant définie au départ par les élèves.
Utilisation de la ficelle de la même façon que l'utilisation de la bandelette.
Utilisation du calque : tracer les deux points A et B sur le calque puis décalquer régulièrement le point B, en conservant le point A au même endroit.
Utilisation du compas : prendre la longueur du segment [AB] pour écartement du compas et reporter cette longueur, à l'aide du compas, 15 fois à partir du point A.

Procédures des élèves pour tracer les points verts

Les élèves, qui ont compris intuitivement la propriété caractéristique du cercle, placent les points verts immédiatement sur le cercle.

---

[1] ARTIGUE, ROBINET (1986), *Conception du cercle chez les élèves de l'école élémentaire*, IREM Paris VII

Les autres réutilisent la procédure qu'ils ont employée pour tracer les points bleus ou bien utilisent une autre procédure parmi celles présentées au tableau lors de la mise en commun.

Difficultés prévisibles

La principale difficulté envisagée est liée aux outils de construction proposés, les élèves n'en ont pas une grande familiarité. Parler de longueur sans pouvoir recourir à la règle graduée devrait être une difficulté pour les élèves.
Une difficulté liée aussi à la complexité des consignes : « *Placez **15 points** sur votre feuille de telle sorte que leur distance au point A soit la même que la distance du point B à A*. »

<u>Analyse a posteriori</u>

Elle est illustrée en partie par les propos de l'enseignant lors de l'entretien et par l'analyse des productions des élèves.

Du côté des élèves

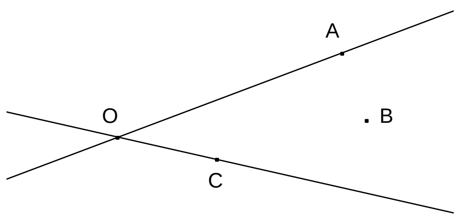
Concernant la première tâche, les élèves vont utiliser principalement deux procédures : soit reporter une longueur déterminée sur la bandelette (pliage de la bande ou marquage de la position du point B à partir du début de celle-ci), soit prendre un écartement de compas et faire des reports de longueur (traits avec la mine ou trous avec la pointe du compas). La production des élèves va prendre intuitivement l'allure de la courbure du cercle sous-jacent. Aucun usage de la ficelle ni du papier calque : ces outils sont peu utilisés par les élèves et ne sont donc pas, pour eux, porteurs de propriétés mathématiques.

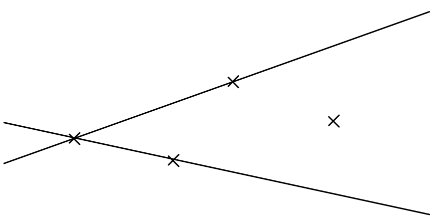
Des groupes d'élèves ne comprennent pas la tâche et la première mise en commun n'est pas suffisante pour donner du sens à leur activité.
Le groupe Tijany-Alia (voir dans les productions d'élèves) trace un cercle passant presque par les points A et B, puis placent 15 points bleus à l'intérieur. Ces élèves semblent avoir intuitivement la notion du cercle mais la consigne exprimée en fonction de « distance » est incomprise. On peut aussi penser que le fait d'avoir la possibilité d'utiliser le compas les conduit à tracer un cercle.

La notion de ***points géométriques*** reste encore bien confuse pour les élèves. Le concept est évidemment complexe et le formalisme souvent exigé pour sa représentation, sans lien avec le sens, ne permet pas d'asseoir une conceptualisation stable.
L'extrait vidéo suivant montre toute cette ambiguïté. Voici retranscrit le dialogue de deux élèves : **1**
« eh, Mylène, on a le droit de faire des traits ou des points ? »
« je ne sais pas »
« … des traits ? non ? »
« si… des points si ! »

Le langage de l'enseignant est alors déterminant. Il doit être précis sur le vocabulaire utilisé et doit spécifier ce qui est de l'ordre de l'expression orale « *le point en géométrie* » et ce qui est de l'ordre de la représentation iconique « *une croix* » qui symbolise l'intersection de deux « morceaux » de droites. L'enseignant ne doit pas osciller entre des termes comme « traits », « croix », « points », « tirets » , sa rigueur langagière aidera les élèves à construire les concepts géométriques.

Remarque : les élèves connaissent depuis longtemps le terme de « point » qui est « le point à la ligne » et qui est représenté par un point graphique. Il est regrettable que les manuels de mathématiques (comme dans l'exemple ci-contre) utilisent cette représentation pour le « point géométrique ».





On préfèrera cette représentation où les points géométriques sont matérialisés par une croix, qui symbolise l'intersection de deux morceaux de droites.

Placer les points verts

Cette tâche qui vient juste après la mise en évidence du cercle comme un ensemble de points équidistants du centre, permet de repérer rapidement les élèves qui se sont appropriés la propriété. Ceux-là, très rapidement placent les points verts sur le cercle sans l'usage d'outil de construction, alors que les autres reproduisent la même construction que pour les points bleus.

Placer les points dans le disque

2

Pour réaliser cette tâche, de nombreux élèves vont rester « collés » à la tâche précédente et ajouter la contrainte que ces 5 nouveaux points soient cocycliques.
D'autres élèves, comme Johnny et Salim, n'ont pas compris et poursuivent la tâche précédente en reportant 5 autres points sur le cercle initial. Il est vraisemblable qu'une partie de ces élèves n'a pas écouté la totalité de la consigne et se précipite dans l'activité pensant savoir ce qui est demandé (après les points bleus et les points verts sur le cercle, ils poursuivent).
On s'aperçoit que la prégnance de la figure géométrique que constitue le cercle, ainsi que son tracé, est importante et le passage à la notion de distance ne semble pas être significative, à ce moment pour la majorité des élèves de cette classe. On peut aussi s'interroger sur la compréhension, par les élèves, du terme « distance ».

3

Rôle du langage

Le rôle du langage est essentiel dans les séances de géométrie. Dans cette séance, on constate que les élèves ne disposent pas des mots pour parler des objets géométriques. Par exemple, certains élèves semblent avoir une bonne image mentale de la situation géométrique, semblent comprendre ce qui est demandé par le maître, mais ont beaucoup de difficultés à utiliser un langage pertinent et adapté : « *mettre les points à l'arrêt du cercle* », « *des points égaux* », « *on a avancé des centimètres* », « *on a mis les points en avant* », etc.
Seule une acquisition du vocabulaire en lien avec les objets géométriques étudiés permettra aux élèves leur apprentissage et la possibilité d'une communication sans ambiguïté concernant les savoirs mathématiques.
Dans la rubrique ***éclairage sur… le dernier exercice***, le maître introduit le mot *supérieur* synonyme de *plus grand que* et plusieurs élèves vont mettre les points à l'*intérieur* du cercle au lieu de l'*extérieur*. Ici les relations mathématiques liant la longueur d'un segment avec la position topologique d'un point semblent complexes à comprendre par les élèves.

Du côté de l'enseignant

Les élèves de cette classe ont l'habitude de travailler ensemble et les tables sont disposées de telle sorte que cela soit possible aisément. Dans son organisation pédagogique, l'enseignant prévoit d'attribuer des rôles à ses élèves, comme les « distributeurs », ce qui lui facilite le travail et le rend plus disponible pour d'autres tâches.

Concernant une situation introductive, il est important que les élèves comprennent **l'enjeu de l'activité** proposé par le maître. C'est une phase essentielle pour permettre la dévolution du problème par les élèves et celle-ci est trop souvent oubliée ou négligée par l'enseignant. Ici, même si le maître y a pensé, il l'escamote et les élèves vont exécuter les consignes sans connaître l'enjeu du savoir à construire. Ils vont devoir mettre des points sur une feuille et puis après ?

4

Si c'était à refaire, il serait souhaitable d'introduire la séance par :
« Aujourd'hui, nous allons découvrir une propriété importante concernant une figure géométrique que vous connaissez bien. Pour cela, nous allons tracer de nombreux points puis vous essayerez de trouver cette propriété. » **et de la poursuivre comme celle présentée dans le DVD**.

Les **mises en commun** sont toujours délicates. Elles nécessitent une analyse a priori de l'enseignant puis une observation fine des procédures des élèves pendant l'activité. Ce temps d'observation permet aussi à l'enseignant d'élaborer mentalement la gestion de la mise en commun.

5

Lors de cette première mise en commun, le maître souhaite faire dire aux élèves que *les points bleus sont tous sur le cercle de centre A*. La question posée est trop ouverte et les réponses des élèves sont en lien avec la tâche effectuée donc en lien avec l'équidistance. Seul Ben Youcef qui, depuis le début de l'activité, a saisi que l'ensemble de ces points étaient situés sur un cercle, anticipe l'attente du maître. Il comprend la question de celui-ci et du même coup il est dans la construction d'un savoir mathématique même si la question est maladroitement posée.
Une question plus fermée pourrait être : « *Où semblent être situés tous ces points ?* » ou bien « *À votre avis, sur quelle figure sont situés tous ces points ?* »

D'autre part, la présentation au tableau de la production de *Tyjani et Alia* mériterait une explicitation de l'erreur : « *Les points construits respectent-ils la contrainte ?* » et de le vérifier avec la bandelette par exemple.
Cette explicitation aurait peut-être permis à ces élèves de comprendre plus rapidement la notion en jeu et leur aurait évité de poursuivre dans leur choix erroné.

Le rôle de la synthèse et de l'affiche

Dans une séance aussi dense que celle-ci, les enseignants ont souvent quelques difficultés à faire formuler les connaissances construites et la séance se termine sans une véritable institutionnalisation des savoirs en jeu.
Ici le maître a anticipé cette phase et a rédigé, sur une affiche, la trace écrite qu'il souhaite faire écrire aux élèves.

Cette trace écrite correspond à la synthèse des différentes phases de la séance et sera, pour les séances suivantes, la référence à laquelle il renverra systématiquement les élèves.

Séance 2
Fiche de préparation

Objectifs

- Rendre fonctionnelle la propriété caractéristique d'un cercle : ensemble des points équidistants d'un point donné.
- Réinvestir le vocabulaire géométrique lié au cercle.

Tâche des élèves

Résoudre des exercices mettant en jeu la propriété caractéristique du cercle.

Matériel

Les énoncés des exercices, retranscrits sur des feuilles « volantes ». Les instruments géométriques autorisés sont différents selon les exercices.

Remarque : Il est recommandé l'utilisation de règle et d'équerre aimantées pour le tableau afin de faciliter les explications faites soit par le maître, soit par les élèves. C'est une façon de libérer les mains des outils qui, tenus à la verticale, monopolisent l'attention de tous au détriment du travail de réflexion et d'explicitation.

Organisation

- Les exercices sont présentés, résolus et corrigés les uns après les autres.
- Les élèves résolvent individuellement les problèmes tout en échangeant avec leurs voisins sur leur procédure. Les moments de mise en commun sont collectifs.
- Le maître dispose des énoncés des exercices agrandis et affichés au tableau.

Remarque : pour chaque exercice, le maître gère de façon identique le déroulement des phases. Ce côté répétitif est lié à son objectif d'entraîner ses élèves à l'appropriation d'une propriété.

Déroulement

Phase 1 (collective) ***: rappel de la séance 1***

- Reprise d'une ou deux productions d'élèves de la séance précédente afin de réactiver la tâche et la synthèse de la séance.
- Retour sur la trace écrite proposée par l'enseignant en fin de séance précédente.
  « Pourquoi n'utilise-t-on que le compas et plus les bandelettes ou les ficelles pour tracer des cercles? ».
  Cette question permet de réaffirmer le lien entre le cercle et la notion d'équidistance, avec le fait qu'implicitement le compas est l'outil servant à la construction des cercles.
- Donner l'enjeu de la résolution des exercices : *« Je vais vous proposer des exercices pour voir si vous êtes capables d'utiliser ce que nous avons vu à la séance précédente. »*

Phase2 (individuelle) ***: résolution de [l'exercice 1]***

Matériel : pour la recherche, seule la règle graduée est autorisée. Le compas servira seulement pour la validation.

Cet exercice est issu des évaluations nationales de 6^e (2000 et 2004) et teste la capacité des élèves à faire le lien entre *points sur un cercle* et *équidistance.*

- Demander aux élèves de lire silencieusement l'énoncé de l'exercice puis demander si un élève peut reformuler la tâche à réaliser.
- Passer parmi les élèves pour observer les différentes procédures utilisées et repérer les difficultés rencontrées afin d'anticiper la manière d'aborder la mise en commun.

Phase 2 bis (collective) ***: mise en commun et résolution de l'exercice***

L'énoncé agrandi de l'exercice est accroché au tableau.

- Les élèves donnent leurs réponses et argumentent sur la validité de leurs procédures. L'ensemble de la classe participe au débat sur la validité des résultats.
- L'enseignant propose de vérifier la réponse en prenant le compas.

Conclusion : Retour sur la propriété caractéristique des points du cercle introduite à la séance 1.

Phase 3 (individuelle) ***: résolution de l'exercice 2***

Matériel : l'ensemble des outils de construction est laissé à la disponibilité des élèves.

L'objectif de cet exercice est de réinvestir le lien entre les points d'un cercle et la notion d'équidistance.
Même déroulement que pour l'exercice 1.

Phase 3 bis (collective) ***: mise en commun et résolution de l'exercice***
Même démarche que pour l'exercice 1.

Phase 4 (individuelle) ***: résolution de l'exercice 3***

Matériel : seul le compas est laissé à la disposition des élèves.

Même déroulement que pour l'exercice 1.

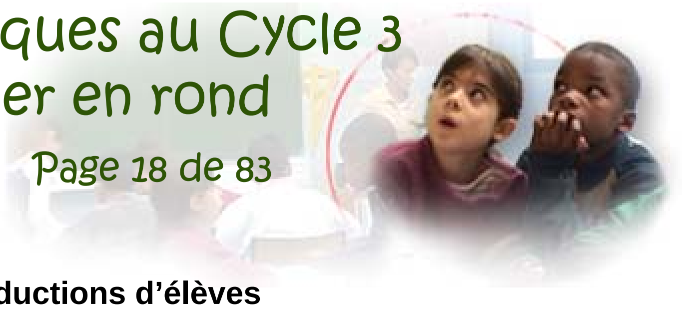
Remarque : suite à l'analyse a posteriori nous proposons une modification de l'énoncé de l'exercice 3 : **exercice 3 modifié.**

Phase 4 bis (collective) ***: mise en commun et résolution de l'exercice***

Même démarche que pour l'exercice 1.

Phase 5 (collective) ***: synthèse de la séance***

Faire formuler par les élèves les notions travaillées pendant cette séance et insister sur le rôle des instruments de construction. Montrer que la propriété d'équidistance des points d'un cercle permet de résoudre des problèmes de distance sans avoir à recourir nécessairement à des instruments de mesurage, mais uniquement en s'appuyant sur un raisonnement. Ainsi il est possible de résoudre vite et sûrement des problèmes de distance qui prendraient du temps si on utilisait une règle graduée par exemple.



Analyse de productions d'élèves

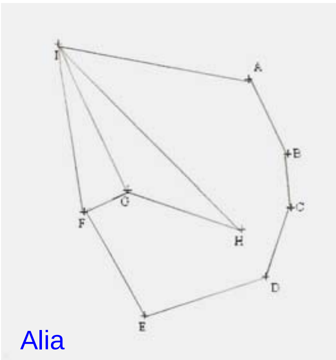
Exercice 1

Cet exercice a été donné dans les évaluations nationales de 6e de 2000 et 2004[2]

Pour cet exercice deux éléments étaient attendus : le nom du centre du cercle et l'argumentation associée. Le seul instrument de construction autorisé est la règle graduée.

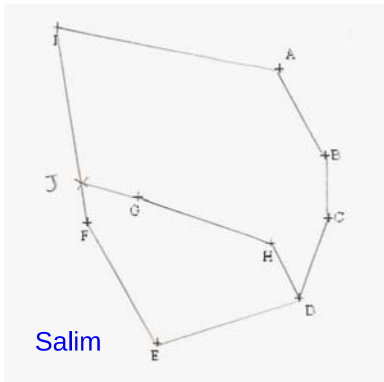
Dans la vidéo, nous voyons plusieurs procédures d'élèves et quatre réponses différentes : le point I, G, F et H.

Première procédure :

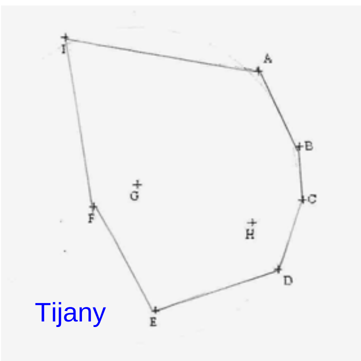

Alia

Certains élèves ne semblent pas comprendre la tâche qui n'est pas ordinaire pour eux. Ils s'engagent dans la construction d'un polygone en reliant les points dans l'ordre alphabétique. Cette procédure est souvent celle mise en œuvre par des élèves en difficultés qui réalisent un exercice plus connu.

Salim décide que le centre du cercle est le point I en expliquant que c'est le point le « plus loin ». Quant à **Alia**, elle ne donne pas de réponse.

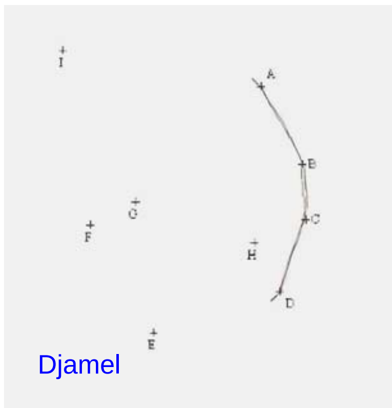

Salim

Deuxième procédure :

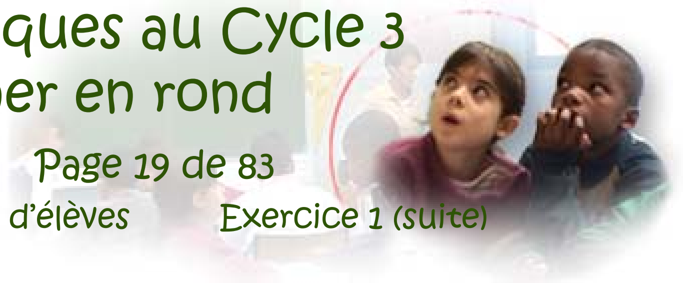

Tijany

D'autres élèves, comme **Tijany** et **Djamel** relient les points A, B, Cet D ensemble pour faire apparaître la courbure du cercle et ensuite de façon perceptive trouvent le centre du cercle. Cette intuition est ensuite vérifiée par des mesures à la règle mais la perception est première.

Remarque : Tijany commence, lui aussi, par relier l'ensemble des points mais il explicite dans la vidéo à l'enseignant qu'il fait cela pour avoir une idée du cercle.


Djamel

[2] voir les analyses et résultats en annexe

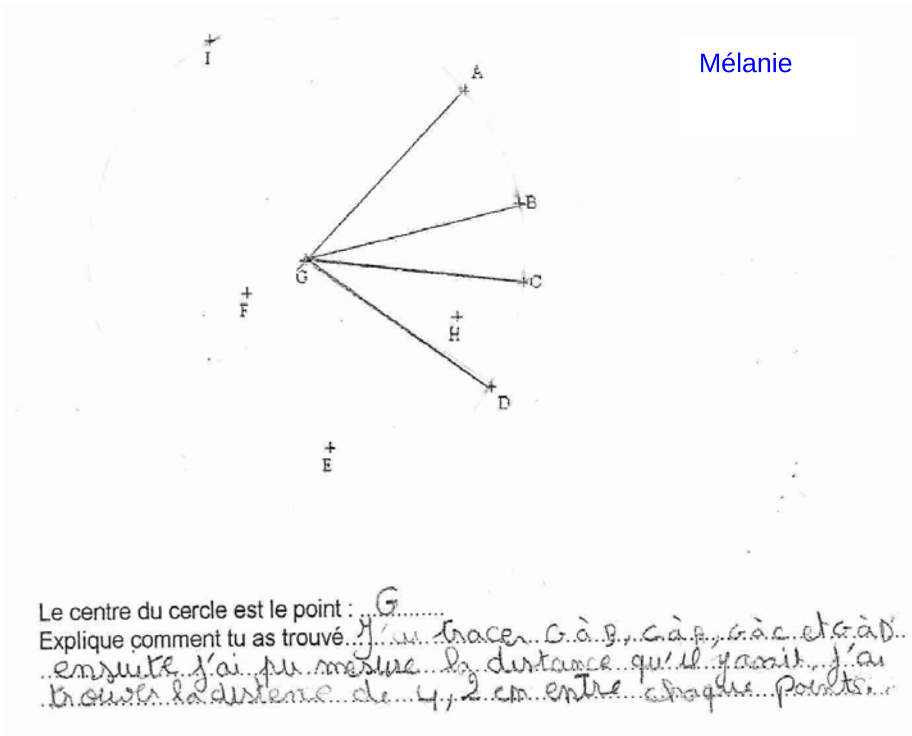


Troisième procédure :

Les élèves mesurent les distances entre le point G et respectivement les points A, B, C et D et en concluent à une égalité de distance. La vidéo permet d'observer le maniement de la règle qu'ils font tourner autour du point G.

Pour sa part, Elisabeth explique : *« En utilisant ma règle j'ai regardé et j'ai trouvé le point G. Pour être sûre j'ai pris ma règle et j'ai mesuré. »*

Johnny explicite sa façon de chercher : *« J'ai posé le zéro sur les points A, B, C, D puis j'ai mesuré la distance entre les points A et G et j'ai continué jusqu'au point D. La distance est de 4 cm 2 mm. »*



Concernant l'explicitation

Les élèves de cette classe ont de grandes difficultés à s'exprimer, encore plus à l'écrit qu'à l'oral. La deuxième partie de l'exercice qui consiste à expliciter sa démarche est souvent difficile à obtenir, ils préfèrent dire à l'oral que devoir l'écrire. Ce moment est important et un travail spécifique sur la compréhension de ce petit texte doit faire partie de la suite du travail en classe. C'est alors la possibilité de travailler avec les élèves l'orthographe de termes géométriques et la nécessité de pouvoir se comprendre par écrit.

Exercice 2

Cet exercice comporte deux questions similaires qui vont mobiliser la compréhension du lien entre le cercle et l'équidistance des points du cercle. L'ensemble des outils de construction est autorisé.

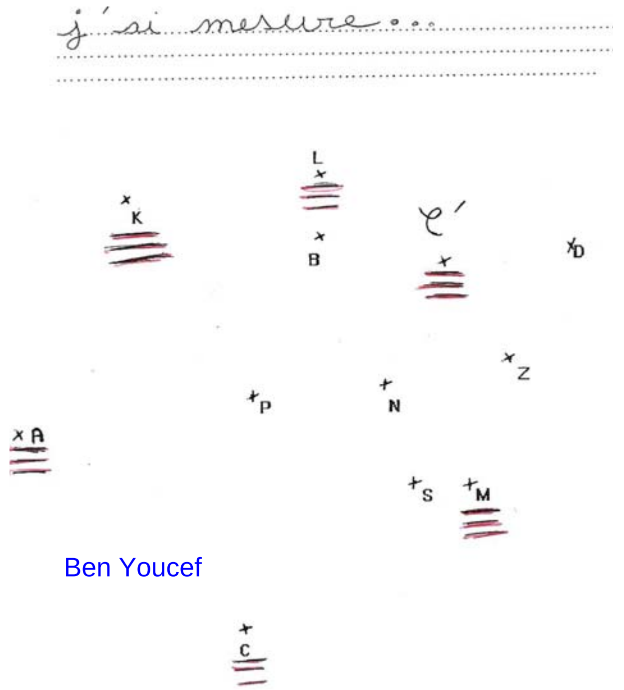
Comme il est proposé juste après l'exercice 1, on peut penser que les procédures utilisées précédemment vont influencer les démarches des élèves et que l'usage de la règle graduée va être majoritaire. Seule la lourdeur de la tâche devrait susciter une autre procédure qui par ailleurs donnerait l'exhaustivité des solutions. Ainsi la mise en œuvre d'une méthode experte pourra être explicitée et institutionnalisée. Pour la première question il s'agirait de : *tracer le cercle de centre P et de rayon 5 cm, puis repérer les points situés sur ce cercle.*

Avant de présenter les différentes procédures des élèves, il est intéressant de souligner une difficulté que nous pourrions lier à la compréhension de la consigne mais qui pourrait aussi être liée à la difficulté de la désignation des objets géométriques par les élèves : « *Parmi les points tracés sur la feuille,* ***repasse en rouge*** *tous ceux qui sont situés à 5 cm du point P. »*
Sur les productions des élèves nous repérons ceux qui ont repassé en rouge **les lettres qui désignent les points**, ceux qui ont repassé en rouge **les rayons du cercle**, ceux qui ont souligné en rouge **les points et leur désignation** puis ceux qui ont repassé en rouge **les points**. On pourrait alors utiliser un autre moyen : *entoure en rouge les noms des points*. Il s'agit de différencier la représentation de l'objet géométrique de sa désignation (en fait ici deux désignations de l'objet : la croix et la lettre).

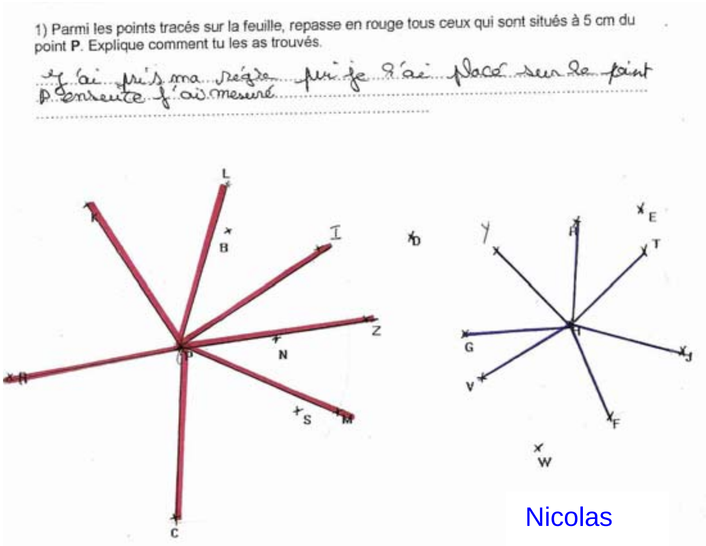
Première procédure :

Plusieurs élèves utilisent la méthode de l'exercice 1 en mesurant 5 cm à partir du point P et trouvent plus ou moins les points cherchés.

Nicolas, ci-contre fait des erreurs de mesure, ce qui l'amène à désigner le point Z (à 5,5 cm de P) et le point J (à 3,4 cm de H) comme des solutions possibles aux questions.



Ben Youcef

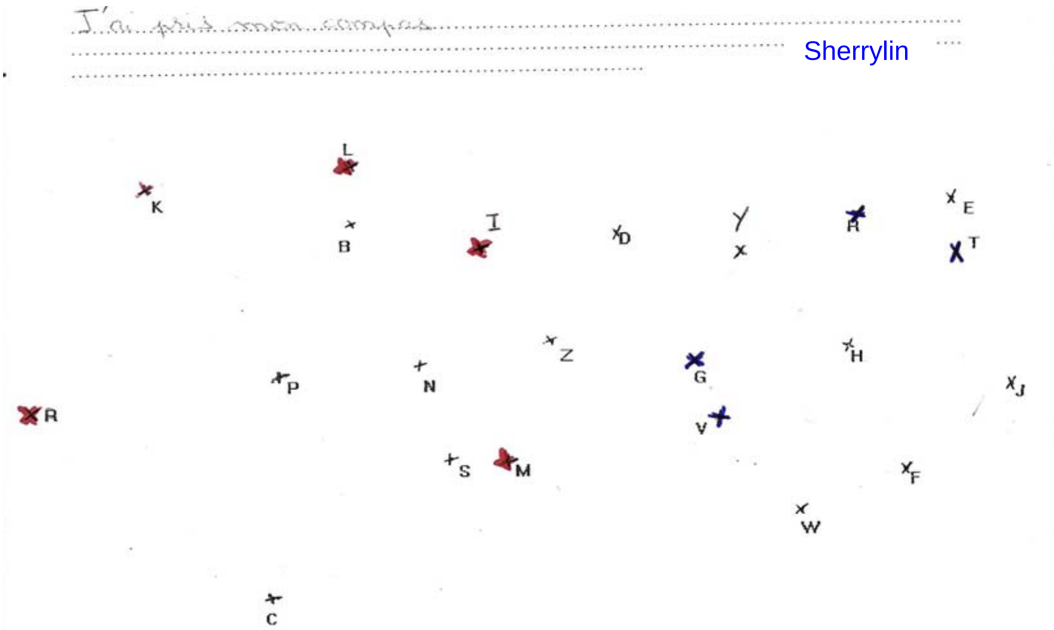


Nicolas

Ben Youcef ne se trompe pas, il n'oublie aucun point.

Deuxième procédure :

L'usage du compas est mentionné mais le cercle n'est pas construit ce qui, pour certains, conduit à l'oubli de solutions possibles comme sur la production de **Sherrylin** où 3 points solutions sont oubliés (les points C, F, Y)

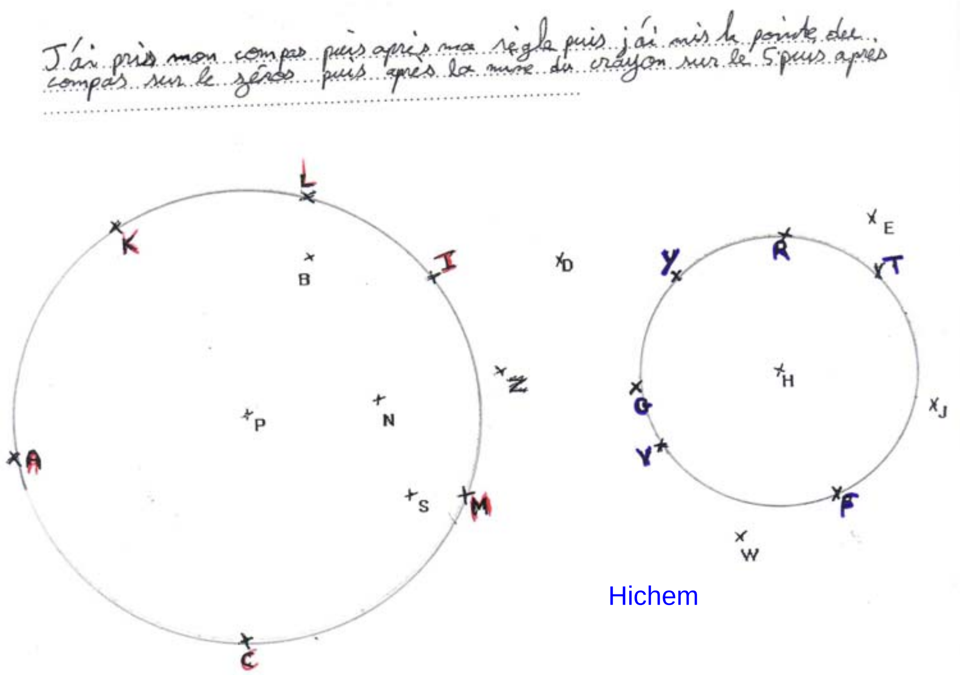


Sherrylin

Les branches du compas sont écartées de 5 cm puis cet écartement va être utilisé pour rechercher les segments dont une des extrémités est le point P et dont la longueur correspond à l'écartement du compas. La vidéo montre que les élèves construisent mentalement le cercle et dès qu'ils rencontrent un point sous la mine du compas, ils le repassent en rouge.

Troisième procédure :

La démarche experte qui consiste à tracer des cercles et à repérer des points situés sur ces cercles.

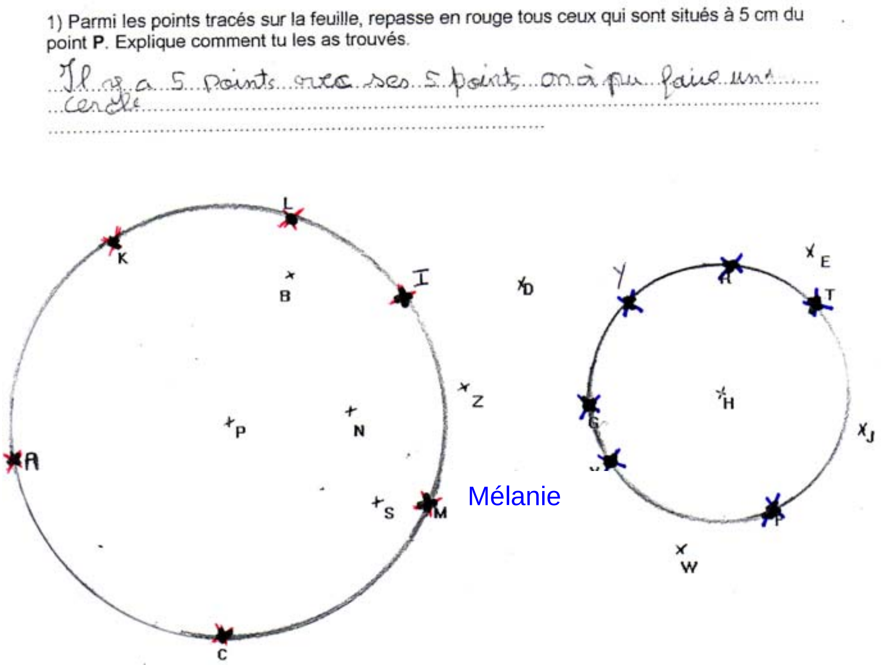


Hichem

De nouveau, on observera chez **Hichem**, comme pour la majorité de la classe, la difficulté d'exprimer sa démarche en utilisant des termes mathématiques.

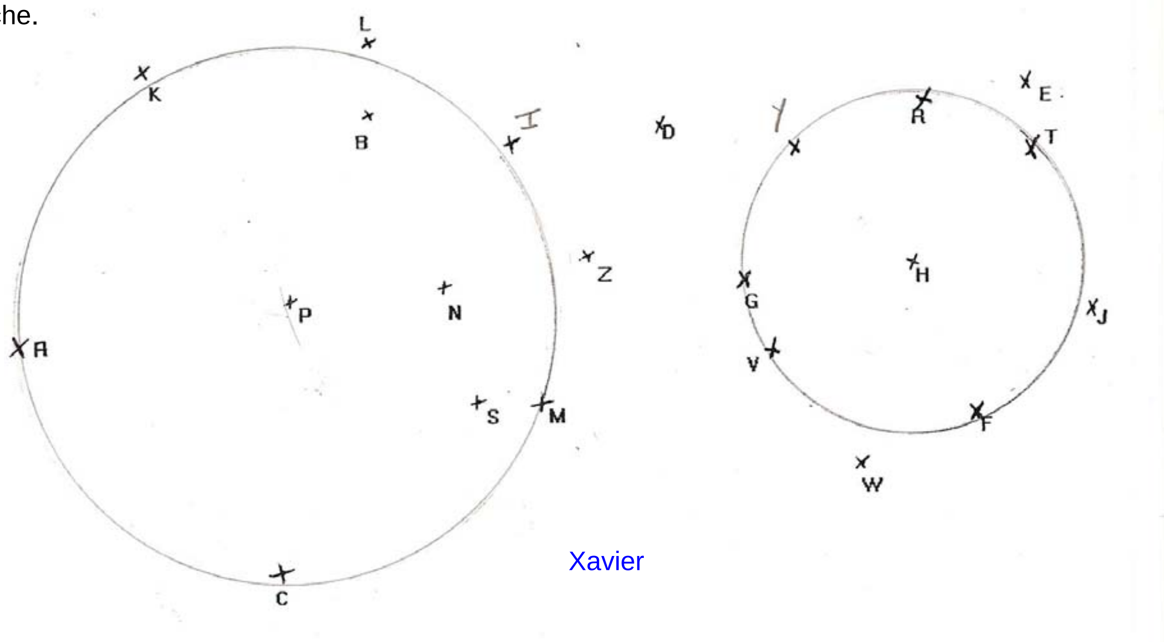
Le « comment » de la consigne *« Comment les as-tu trouvés ? »* incite les élèves à décrire tout ce qu'ils ont fait réellement.

Mélanie va prendre une ouverture du compas de 5 cm, puis à partir du point P, elle cherche les points qui vérifient cet écartement. Les points sont obtenus un à un (cf la séance du DVD). Puis elle écrit que finalement les points trouvés sont bien placés sur un cercle (de centre P).
Elle n'utilise donc pas la propriété caractéristique du cercle pour répondre à la question. Cette propriété n'est pas encore un outil pour elle.



Mélanie

Xavier utilise une bonne démarche de résolution (il trace en premier les cercles puis en déduit les points cherchés – cf la séance du DVD) mais les problèmes liés à la précision de construction des cercles ne permettent pas à Xavier de répondre correctement aux questions. D'autre part cet élève ne donne aucune explicitation de sa démarche.



Xavier

Il est ensuite important de retravailler avec les élèves sur les écrits produits lors de la justification des réponses fournies.
Alors qu'Hichem décrit sur sa feuille une procédure technique pour trouver les points correspondants à la consigne, il est capable de donner seul à l'oral la réponse : « *j'ai tracé un cercle de rayon 5 cm puis j'ai repassé en rouge les points qui sont sur le cercle.* »
C'est l'apprentissage de ce genre d'argumentation qu'il faut viser et donc il est important que les réponses des élèves à cette partie de la question soient retravaillées avec l'ensemble de la classe.

Exercice 3

Cet exercice a été très révélateur des capacités des élèves à remplir un contrat didactique, c'est à dire à donner une mesure à tout prix. L'exercice initialement prévu posait la question : *« Peux-tu donner la longueur des segments suivants…? »* sachant que les élèves ne disposaient que du compas et que de la longueur KL= 5 cm.

Premier type de réponses :

Plus de la moitié des élèves de la classe a donné une réponse concernant des segments dont aucune information ne permettait de trouver leur longueur. Leur démarche a été très intuitive et perceptive, ce que la vidéo reflète bien. D'autre part, ils ont globalement une bonne estimation des mesures de longueurs et ainsi leurs résultats ne sont pas aberrants.

Voici quelques résultats fournis :

Xavier

KB = *5,2 cm*… KA = *7,5 cm*…… KM = *5,1 cm*…… KE = *2 cm*……. HD = *5,5 cm*……

KT = *5 cm*…… KR =*5 cm*…… BC = *2,5 cm*…… KF = *5 cm*……… GE = *4,5 cm*………

Explique ta méthode :…*j'ai utilisé le résultat de [KL] et j'ai reporté sur les autres mesures*………………
Peux-tu donner les longueurs d'autres segments ? si oui lesquelles ?..*6,6 cm 3,3 cm*…………………………………………

Sarah

KB = *5 cm*… KA = *8,4 cm*…… KM = *5 cm*…… KE = *2cm*……. HD = *5,5 cm*……

KT = *5 cm*…… KR =*5 cm*…… BC = *2,3 cm*…… KF = *5 cm*……… GE = *4,5 cm*………

Explique ta méthode :… ………………
Peux-tu donner les longueurs d'autres segments ? si oui lesquelles ?..…………………………………………

Hichem

KB = *5 cm*… KA = *8 cm*…… KM = *5 cm*…… KE = *2 cm*……. HD = *5,5 cm*……

KT = *5 cm*…… KR =*5 cm*…… BC = *2 cm*…… KF = *5 cm*……… GE = *4 cm*………

Explique ta méthode :……………………………………………………………………………………………….………………
Peux-tu donner les longueurs d'autres segments ? si oui lesquelles ?..*KW= 5 cm KP = 5 cm KC = 6 cm*………………

Belkacem

KB = *5 cm*… KA = *7,5 cm*…… KM = *5 cm*…… KE = *1,5 cm*……. HD = *5,3 cm*……

KT = *5 cm*…… KR =*5 cm*…… BC = *2 cm*…… KF = *5 cm*……… GE = *4,8 cm*………

Explique ta méthode :…*j'ai fait avec mon compas*………………
Peux-tu donner les longueurs d'autres segments ? si oui lesquelles ?..*non*…………………………………………

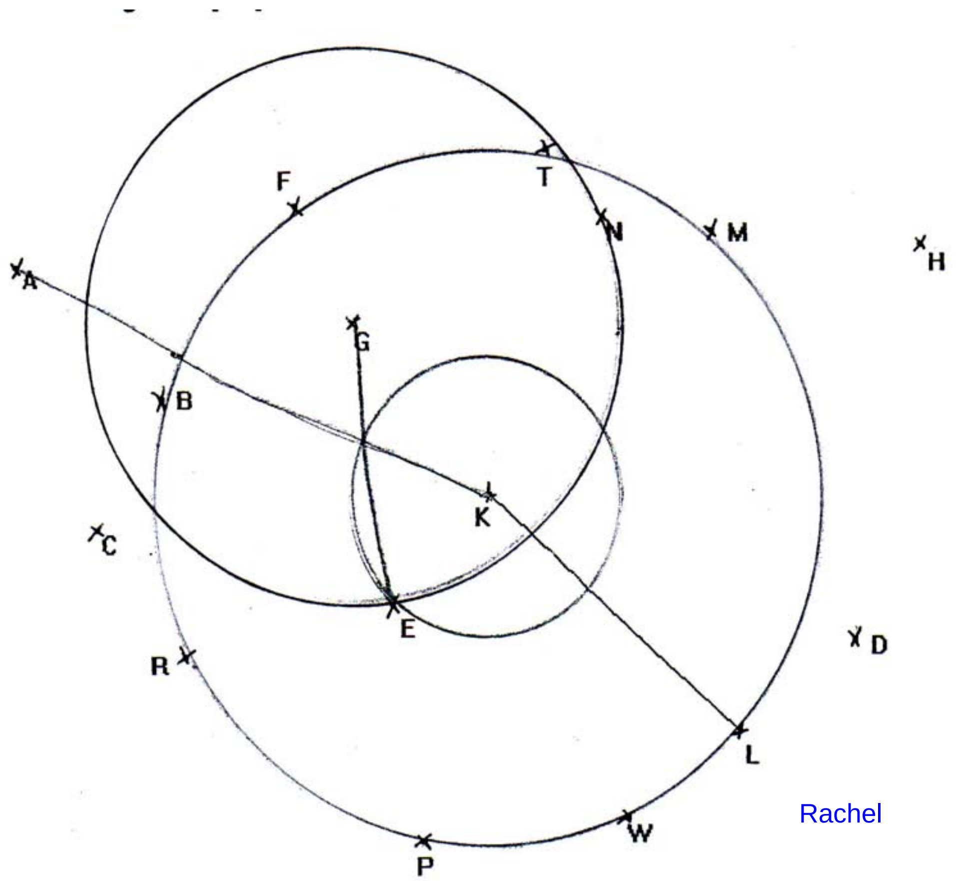
Sur ces quatre exemples représentatifs des productions d'une majorité des élèves, on constate un accord d'approximation des longueurs potentiellement demandées. Il s'avère que la situation de l'enseignant est souvent délicate lorsque les élèves s'accordent sur des réponses fausses et ne veulent pas démordre de la justesse de leur argumentation.
On remarque aussi que les réponses de Xavier concernant la longueur des segments [KB] et [KM] laissent perplexes puisque les points B et M sont bien situés sur le cercle de centre K et de rayon 5 cm. On peut alors penser que le manque de précision de l'outil compas va desservir la compréhension de la notion chez cet élève.

Deuxième type de réponses :

Une autre partie de la classe (7 élèves) a répondu correctement aux questions de cet exercice, c'est à dire en donnant la mesure des longueurs possibles. Deux modalités de réponses sont observables : soit *aucune mesure* n'est indiquée quand cela n'est pas possible, soit l'élève a écrit *non* sur les pointillés. Dans chaque cas le cercle de centre K et de rayon KL est tracé.

Troisième type de réponses :

Rachel a essayé de répondre aux questions en traçant différents cercles de centre K ou de centre G puisque la distance GE était demandée. Elle estime, elle aussi, la distance KA à 7,5 cm.



Rachel

Analyse didactique

<u>Analyse a priori</u>

Connaissances mathématiques en jeu

Il s'agit de l'appropriation du lien entre l'équidistance de points et leur appartenance à un même cercle.

Variables didactiques

Les outils de construction autorisés constituent la principale variable didactique. Les procédures devraient petit à petit s'orienter vers des procédures expertes utilisant le cercle pour résoudre des problèmes de lieux de points. La règle graduée perd de son poids au profit de l'usage du compas.

Difficultés prévisibles

- Le recours systématique des élèves à la droite graduée pour résoudre les problèmes de longueur.
- Garder une approche parcellaire de la tâche et ne pas concevoir le cercle comme un ensemble de points équidistants d'un autre.

<u>Analyse a posteriori</u>

Remarque : suite à l'analyse a posteriori, nous proposons la modification de l'énoncé de l'exercice 3 afin de faciliter l'appropriation de la propriété des points qui appartiennent ou qui n'appartiennent pas au disque ou à l'intérieur du disque et non sur le cercle.

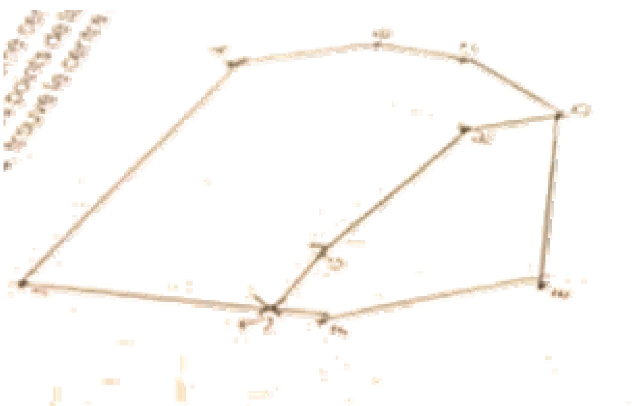
Du côté des élèves

<u>Concernant l'exercice 1</u>

Cet exercice, tiré des évaluations nationales 6^{e} de 2000 et 2004, teste la reconnaissance d'un cercle comme un ensemble de points équidistants d'un point donné, cette équidistance étant vérifiée par la mesure de longueur de segments à l'aide de la règle graduée. Ce type d'exercice est assez inhabituel pour les élèves. On ne leur demande pas de construire ou de tracer un cercle connaissant le centre et le rayon mais on leur dit qu'un cercle se « cache » sous des points tracés sur la feuille et qu'il s'agit de trouver le centre de ce cercle.
Cet exercice déstabilise beaucoup d'élèves qui n'y retrouvent pas une tâche connue (voir analyse de productions). Face à l'incompréhension de la consigne, les élèves réalisent une tâche qu'ils savent faire : relier, par ordre alphabétique, les points entre eux à l'aide de segments. À partir de cette démarche, certains trouvent le centre du cercle, d'autres ne le trouvent pas.
La majorité des élèves trouvera le centre du cercle, souvent après une démarche perceptive qu'ils vérifieront à l'aide d'une procédure mesurage.

Salim propose le point I comme centre du cercle et les explications qu'il donne nous laissent souvent bien dépourvus. *« Il est plus séparé avec deux lettres », « il est plus haut »* et il a écrit *« j'ai fait avec la règle graduée, j'ai fait plein de traits sur les points».* Cet élève ne semble pas donner du sens aux notions de cercle et de centre.

6



Séance 2 : Analyse didactique (suite)

Concernant l'exercice 2

On remarque que pour beaucoup d'élèves, le cercle devient un outil pour résoudre des problèmes d'équidistance.
Par exemple, Hichem trace immédiatement un cercle pour répondre aux questions.
En revanche, d'autres élèves restent « collés » à la procédure de l'exercice précédent et continuent en utilisant la règle graduée.
L'acquisition de la connaissance se faisant de façon différenciée par les élèves, elle occasionne des difficultés de gestion du temps dans la classe. D'autre part, les activités géométriques utilisant des constructions permettent la diffusion de procédures d'un élève à un autre sans que pour autant cela fasse sens pour celui qui reproduit.
Chaque question est constituée de deux parties : la première qui permet l'action et la suivante qui exige l'explication de l'action. La gestion de l'hétérogénéité s'opère souvent par des attentes différentes de l'enseignant pour ces deux parties.

On constate aussi que la consigne « Repasser en rouge les points... » est mal interprétée puisque beaucoup de rayons sont repassés en rouge à la place des points. Est-ce une confusion entre les notions de *points du cercle* et *distance de ce point au centre du cercle* ? (voir l'analyse de production d'élèves)

Le zoom opéré sur la vidéo permet de repérer une erreur fréquente pour le mesurage de longueur : Mehdi prend sa règle et démarre le mesurage à partir de la graduation 1 de la règle graduée. Cette erreur prototypique devrait être repérée en cycle 2 par les enseignants qui doivent être très vigilants afin que tous les élèves arrivant en cycle 3 ne fassent plus cette erreur.

Concernant l'exercice 3

Cet exercice provoque un grand étonnement chez l'enseignant, il n'imaginait pas que ses élèves puissent mesurer n'importe quelle longueur de façon précise avec le compas et surtout de pouvoir affirmer que cette démarche est correcte.
Pour une partie non négligeable des élèves, le mesurage à l'œil ne pose pas de problème. Ici des réponses étaient attendues, les élèves les ont données même quand cela était impossible. C'est un bon exemple du fonctionnement du **contrat didactique** au sein d'une classe. Le débat avec Nicolas illustre ce passage.
La mise en commun des réponses concernant la longueur KA va permettre de poser effectivement le problème à la classe, et cet exemple de **conflit socio-cognitif** va entraîner la nécessité de fournir une réponse s'appuyant sur des connaissances mathématiques pour savoir qui a finalement raison. L'exposition, au tableau, de l'ensemble des résultats pour cette même réponse permet aux élèves de constater le problème qu'il va falloir traiter.
7
Suite à cette analyse, nous avons modifié l'énoncé de l'exercice 3, afin de mieux viser la compétence en jeu. Il n'est plus demandé de donner, si possible, une mesure de longueur de segments mais il est demandé de dire si les segments ont une longueur plus petite, plus grande ou égale à 5 cm.

Globalement, par la résolution de ces exercices, on observe que le lien entre cercle et équidistance n'est pas encore assimilé par une grande partie des élèves de la classe. Il faut donc poursuivre ces activités en recourant systématiquement à une verbalisation de l'action pour que ce lien se construise.

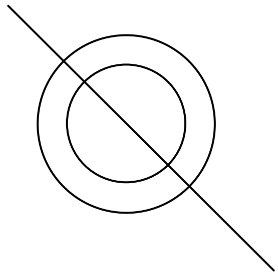
Par ailleurs, il apparaît qu'un bon nombre de compétences concernant le lien entre le compas (objet technologique) et le cercle (objet géométrique) n'est pas acquis. Ainsi les notions de centre, de rayon et de diamètre, insuffisamment travaillées au cycle 2 et en CE2, restent bien confuses pour les élèves. (voir dans le DVD, la rubrique ***éclairage sur***….***lien entre cercle et compas***).

Concernant la notion de **diamètre**, Nicolas illustre bien la difficulté de donner du sens à cet objet. Pour lui, le diamètre d'un cercle vaut deux fois le rayon, sous-entendu deux fois la mesure de la longueur du rayon, et n'est pas la corde passant par le centre du cercle. Il se réfère au contexte numérique de la mesure et non au contexte géométrique (corde passant par le centre) (voir dans le DVD, la rubrique ***éclairage sur***… ***le diamètre***).
Ces difficultés sont souvent liées à un enseignement formel de la géométrie où la priorité est donnée à des formules et à la prise en compte des mesures de grandeurs (*diamètre = 2 x rayon*) plutôt qu'à un enseignement fonctionnel qui permet de donner du sens aux notions abordées.
8

Il serait souhaitable de dire que dans un cercle, un diamètre est un segment (ou une corde) qui joint deux points du cercle en passant par le centre, comme il est aussi souhaitable d'évoquer le rayon comme un segment dont les extrémités sont d'une part le centre du cercle et d'autre part un point de ce même cercle. Dans ce cas, si le rayon est un segment, il faudra dire longueur du rayon comme on dira longueur du diamètre.

Comme ces termes sont souvent utilisés en faisant référence à des sens différents alors il faudrait se mettre d'accord sur ce qu'il faut faire à l'école (de quoi parle-t-on ? dans quel contexte on se place ?) pour éviter toutes les ambiguïtés de langage.
***Voici un extrait de la brochure Mots V**[3] donnant des informations sur l'usage quotidien de ces termes.*
« Diamètre comme rayon sont utilisés successivement avec des sens différents.
Par exemple « traçons le cercle de centre E et de rayon 3 cm ; la tangente à ce cercle en l'un de ses points, G, est perpendiculaire au rayon [EG] ».
Le diamètre lui peut désigner :

- *soit une longueur : « le diamètre est le double du rayon » ;*
- *soit un segment : « un diamètre est une corde qui passe par le centre du cercle » ;*
- *soit une droite : « le diamètre à deux cercles concentriques est un axe de symétrie pour la figure ».*



Du côté de l'enseignant

La **phase de rappel** de la séance 1 se fonde sur les productions des élèves, ce qui est essentiel pour permettre la rétroaction des connaissances, et s'appuie également sur l'affiche-synthèse, modifiée suite à l'analyse a posteriori de la séance précédente.

Néanmoins, il est préférable d'effectuer cette rétroaction à partir du savoir en jeu plutôt qu'à partir des tâches que les élèves devaient accomplir. Par son questionnement, l'enseignant va permettre l'acquisition des savoirs mathématiques, indépendamment de l'activité proposée.

9

Les **mises en commun** restent des moments essentiels pour les apprentissages. Elles doivent prendre en compte ce qui a déjà été anticipé dans l'analyse a priori et les observations des productions des élèves pendant la recherche. Ce n'est qu'à cette condition qu'elles jouent leur rôle dans l'acquisition des connaissances mathématiques.

Concernant **l'exercice 1**, quatre solutions sont proposées par les élèves : les points H, I, G et F. Une situation bien intéressante qui va nécessiter le recours à l'argumentation autre que celle de valider ou invalider la solution par l'usage du compas.
Le retour à la propriété caractéristique du cercle va prendre ici tout son sens.
Par son questionnement, l'enseignant permettra de faire anticiper les élèves sur la validation d'une solution *: « Si H est le centre du cercle passant par les points A, B, C et D, alors que peut-on dire des distances HA,HB,etc... ? »*
Le recours à la validation par le compas permettra *in fine* de trancher sur la solution et de persuader les élèves pas encore convaincus. C'est cette seule validation qui permet de mettre en évidence le fait que le point G est la seule solution possible.
Lors du tracé du cercle, validation de la solution, la découverte d'un nouveau point (I) sur ce même cercle permet de demander aux élèves d'anticiper la mesure de la longueur GI. *« Que peut-on déduire de la longueur GI ? »* Ces moments sont importants pour l'appropriation de la propriété des points du cercle.
Ici l'analyse a posteriori permet de mieux anticiper les arguments à fournir lors d'une prochaine mise en œuvre.

[3] *Mots V*, APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), 1980.

Dans la présentation de **l'exercice 2**, l'enseignant évoque le mot de « centre » pour le point P ce qui permet aux élèves de s'engager dans une procédure. Il donne implicitement une solution, la solution experte avant même que les élèves ne se lancent dans la recherche.
De nouveau, la mise en commun est essentielle pour les apprentissages. L'enseignant choisit d'envoyer au tableau une élève, Elisabeth, pour laquelle il a observé une démarche juste mais pas complète car ne donnant pas la totalité des solutions. Il peut être alors intéressant de demander à l'élève suivant de compléter les propositions de sa camarade ou d'expliquer en quoi elles ne sont pas performantes plutôt que lui demander dès le début sa propre procédure qui est totalement différente. Cette démarche permet de valoriser le travail précédent tout en soulignant ses limites.

10

Concernant **l'exercice 3**, nous rencontrons une difficulté qui ne semble pas en être une pour certains élèves mais qui peut être source de confusion, c'est le passage des mesures faites sur la feuille de papier à celles faites au tableau. L'enseignant dit aux élèves *« 5 cm cela fait 20 cm pour nous au tableau »*. Il est alors nécessaire d'expliciter l'agrandissement : *« Au tableau ma feuille a été agrandie quatre fois, donc les mesures de longueur sont agrandies aussi quatre fois. »*

Pour finir il est souhaitable de pouvoir clore la séance avec les élèves sur « ce que l'on sait faire maintenant grâce au cercle ».

Rôle du langage

Pour l'ensemble des exercices proposés aux élèves, la démarche de l'enseignant est la même, ce qui permet d'établir une constance dans le déroulement, une aide pour les élèves en difficultés, souvent déstabilisés par des ruptures dans l'organisation.
Les élèves lisent seuls l'énoncé puis le maître demande de quoi il s'agit et, quelle est la tâche demandée. Par cette démarche, il demande aux élèves une reformulation de l'exercice qui permet une meilleure appropriation de la tâche.

Néanmoins, en faisant expliciter le travail, il arrive souvent aux enseignants de donner inconsciemment la réponse aux élèves. Ils sont ainsi rassurés concernant la compréhension de l'exercice par leurs élèves.
Ici, l'énoncé de l'exercice 2 ne spécifiait pas qu'il y avait un cercle sous-jacent à la solution. Au contraire la construction du cercle devait permettre une solution experte. Mais lorsque le maître commente l'énoncé de cet exercice, il a en tête la réponse au problème et va sans s'en rendre compte la donner aux élèves. En posant la question « *le point P comment on l'appellera pour tous ces points ?* », il obtient la réponse attendue : *« le centre »*. Mais de quel centre s'agit-il ? Le demander reviendrait à fournir la totalité de la réponse au problème.

11

Pendant la mise en commun de l'exercice 3, l'enseignant pris dans l'action de la classe, et s'étonnant des réponses des élèves sur des longueurs impossibles à trouver, demande : « *Quelle est la mesure que vous pouvez faire avec votre compas ?* » alors qu'un compas n'est pas un instrument de mesure. C'est un instrument qui permet de reporter ou de comparer des longueurs. On repère toute la difficulté de conserver un langage rigoureux pour éviter toute ambiguïté dans la construction des connaissances mathématiques.

Séance 3
Fiche de préparation

Objectifs

- Introduire des dessins à main levée.
- Donner du sens à la propriété caractéristique du cercle en la faisant fonctionner sur des dessins à main levée.

Tâche des élèves

Résoudre des problèmes.

Matériel

Différent selon les phases du déroulement de la séance.

Organisation

Travail individuel, avec mise en commun.

Déroulement

Phase 1 (collective) ***: énoncer les enjeux de la séance***

Consigne : *« Pendant les séances précédentes, nous avons vu la propriété des points d'un cercle. Quelle est-elle ? »*
Le maître attend que les élèves énoncent le fait que tous les points d'un cercle sont à égale distance du centre de ce cercle. Il peut renvoyer à **l'affiche de référence** de la séance 1.

Puis *« Aujourd'hui, nous allons utiliser cette propriété pour trouver la longueur de segments sans avoir recours aux instruments. Vous aurez à résoudre deux exercices. »*

Phase 2 (collective puis individuelle) ***: résolution de l'exercice 1***

- Distribuer **l'exercice 1** et laisser les élèves prendre individuellement connaissance de l'énoncé. La même figure est reproduite agrandie au tableau.
- Puis faire reformuler par les élèves le problème posé en aidant à l'appropriation de celui-ci par un questionnement étayé :
  « Qu'est-ce qu'un dessin à main levée ? »
  C'est un dessin qui n'est pas précis mais qui permet de raisonner grâce à des informations qui sont données en plus.
  « De quoi est composée cette figure ? »
  Un cercle de centre C et de rayon… (ou d'un diamètre…) et d'un carré ABCD…
  « Qu'elle est l'unité de mesure utilisée dans cet exercice ? »
  L'unité de mesure est « le carreau ».
  « Pour la question 1, que devez-vous trouver ? » etc.
- Préciser que les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé.

Remarque concernant ***le matériel*** : le maître peut ne donner aucune consigne concernant le matériel autorisé et il observera son usage pendant le travail des élèves. Il peut aussi décider d'interdire dès le début l'usage de la règle graduée en rappelant que sur un dessin à main levée il est impossible de mesurer puisque les tracés ne sont pas précis.

Séance 3 : Fiche de préparation (suite)

Phase 3 (collective) ***: mise en commun***

Les observations des procédures des élèves durant la résolution vont permettre au maître de choisir une stratégie pour la mise en commun.
Les réponses attendues concernant les longueurs des segments sont uniques mais risquent d'être très diverses de la part des élèves, il faudra donc bien savoir, d'une part, qui a raison et d'autre part, comment en être sûr.
Il sera alors pertinent de faire un « listing » des valeurs trouvées pour la longueur d'un même segment, de demander aux élèves de présenter leurs procédures et de faire argumenter sur la validité de leurs réponses. La construction, sur papier quadrillé et aux vraies dimensions, de la figure permet une validation pour tous (réponse à la question 2).

Phase 4 (collective et individuelle) :***réinvestissement de l'usage de la propriété d'équidistance pour l'exercice 2***

Cet exercice est issu des évaluations nationales de 6^{e} (1997 et 1998).
Le déroulement de cette phase est identique à celui de la phase 2.

Phase 5 (collective) ***: mise en commun***
Identique à la phase 3.

Phase 6 (collective) ***: synthèse***

La synthèse portera sur le fait que grâce à la propriété de l'équidistance des points appartenant à un même cercle, il est possible de donner la longueur de segments sans avoir besoin de les mesurer. Cela sera aussi l'occasion de mettre en évidence la validité d'un résultat à partir d'un raisonnement, ce qui incite les élèves à ne plus utiliser la perception ni les instruments pour résoudre un problème de géométrie et ce qui les prépare à la géométrie pratiquée au collège.

C'est aussi l'occasion de retravailler sur le statut des dessins à main levée.

Analyse de productions d'élèves

Exercice 1

Cet exercice comporte deux questions qui ne sont pas de même nature. La réponse à la première s'appuie sur un raisonnement à partir de connaissances sur la propriété d'équidistance des points d'un cercle alors que la réponse à la seconde mobilise des compétences de construction de figures géométriques sur du papier quadrillé.

Concernant la question 1, dans la classe nous avons recueilli trois types de réponses.

Premier type :

Les élèves qui prennent les mesures sur la figure à main levée, soit avec la règle, soit avec le compas, soit par conversion d'échelle avec le papier quadrillé n'ont pas pris en compte le fait que l'unité de longueur est le carreau et non le centimètre.

Sherrylin
« CF mesure 2,4 cm, CE mesure 2,1cm ; DE mesure 3,9 cm et BF mesure 4 cm. Grâce à la règle, j'ai mesuré les segments CF, CE, DE, BF. »

Alia
« *CF 2cm1mm ; CE 2 cm ; DE 3cm 8mm, BF 4cm. J'ai pris ma règle et j'ai mesuré*. »

Hichem
« Oui on peut trouver les longueurs des segments grâce à la règle et au compas car on prend le compas on met la pointe sur le centre puis la mine du crayon sur le point F puis après on met la pointe sur le zéro de la règle puis la mine sur le total. »

Elisabeth
« *5 carreaux font 3,2 cm donc CF fait 1,5 cm, CE fait 1,5 cm, DE fait 5 cm, BF fait 5 cm.* »

Deuxième type :

Les élèves qui savent que la figure n'est pas précise et donc qu'il leur est impossible de donner une valeur correcte à la longueur des segments.

Mylène
« *Non car la figure n'est pas précise car elle a été faite à la main. Les figures faites à la main ne sont pas du tout précises*. »

Erika
« *Non on ne peut pas connaître la longueur de CE, DE et BF parce que les traits ne sont pas droits.* »

Ben Youcef
« Non je ne peux pas donner la longueur de ces segments. »

Troisième type :

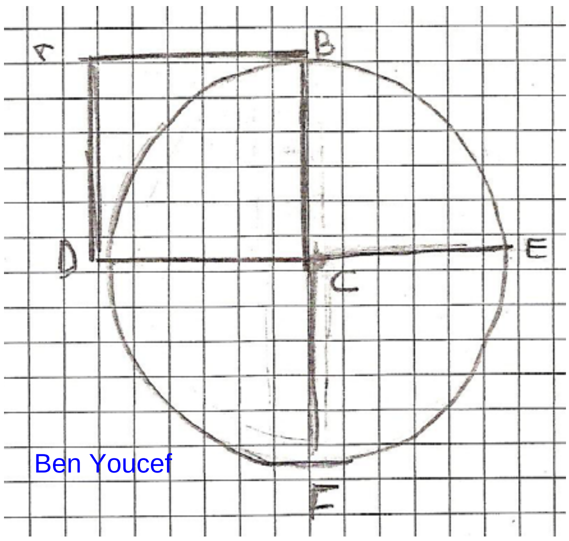
Les élèves qui donnent un résultat en utilisant un raisonnement , implicitement ou explicitement.

Mike
« *Oui car le carré est de 5 carreaux, soit on fait le double de 5 ou soit 5 pile. CF : 5 carreaux, CE : 5 carreaux, DE : 10 carreaux, BF : 10 carreaux*. »

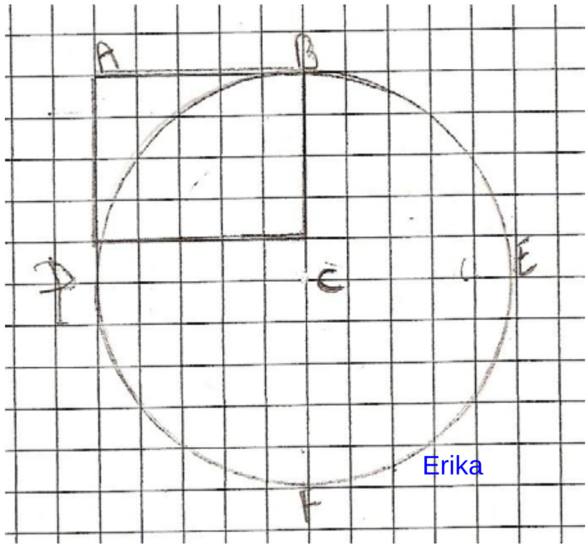
Rachel
« *Oui parce que l'on sait que le carré, sa longueur est de 5 carreaux, on peut aussi savoir que DE fait 10 carreaux en multipliant par deux : 5 x 2= 10 carreaux.* »

Ici les réponses dépendent beaucoup de la compréhension par les élèves du statut du dessin à main levée. Le fait de laisser disponible la règle graduée permet à l'enseignant de constater ce que les élèves ont compris du statut de la figure (cf analyse didactique).

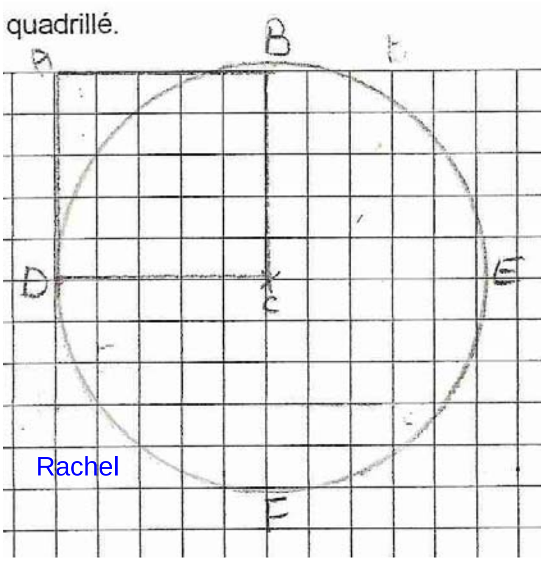
La **question 2** est globalement bien réussie puisqu'il s'agit d'une tâche plus connue : construction sur quadrillage. Néanmoins des imprécisions de tracés sont encore présentes sur plusieurs productions.
Cette construction permettait de valider ou d'invalider les réponses à la question 1 mais ceci n'est pas toujours le cas lorsque les constructions sont erronées ou trop imprécises. La question est alors posée aux élèves sur la validité des réponses *« où est-on sûr de la bonne réponse quelle que soit la construction ? et quelles que soient les dimensions du quadrillage ? »*



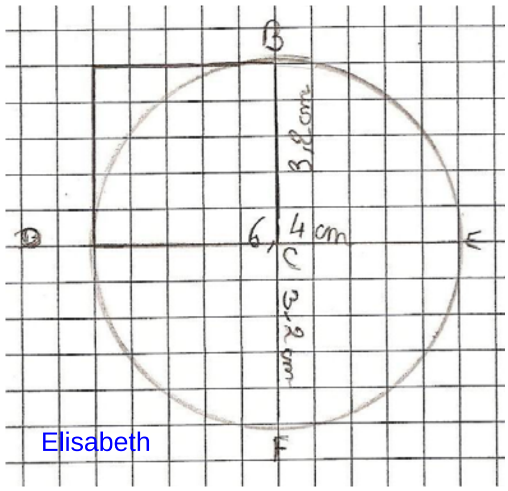
Ben Youcef fait partie des élèves qui n'ont pas perçu les propriétés géométriques portées par le papier quadrillé (angles droits et unité de longueur représentée par la longueur d'un côté du carré de base). Il construit donc la figure n'importe où sur le quadrillage, les sommets du carré ne sont pas positionnés sur des nœuds du quadrillage. Par ailleurs, la construction n'est pas rigoureuse.



Erika construit un rectangle au lieu d'un carré



Rachel ci-contre donne des résultats corrects à la question 1 qui sont contredits par une construction pas tout à fait précise.



Elisabeth ajoute sur sa construction les longueurs des segments qu'elle a mesurés avec la règle graduée mais qui sont en contradiction avec les réponses qu'elle a fournies à la question 1. Comme beaucoup d'élèves, ce type de contradiction ne l'ennuie pas.

Exercice 2

Cet exercice est issu des évaluations nationales 6e de 1997 et 1998[4]

Cet exercice est donné à la suite de l'exercice 1 et après la mise en commun pour une correction. Pendant cette correction un bref rappel a été fait sur le statut du dessin à main levée.

La première difficulté relevée est la position du point E. Beaucoup d'élèves n'ont pas compris la position du point E comme l'intersection du cercle avec le côté [AB] du rectangle.
D'autres élèves ne maîtrisent pas les propriétés du rectangle, en particulier le fait que les côtés opposés sont de même longueur.
Beaucoup n'ont pas encore compris le statut du dessin à main levée et poursuivent dans leur procédure précédente.

Dans cette classe, nous retrouvons les mêmes types de réponses que ceux observés lors de l'évaluation nationale.

Premier type :

Les élèves qui utilisent leur règle graduée ou le compas (report de la longueur de l'ouverture du compas sur la graduation de la règle graduée.
« J'ai mesuré avec la règle : 3,3 cm. »
« J'ai pris le compas, je l'ai posé sur E jusqu'à B puis j'ai posé sur la règle et j'ai trouvé 3,1 cm. »
« Il fait 4,3 cm. J'ai mesuré EB avec la règle : 3 » **Il est fort probable que cet élève ait démarré le mesurage à la graduation « 1 » de sa règle.**

Deuxième type :

Les élèves qui pensent que le point E est situé à peu près au milieu du segment [AB] et qui trouvent
EB = 5 cm.

« A et B fait 10 cm donc AE mesure 5 cm, la moitié. »

Troisième type :

Les élèves qui émettent un raisonnement géométrique en lien avec les figures présentées.

« La longueur EB est de 6 cm. Je sais que la longueur de A à B est de 10 cm et que le rayon est de 4 cm alors je fais 10 – 4. »

Quatrième type :

Les élèves qui n'ont pas compris quel était le segment dont on demandait la longueur, c'est à dire qui n'ont pas repéré le segment [EB].

« EB fait 10 cm car si DC fait 10 cm de longueur c'est obligé que cela soit de la même longueur. »
« J'ai mesuré avec la règle et j'ai trouvé 6 cm. » **Ce qui correspond à la longueur du segment [DC] sur le dessin.**

4 En annexe, présentation des résultats de cet exercice aux évaluations nationales.

Analyse didactique

<u>Analyse a priori</u>

Connaissances mathématiques en jeu

Les propriétés des points du cercle ainsi que les propriétés des longueurs des côtés du carré et du rectangle.

Variables didactiques

- La première variable est la mise à distance des figures géométriques proposées aux élèves. Le fait que les figures soient dessinées à main levée ou pas a finalement moins d'incidence que le fait de les mettre uniquement au tableau. Les élèves ne peuvent prendre aucune mesure, ils doivent raisonner avec les connaissances qu'ils ont.
- La deuxième variable possible est celle des instruments autorisés dans le cas où les élèves disposent d'un support. Si la règle graduée est interdite, les procédures sont différentes mais n'excluent pas celles d'une réponse par une approximation perceptive (type : c'est le milieu).

Tâche des élèves

Déterminer la longueur de segments faisant partie d'une figure complexe en utilisant des propriétés géométriques de ces figures.

Difficulté prévisible

Le statut de la figure dessinée à main levée.

<u>Analyse a posteriori</u>

Du côté des élèves

Comme il était prévu, les élèves majoritairement vont mesurer la longueur des segments demandés dans les deux exercices sans recourir aux propriétés géométriques du cercle, du carré et du rectangle.
Pour certains, ils savent qu'il ne faut pas mesurer sur des figures dessinées à main levée donc ils utilisent leur compas pour obtenir une longueur qu'ils mesureront ensuite avec leur règle graduée.

L'analyse géométrique des figures complexes semble aussi encore peu acquise. En effet face à l'exercice 2, la non-reconnaissance du point E comme intersection du cercle et du segment [AB] empêche en partie la compréhension de la question.

Du côté de l'enseignant

L'analyse a posteriori de cette séance permet de donner des pistes pour aider les élèves à se détacher de la mesure et mettre en place des raisonnements déductifs s'appuyant sur des propriétés géométriques.

La **mise à distance des figures** sur lesquelles les questions sont posées est une véritable variable didactique qui va permettre aux élèves de comprendre l'usage des propriétés géométriques qui sont en train de se construire.
Finalement, le fait que les figures géométriques soient représentées à main levée ou aux vraies dimensions importe peu si elles sont seulement affichées au tableau.
En revanche, les élèves ont interdiction de les reproduire aux vraies dimensions sur leur cahier.
Une autre solution, proposée par certains enseignants, est de donner des longueurs non représentables sur le cahier (telle 12 km) afin d'inciter à abandonner le recours aux mesures au profit d'un raisonnement s'appuyant sur des propriétés géométriques. Mais ils sous-estiment les capacités de leurs élèves à trouver des solutions : ceux-ci effectuent des tracés à des échelles adaptées.

Le fait **d’interdire des outils de construction**, constitue évidemment l’autre variable didactique.

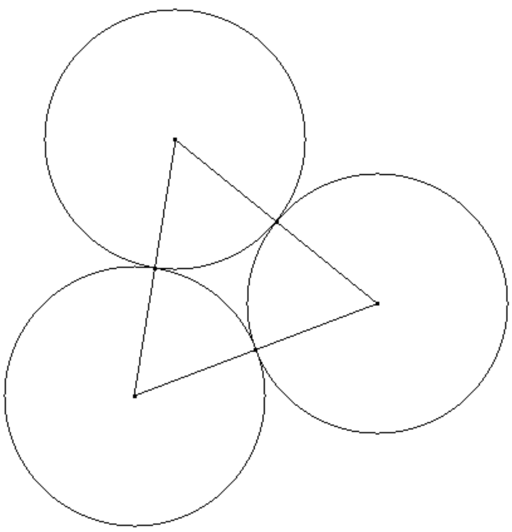
Concernant la difficulté observée dans l’exercice 2 (non repérage du point E), l’enseignant peut aider à l’analyse de la figure au tableau en repassant de couleur différente d’une part le cercle et d’autre part le rectangle. Cette difficulté est aussi liée à la construction de l’objet géométrique « point » qui peut être matérialisé par l’intersection de deux lignes pas nécessairement droites, un cas peu souvent rencontré à l’école.

Une phase systématique d’analyse des figures semble essentielle pour permettre aux élèves de rentrer dans une démarche argumentative pour résoudre des problèmes géométriques. Cette analyse permet de faire décrire les objets géométriques en présence, de faire rappeler les propriétés de ces objets, propriétés à utiliser pour obtenir les réponses aux questions posées.
Ce travail doit être très régulier dans l’année.

Voici des prolongements possibles avec des exercices du même type.

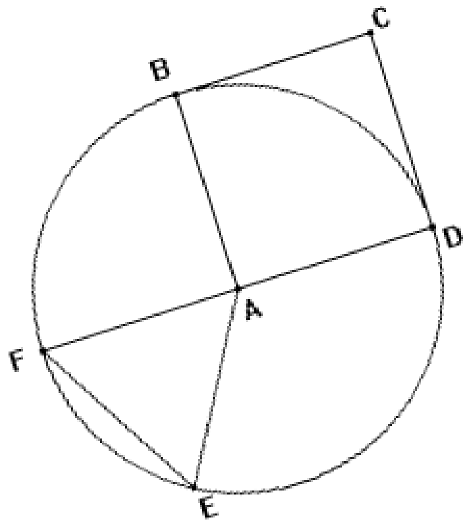
Exemple 1

Trois cercles de rayon de même longueur (4 unités) ont pour centre les sommets d’un triangle. Quelles sont les longueurs des côtés de ce triangle ?



Exemple 2

Les points B, D, E et F sont sur le cercle de centre A.
ABCD est un carré dont la longueur du côté est 7 cm.
La longueur du segment [FE] est la même que la longueur du rayon du cercle.
Quelles sont les longueurs des côtés du triangle AEF ?



Séance 4 :
Fiche de préparation

Objectif du maître

Faire découvrir l'usage du cercle et l'usage du disque pour résoudre des problèmes d'équidistance.

Tâche des élèves

Modéliser une situation de la vie réelle et la résoudre.

Institutionnalisation

Le cercle est un outil pour résoudre des problèmes d'équidistance.

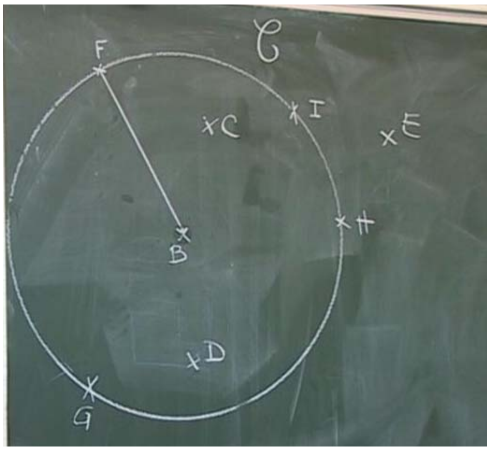
Matériel

- Le compas, règle non graduée et papier calque
- Les mêmes énoncés agrandis au tableau pour le maître

Organisation

Travail individuel, échange avec les voisins de proximité puis mise en commun.

Déroulement



***Phase 1** : rappel des propriétés des points du cercle*

À partir d'une figure constituée d'un cercle et de points situés sur le cercle, de points situés sur le disque et de points situés hors du disque, faire rappeler les liens avec la position et la distance de ces points au centre du cercle.
« Que peut-on dire des longueurs BF, BI, BH et BG ? »
« Où est situé le point E ? Que peut-on dire de la longueur BE ? »
etc.

Phase 2 : le problème de la recherche** **des bijoux

Le plan agrandi est reproduit au tableau

- Faire lire silencieusement l'énoncé puis faire reformuler la tâche.
- Vérifier la compréhension de la situation et du plan représenté dans l'énoncé.
- Mettre les élèves au travail tout en observant les différentes procédures.

Phase 2 bis : mise en commun et synthèse

Présentation des différentes procédures en argumentant la validité des solutions trouvées (deux endroits sont possibles pour trouver les bijoux).

La synthèse mettra en évidence que les points cherchés sont situés à l'intersection des deux cercles : celui de centre *le sapin* et de rayon 4 m et celui de centre *la statue* et de rayon 7 m. Cette synthèse devrait permettre de généraliser la construction de points qui sont situés à deux distances données de deux autres points.

Phase 3 : le problème du placement de la mangeoire des chèvres[5]

Une feuille de papier quadrillé est affichée au tableau

- Faire lire silencieusement l'énoncé puis faire reformuler la tâche.
- Vérifier la compréhension de la situation et répondre aux questions des élèves.
- Mettre les élèves au travail tout en observant les différentes procédures.

En fonction des difficultés rencontrées par les élèves durant la recherche, donner une aide concernant la représentation de la situation afin de relancer la recherche.

Phase 3 bis : mise en commun et synthèse

Présentation des différentes procédures en argumentant la validité des solutions trouvées : ici ce ne sont plus des points isolés qui sont solutions mais une surface du plan, intersection des deux disques.
Analyse de ces solutions en fonction de celles trouvées dans l'exercice précédent, rôle du cercle et rôle du disque.

Reprendre ce même problème en modifiant des longueurs :
« Et si la corde de la deuxième chèvre avait pour longueur 4 carreaux au lieu de 10 que se passerait-il ? »
ou bien
« Et si les deux cordes avaient pour longueur 8 carreaux que se passerait-il ? »
etc.

[5] *Suite à l'analyse a posteriori, l'énoncé de ce problème a été modifié* (voir **exercice modifié des chèvres**)

Si c'était à refaire

Suite à l'analyse a posteriori, voici une autre proposition concernant le déroulement de la résolution du problème de la mangeoire des chèvres.

Phase 1 : enjeu de la situation

Présentation par l'enseignant du travail qui va être réalisé.
« Vous avez été capables de résoudre le problème des bijoux pour lequel il vous avait été fourni un plan détaillé. Ce ne sera pas toujours le cas et vous devez savoir en réaliser un, seul. Pour cela nous allons résoudre un autre problème mais pour vous aider nous effectuerons deux étapes. »

Phase 2 : modélisation de la situation

Les élèves disposent d'une feuille unie sur laquelle figure une échelle des longueurs. De même une grande feuille unie est affichée au tableau.
Consigne : « *Voici une feuille dont la surface représente un champ dans lequel broute une chèvre. Cette chèvre est attachée par une corde à un piquet. La longueur de la corde est représentée par 10 mètres. Vous allez devoir déterminer l'espace du champ dans lequel la chèvre peut brouter.*
Pour cela placez le piquet que l'on appelle P, puis coloriez en rouge toute la zone que la chèvre peut occuper. »
Cette phase doit aider les élèves à modéliser la situation réelle, d'une part par l'usage de points géométriques pour représenter le piquet et la chèvre et d'autre part, par l'utilisation d'un segment pour matérialiser la corde tendue (dans certaines classes il est nécessaire de mimer la situation en simulant un animal au bout d'une corde).
La mise en commun, puis la synthèse devront faire apparaître le disque centré en P et de rayon une longueur représentant 10 mètres. Ce sera l'occasion de redonner du sens à l'ensemble des points d'un disque qui peuvent ici être tous atteints puisque la corde est souple.
On peut poursuivre la réflexion avec les élèves sur ce que nous obtiendrions si la corde était remplacée par une barre rigide.

Phase 3 : résolution du problème de la mangeoire

Les élèves disposent du problème de la mangeoire **des chèvres énoncé modifié** et une nouvelle feuille unie est affichée au tableau (la solution précédente est restée affichée).

Remarque : *dans l'énoncé, la mangeoire est remplacée par un petit seau qui peut être représenté par un point alors qu'une mangeoire réelle peut être assimilée à un rectangle dont les dimensions sont très grandes*.

Faire lire silencieusement l'énoncé puis faire reformuler la tâche.
Questionnement de l'enseignant : *« Par quoi devez-vous commencer pour pouvoir résoudre ce problème ? »*
Il attend comme réponses : « *représenter les deux piquets* (qu'il peut proposer d'appeler P_1 et P_2) *puis colorier de deux couleurs différentes l'espace que peut parcourir chacune des chèvres* ».

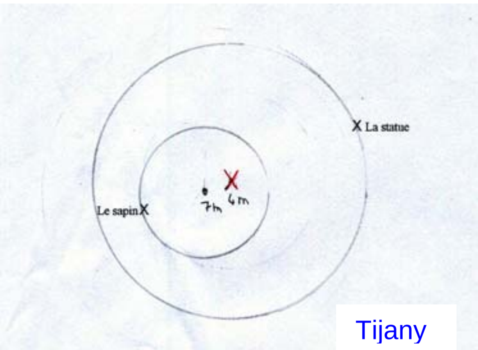
Ensuite laisser les élèves résoudre le problème.
La mise en commun et la synthèse devront mettre en avant plusieurs éléments :
- comment modéliser géométriquement une situation réelle ;
- utilisation de la notion de cercle et de disque pour résoudre des problèmes de distances ;
- la représentation de la double contrainte (identique à la recherche des bijoux mais ici il s'agit d'une surface et non plus de points isolés.

Analyse de productions d'élèves

La recherche des bijoux

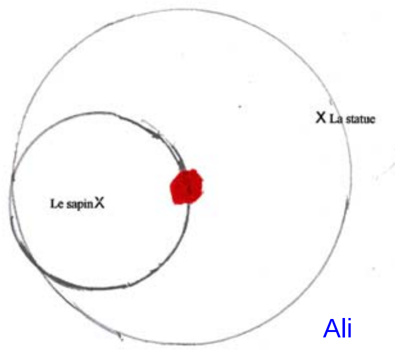
La solution à ce problème est donnée par la construction de deux cercles, l'un centré en « *la statue* » et de rayon 7 unités, l'autre centré en « *le sapin* » et de rayon 4 unités. L'intersection de ces deux cercles donne deux points qui représentent les lieux où peuvent se cacher les bijoux.

Parmi les productions erronées



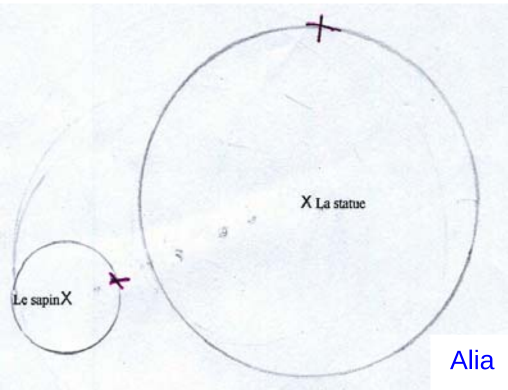
Tijany

Tijany construit un point à 7 m de la statue et un point à 4 m du sapin. Puis il trace deux cercles prenant ces points pour centre : le cercle de rayon 4 m est centré sur le point nommé « 7 m » et le cercle de rayon 7 m est centré sur le point nommé « 4 m ». Il décide de tracer en rouge l'emplacement des bijoux. Il est fort possible qu'ayant vu ses camarades tracer des cercles, il ait choisi d'en faire autant mais sans forcément y donner du sens.



Ali

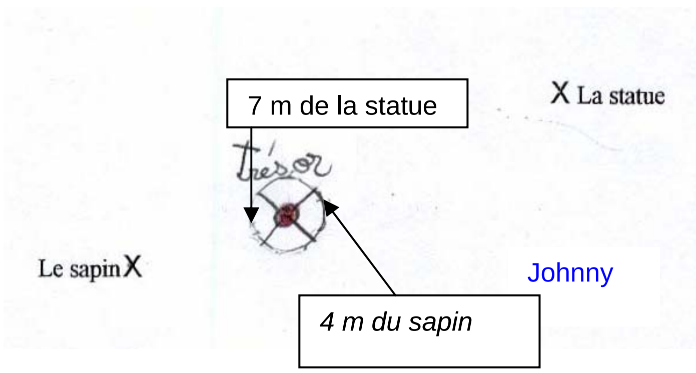
Pour sa part, **Ali** a tracé un cercle de rayon 4 m centré en « *le sapin* » puis il choisit un point de ce cercle qui est à peu près à 7 m de la statue, ce point est presque aligné avec les points « statue » et « sapin ». Puis il trace un cercle centré en ce nouveau point et de rayon 7 m. Il décide de marquer en rouge le point qui est bien à 4 m du sapin et presque à 7 m de la statue. Cette démarche est intéressante mais ne permet pas d'obtenir les deux solutions possibles. Il faut observer aussi le manque de précision dans les mesures prises.



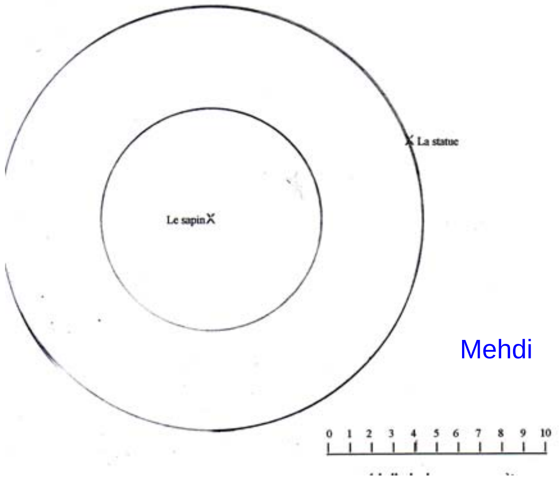
Alia

Alia trace un cercle de diamètre 4 m centré en « *le sapin* » et un cercle de rayon presque 7 m centré en « *la statue* ». Ces deux cercles n'ont pas d'intersection commune. Mais Alia propose deux endroits possibles pour les bijoux, un pour chaque contrainte.
On repère aussi beaucoup d'essais de pointe de compas pour décider quel cercle tracer.

Johnny cherche un point, aligné avec ceux représentant la statue et le sapin, et qui soit aux distances indiquées. Il en trouve deux qui constituent les extrémités d'un segment dont il va prendre le milieu, milieu qui devient le centre d'un cercle passant par les deux points en question. Il choisit de placer les bijoux au centre de ce petit cercle.



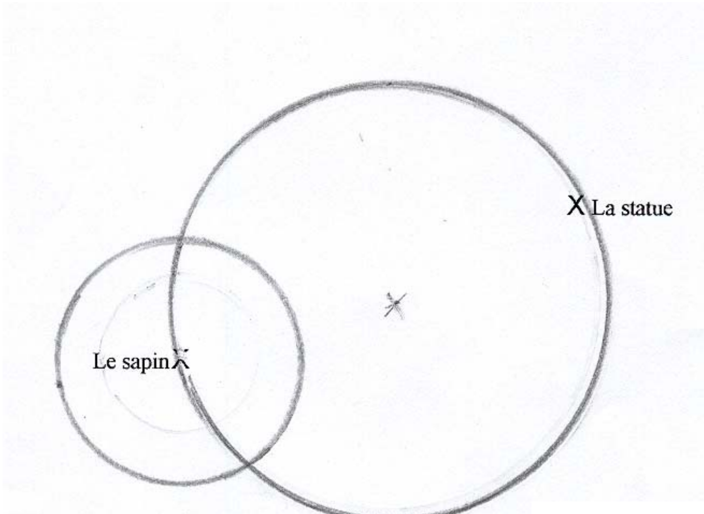
Johnny



Mehdi

Mehdi, visible dès le début dans le DVD, commence le travail avant la fin de l'explication. Il construit un cercle de rayon 10 m, le maximum de l'échelle proposée, puis un second cercle concentrique de rayon 5 m, la moitié du premier. Il n'a pas lu la totalité de la contrainte et centre ses cercles en « *le sapin* » car la consigne commence par « *à 4 m du sapin* ».
Il est pressé d'entrer dans la tâche et ne se soucie guère des informations fournies.

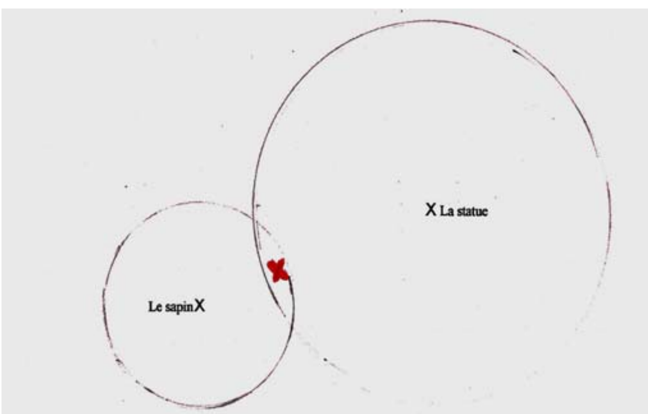
Mickaël
cherche le milieu du segment dont les deux extrémités sont les points représentant « *la statue* » et « *le sapin* », puis trace un cercle centré en ce point passant par « *la statue* » et « *le sapin* ». Le rayon de ce cercle est d'à peu près 5 m.
Puis il trace un cercle centré en « *le sapin* » de rayon la moitié de 5 m. En revanche il ne donne pas de solution pour l'endroit possible des bijoux.



Mickaël

Dans de nombreuses productions erronées, on retrouve une constante, celle du point situé au milieu des deux positions mentionnées. Après, selon les élèves, il y a des adaptations pour retrouver plus ou moins une des deux contraintes de distance. Il semblerait que ces élèves mettent en œuvre une représentation intuitive de la position d'un objet par rapport à deux autres connus : au milieu.

Des constructions correctes mais la solution erronée

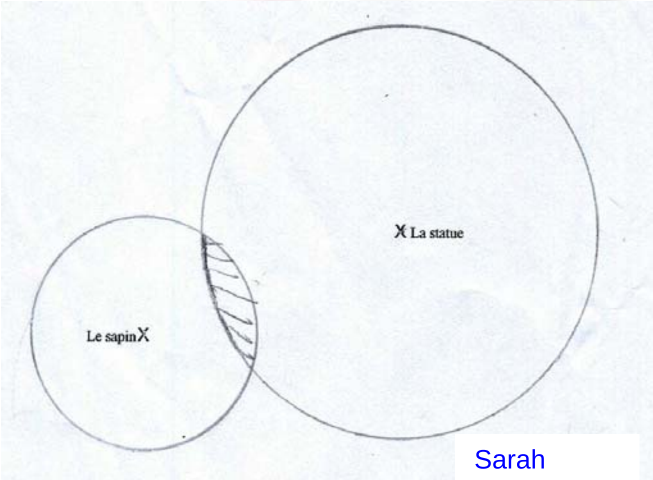


Ben Youcef

Ben Youcef construit les cercles servant à la recherche des bijoux mais choisit comme lieu possible celui qui est aligné avec les deux autres positions statue-sapin, tout en restant dans l'intersection des disques.

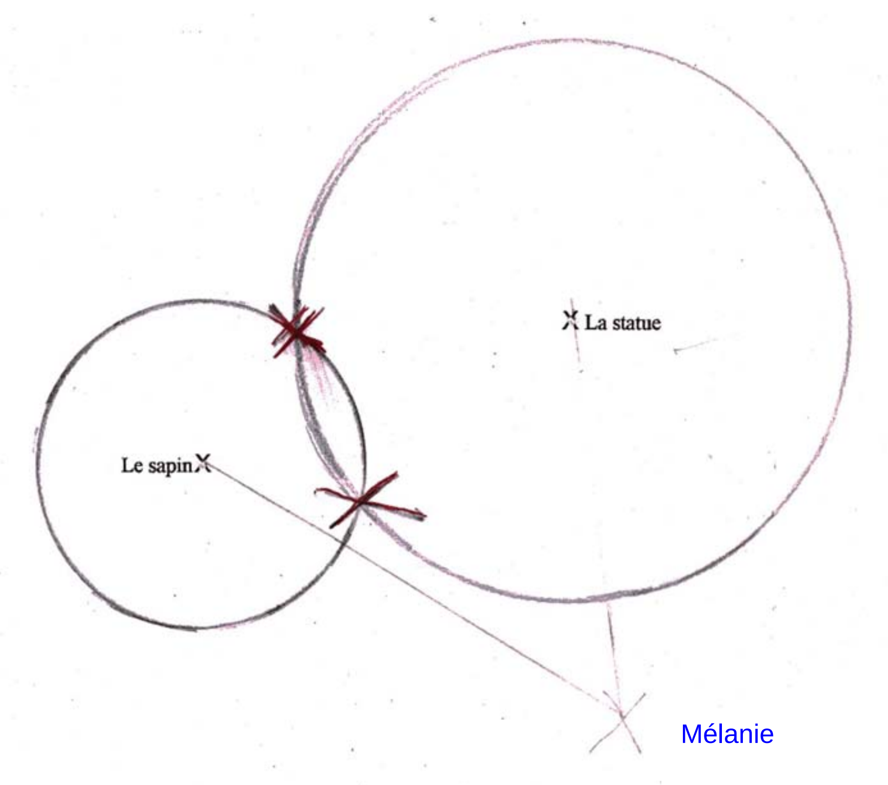
4 élèves ont utilisé la même procédure que Ben Youcef

De même **Sarah** construit les cercles nécessaires à la recherche des bijoux mais hachure l'intersection des deux disques.



Sarah

Par ailleurs 9 élèves, comme Mélanie, ont réussi à trouver les deux solutions en utilisant la construction des deux cercles.



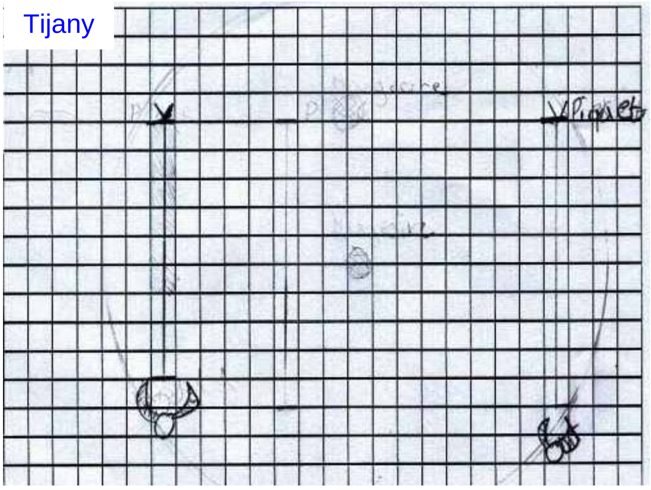
Mélanie

La mangeoire des chèvres

Cet exercice nécessitait d'une part de modéliser la situation de la réalité et d'autre part de la résoudre en utilisant la notion de disque.
L'analyse des productions des élèves met en évidence une variable qui semble avoir été un vrai obstacle pour les élèves : le quadrillage. La prégnance de celui-ci a pris le dessus sur la modélisation de la situation et la quasi-totalité des élèves, en représentant les cordes par des segments construits sur les lignes du quadrillage, s'est retrouvée dans l'impossibilité d'imaginer les cordes « tourner » autour du piquet. Dans la situation modifiée, nous avons enlevé le support quadrillage.

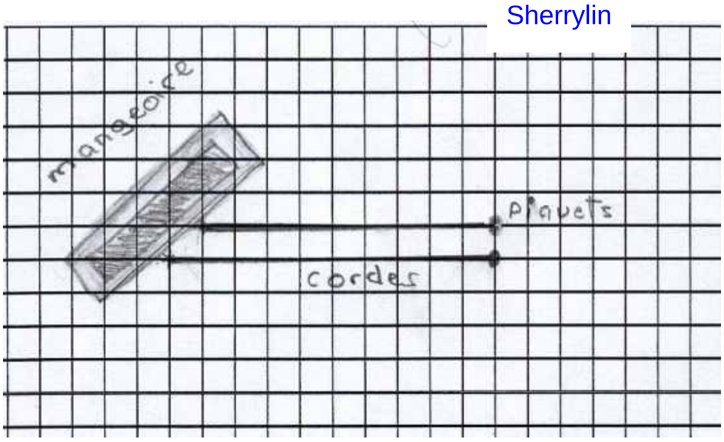
Voici des productions qui montrent la **difficulté de modélisation**. Ces élèves essayent de représenter par des dessins ce qu'ils pensent avoir compris.

Tijany



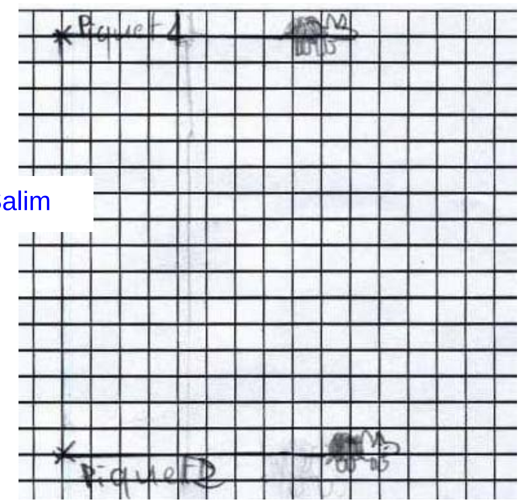
Tijany dessine les chèvres au bout des cordes. On remarque le mauvais positionnement des piquets sur les nœuds du quadrillage. La longueur des cordes n'est pas correcte. Il ne propose pas de position pour la mangeoire.

Sherrylin

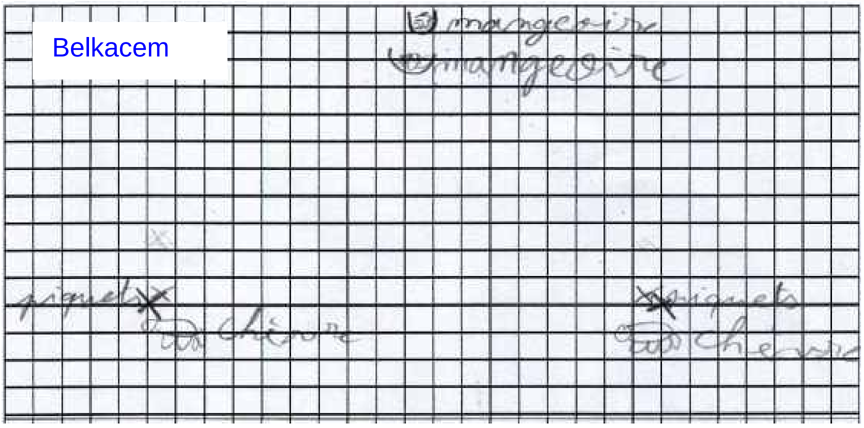


Sherrylin a construit des cordes de longueur exacte mais les piquets sont mal positionnés l'un par rapport à l'autre. Elle dessine une mangeoire, qui peut par sa dimension, correspondre à la contrainte du fermier : faire manger en même temps ses deux chèvres.
On remarque que cette élève a une bonne représentation d'une mangeoire et que sa représentation est correcte, sauf concernant les dimensions qui n'étaient pas données.

Salim



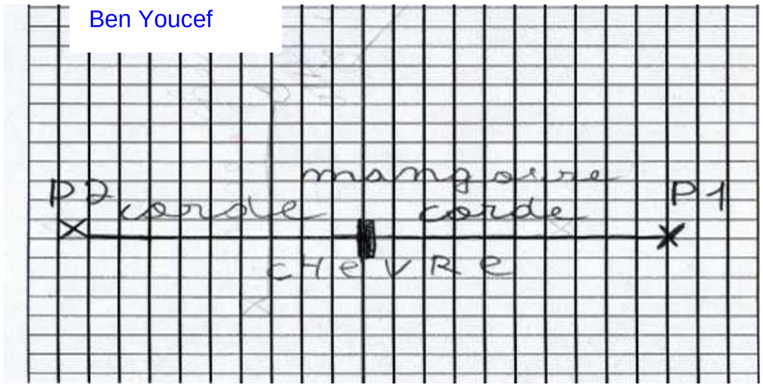
Salim espace les deux piquets de 16 carreaux au lieu de 15 et dessine les chèvres au bout des cordes : les longueurs des cordes sont à peu près bien respectées.
Mais il ne donne aucune possibilité pour la place de la mangeoire.

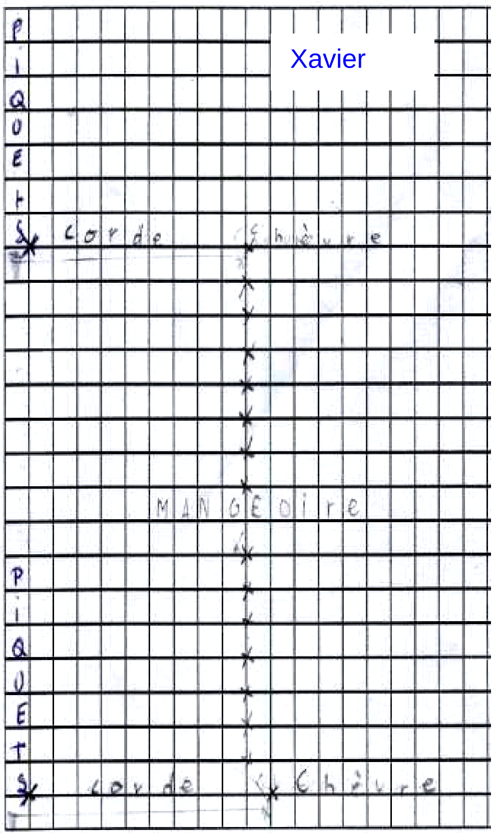


Belkacem ne place pas correctement les deux piquets (18 carreaux au lieu de 16). Il dessine les chèvres à coté de leur piquet : la corde n'apparaît pas. Puis il place deux mangeoires qui sont situées, l'une à 9 carreaux et l'autre à 10 carreaux dans le sens des lignes verticales du quadrillage. On peut aussi repérer que la mangeoire la plus proche des piquets est située, en comptant 9 carreaux sur la diagonale du quadrillage à partir de chaque piquet.

Pour d'autres élèves, de façon intuitive **la mangeoire doit être placée entre les deux piquets,** puisque les chèvres doivent pouvoir l'atteindre en même temps.

Ben Youcef ne prend pas en compte l'espacement des deux piquets (ici 19 carreaux au lieu de 16) et place la mangeoire alignée avec les piquets P1 et P2 en conservant la longueur demandée des cordes. Il a donc géré une seule contrainte.
On peut observer aussi la mauvaise utilisation du quadrillage pour placer le point P2.



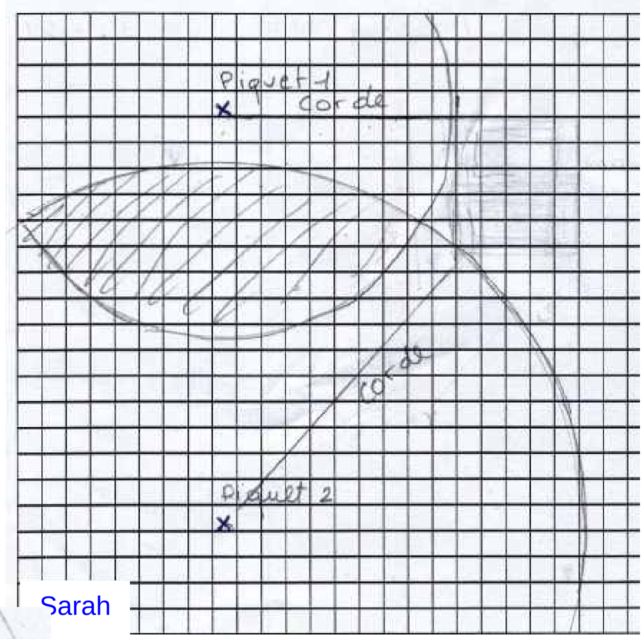


Pour sa part, **Xavier** a correctement placé les piquets, les cordes sont de bonne longueur mais il place la mangeoire sur une ligne allant à peu près d'une chèvre à l'autre, presque au milieu de ce segment.
On remarque que même si une partie de la modélisation est correcte, l'élève ne se représente pas bien le mouvement d'une chèvre attachée à un piquet.
Il peut être intéressant de demander à cet élève, s'il pense que chaque chèvre peut atteindre la mangeoire et comment elle se déplace à partir de la position dessinée sur le quadrillage.

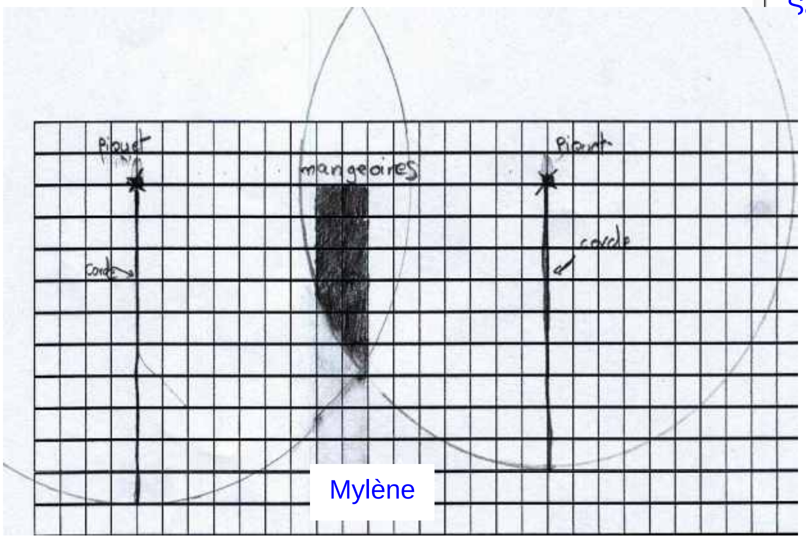
Voici des productions où apparaissent **des solutions correctes**.

Sarah donne globalement une bonne réponse même si elle a commis plusieurs erreurs :

- mauvaise utilisation du quadrillage pour placer les piquets ;
- mauvaise longueur de la corde attachée au piquet 2 ;
- des tracés approximatifs des cercles.



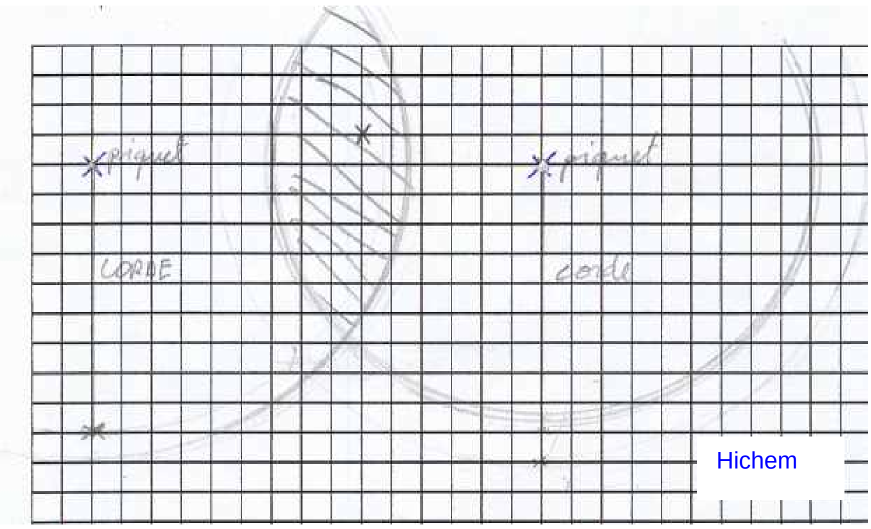
Sarah



Mylène

Le travail de **Mylène** fait apparaître une bonne représentation du problème, aidée par la relance du maître concernant la représentation sur le quadrillage. Les cercles tracés ne sont pas tout à fait exacts mais cette élève connaît la forme d'une mangeoire et elle se demande comment la dessiner pour répondre à la question.

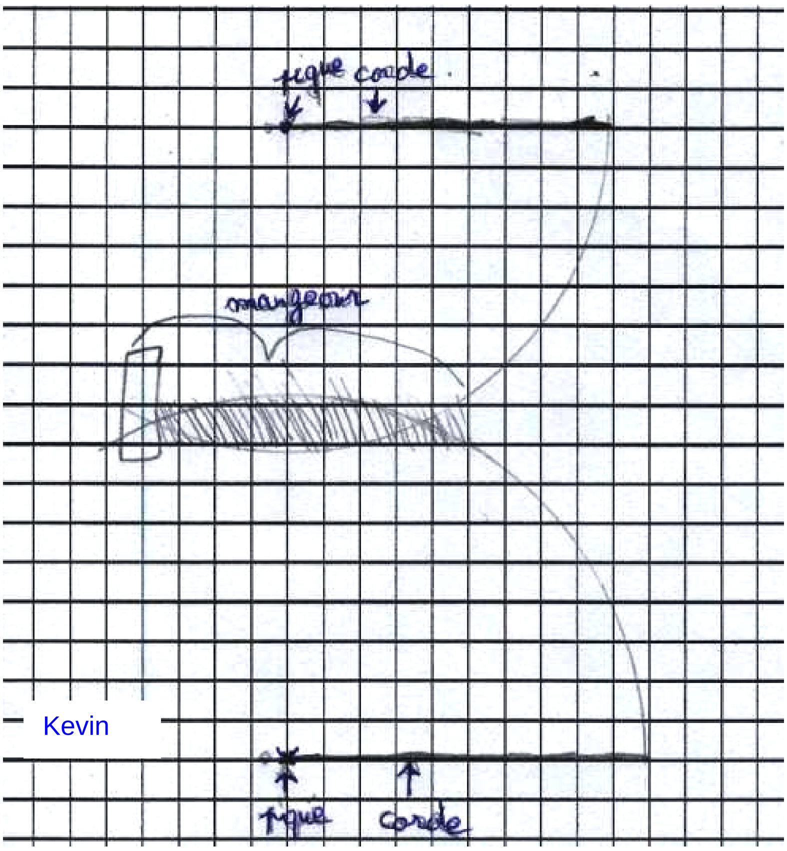
Hichem réalise la construction attendue, lui aussi grâce à la relance du maître. Il fait une erreur de longueur entre les piquets (15 carreaux au lieu de 16).



Hichem

Ces élèves ont bien pris en compte de manière implicite le fait que les deux chèvres se déplacent chacune dans un disque et que les lieux possibles de la mangeoire se situent dans leur intersection.

Kevin
réalise le travail attendu, sans erreur mais il est, lui aussi, embarrassé avec la forme de la mangeoire.



Kevin

C'est une vraie difficulté qui n'avait pas été envisagée lors de la conception de la situation et qui nous a permis de modifier l'énoncé en évoquant plutôt d'un petit seau (dont la représentation peut être un point) à la place d'une mangeoire (dont la représentation peut difficilement être un point).

Analyse didactique

<u>Analyse a priori</u>

Connaissances mathématiques en jeu

- La résolution de problèmes d'équidistance à l'aide de la notion de cercle et de disque.
- La modélisation mathématique de situations réelles.

Variables didactiques

<u>Le matériel autorisé</u>.
Si on ne fournit aux élèves que le compas, alors il n'est plus possible d'observer leurs capacités à mobiliser une connaissance sur les points situés sur un même cercle. Le choix, dans cette séance, est de fournir à la fois le compas mais aussi une règle non graduée et du papier calque. Néanmoins, il peut être très intéressant de voir ce que les élèves produisent en n'ayant que le compas à leur disposition.

Pour *le problème des chèvres*, fournir aux élèves une modélisation géométrique de la situation afin de ne pas leur demander une double tâche, celle de modéliser puis celle de résoudre. Dans ce problème, le papier quadrillé va se révéler comme une véritable variable didactique.

Difficultés prévisibles

Le premier problème traite d'une intersection de cercles alors que le second problème traite d'une intersection de disques. La transposition des solutions trouvées au problème des bijoux ne convient pas au problème des chèvres. Dans le premier cas, la solution est constituée par deux points alors que dans le second cas, il s'agit d'une surface.

D'autre part, la modélisation de la situation des chèvres peut être une difficulté car elle n'a aucune signification pour des élèves de la banlieue parisienne, ce qui ne serait peut-être pas le cas pour des enfants habitant dans des villes plus proches de régions agricoles.

Analyse a posteriori

La **phase de rappel** reprend la formulation des propriétés travaillées depuis trois séances. Nous observons que le maniement des notions n'est pas encore aisé pour une partie des élèves et que l'usage du vocabulaire adapté fait encore défaut. Constamment, il va être nécessaire de renforcer le lien entre la position d'un point par rapport à un cercle donné et sa distance au centre de ce cercle.

L'objectif de ces **deux problèmes** est de montrer que la notion de cercle est un outil pour résoudre des situations pouvant être rencontrées dans la vie de tous les jours et mettant en jeu des distances. Ces deux problèmes ne sont pas familiers aux élèves et pendant la séance nous observons deux grandes difficultés à leur appropriation.

- La première est liée au **contexte** : *« deux chèvres attachées à des piquets et mangeant dans une même mangeoire »* n'est pas une image familière à ces élèves même après avoir expliqué les mots « *piquets* » et « *mangeoire* ».
- La seconde est liée à la **modélisation géométrique** des situations, c'est à dire à une représentation plane nécessaire à la résolution du problème : un piquet, une chèvre sont représentés respectivement par un point et la corde de la chèvre par un segment (la corde tendue pour représenter la distance maximale autorisée pour la chèvre).
- La troisième difficulté non prévue a été le peu d'habitude de l'utilisation du **papier quadrillé** comme support géométrique. Les élèves s'en servent de façon erronée, positionnant un point n'importe où dans une case du quadrillage et mesurant des longueurs (dont l'unité est le carreau) aussi bien en verticale qu'en oblique (une diagonale d'un carreau vaut pour eux une unité de longueur au même titre qu'un côté du même carreau) sans pour cela démarrer le mesurage à partir d'un nœud de ce même quadrillage.

Du côté des élèves

Concernant la recherche **des bijoux**, il semble que les élèves aient compris le problème. Leur démarche de résolution va se heurter à la double contrainte donnée par l'énoncé, *« les bijoux sont à la fois à 4 mètres du sapin et 7 mètres de la statue »*. La règle non graduée les intrigue mais ne les déconcerte pas puisque beaucoup d'entre eux vont la transformer en règle graduée.
On observe que beaucoup de constructions sont correctes mais les élèves ne livrent pas pour autant les solutions : il semble difficile pour eux de donner du sens à l'intersection des deux cercles en terme de distance et peut-être aussi à percevoir que l'intersection de deux cercles sont des points.

Lors de la mise en commun, on observe la prégnance de la vérification des distances à la règle « graduée » alors que les cercles corrects ont été tracés. La notion d'équidistance des points d'un cercle n'est pas encore acquise et ne représente pas encore un outil immédiat à la recherche de longueur. Ainsi Mike réutilise sa règle pour vérifier qu'un point situé sur le cercle de centre *la statue* et de rayon 7 mètres est bien à la distance de 7 mètres de *la statue.*

12

Après l'avoir gradué, certains utiliseront le papier calque comme une règle graduée.

Concernant la situation de **la mangeoire des chèvres**, on pourrait penser qu'il s'agit d'un simple réinvestissement avec un autre énoncé décrivant un autre contexte. Il s'avère que des difficultés, que nous n'avions pas anticipées didactiquement, sont apparues.
La **dévolution du problème** n'est pas assurée par la reformulation de la tâche. La plupart des élèves n'imaginent pas les chèvres attachées à un piquet par une corde, qui étant souple va permettre à cette chèvre de brouter l'herbe située dans un espace représenté par un disque (dont le centre est le piquet et le rayon, la longueur de la corde).
D'autre part, **la modélisation géométrique** cette fois n'est pas fournie aux élèves. Ils disposent uniquement d'un quadrillage et doivent représenter les piquets des chèvres. Pour la plupart, ils dessinent effectivement les piquets, puis les chèvres au bout de leur corde et la mangeoire, selon l'idée qu'ils ont d'une position logique pour nourrir les animaux. Mais à partir de ces dessins, ils ne voient pas comment résoudre le problème et sont bloqués.
Nous faisons l'hypothèse que le papier quadrillé constitue un obstacle à la compréhension de la situation. En effet, dans l'analyse des productions d'élèves, nous observons que la quasi-totalité des élèves trace les segments, représentant les cordes des chèvres, sur les lignes du quadrillage ce qui rend difficile une perception dynamique de la rotation de ce segment autour d'un point, le piquet.
C'est pourquoi dans l'énoncé modifié, nous proposons d'éliminer ce support.

Sinon, par ailleurs, nous observons que **l'usage du papier quadrillé** n'est pas acquis par les élèves, ce qui ne facilite pas la représentation de la situation.

13

L'ensemble de ces remarques permet de comprendre le fait que quasiment aucun élève de cette classe n'a résolu le problème.

Pour les élèves, cet exercice présente un saut didactique trop important, c'est pourquoi nous proposons un déroulement différent dans **Si c'était à refaire** de la fiche de préparation.

Par ailleurs, on peut repérer, dans ces séances, que certains élèves ont encore beaucoup de difficultés à construire des cercles avec un compas. Ce manque de dextérité représente un véritable handicap à la recherche des solutions des problèmes. Il est recommandé de faire mettre un cahier en dessous des feuilles volantes distribuées aux élèves afin de stabiliser la pointe du compas et éviter des constructions maladroites et erronées.

14

Du côté de l'enseignant

La mise en commun de la situation **des bijoux** est fondamentale pour continuer l'apprentissage souhaité autour de la notion du cercle. La gestion de la double contrainte de l'énoncé doit être mise en avant par l'enseignant. Il s'avère que l'usage **de deux couleurs différentes**, une pour chacun des cercles tracés, aurait pu être une aide efficace pour expliciter le statut de l'intersection de ces cercles.
La solution étant trouvée, l'enseignant poursuit son questionnement sur la validité ou l'invalidité d'autres points situés sur un des cercles ou dans l'intersection des deux disques. Ainsi il permet aux élèves de s'approprier le sens donné aux deux solutions trouvées en terme de distances vérifiant les deux contraintes.

En revanche, dans le feu de l'action, l'enseignant fait des remarques collectives en fonction des procédures observées pendant la recherche des élèves et induit inconsciemment des réponses erronées.

« Vous mettez un point rouge à l'endroit où vous devez creuser » induit les élèves à ne produire qu'un seul point solution.

Concernant la situation de la **mangeoire des chèvres**, la mise en commun et la synthèse présentées dans le DVD montrent les difficultés rencontrées par les élèves et par l'enseignant pour aboutir à la résolution du problème. L'analyse et les suggestions faites par l'enseignant dans la rubrique ***pour aller plus loin… si c'était à refaire*** proposent que ce dernier s'assure tout d'abord de la maîtrise de l'usage du papier quadrillé en géométrie, puis modifie l'énoncé de l'exercice en proposant de placer sur le quadrillage les piquets de chaque chèvre. À partir de là, il peut être demandé aux élèves de colorier de couleur différente l'espace que chaque chèvre peut occuper lorsqu'elle est attachée par une corde de longueur fixée à un des deux piquets.
Lors d'une séance suivante, il est alors possible de proposer l'énoncé du problème initial mais en le modifiant. Nous avons ajouté la possibilité de proposer cet énoncé sur du papier uni à la place du quadrillage.

Nous avons déjà présenté les difficultés liées au changement d'échelle lors du passage de la feuille de papier au tableau. Dans cette séance, nous retrouvons cette difficulté lorsque les élèves viennent présenter leurs procédures. Concernant la situation des bijoux, les élèves n'ont pas de règle graduée et lorsqu'ils passent au tableau, ils vont se construire des repères sur la règle du maître : *« 4 mètres ça fait 20 cm sur ta règle…et 7 mètres cela correspond à 35 cm* ». Il est souhaitable que le maître dispose du même matériel que les élèves, afin de ne pas ajouter des éléments externes à gérer qui pourraient conduire à des malentendus inutiles.
15

La rubrique ***éclairage sur… de l'utilité de l'étayage du maître*** pose la difficulté pour un enseignant de repérer l'efficacité de l'aide fournie aux élèves. Pendant leur recherche, le maître va faire expliciter à deux élèves en particulier leur démarche et, grâce à son aide, ceux-ci réussissent. Puis ce sont ces mêmes élèves qui iront au tableau expliquer leur démarche et nous observons qu'ils refont les mêmes erreurs au tableau.

- Mike réutilise au tableau sa règle pour vérifier qu'un point du cercle est bien à 7 mètres de la statue.
- Kevin n'arrive pas à expliquer comment il a trouvé la solution de l'emplacement de la mangeoire.

16
La mise en commun du problème de la mangeoire des chèvres devrait mettre en évidence la différence entre la solution du problème des bijoux et celui des chèvres. La synthèse permettrait de mettre en évidence que l'intersection de deux cercles donne deux points alors que l'intersection de deux disques donne une surface.

Séance 5
Construction de figures complexes

Objectif du maître :

Faire fonctionner le vocabulaire concernant le cercle et faire utiliser la propriété caractéristique du cercle.

Tâche de l'élève :

À partir d'un programme de construction, construire une figure complexe sur papier quadrillé.

Institutionnalisation :

Les caractéristiques d'un programme de construction.

Matériel :

Énoncé de l'exercice et **feuille quadrillée**.

Travail individuel

Consigne *: « Voici un programme de construction qui va vous permettre de réaliser une drôle de figure. Suivez les étapes une à une et soignez votre travail. »*

Aides possibles ***:***

- Faire rappeler la signification des termes *milieu*, *segment*, *moitié de la longueur de*.
- Insister sur le respect de l'ordre chronologique des consignes.
- S'organiser pour ne pas oublier une ligne de consigne (cocher la ligne quand la consigne est réalisée).
- Rappeler l'ordre de la désignation des sommets dans un carré ABCD.
- Avoir des instruments de construction en bon état.

Le programme de construction suivant comporte les termes de ***cercle, centre, rayon.***

Quelle drôle de figure ?

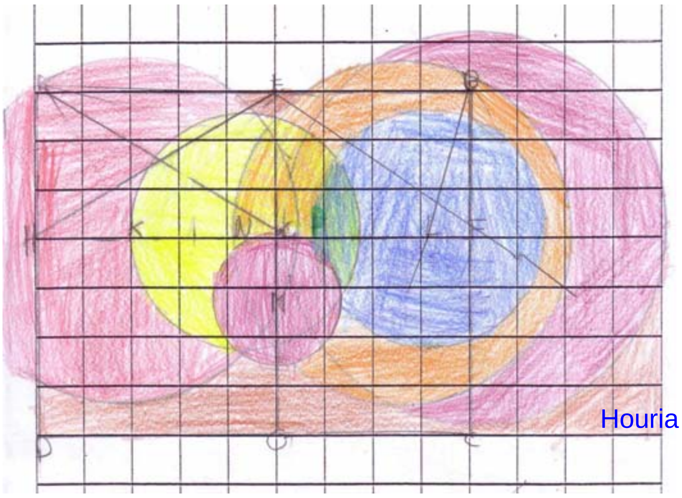
1) Trace un carré ABCD de 10 carreaux de côté.
2) Place les points : E milieu du segment [AB]
F milieu du segment [BC]
G milieu du segment [CD]
H milieu du segment [DA].
3) Trace le segment [EG], puis le segment [FH].
4) Ces deux segments se coupent en un point que l'on appelle O, qui est le centre du carré. Place ce point O.
5) Construis le cercle de centre O et de rayon OF.
6) Les segments [AO] et [HE] se coupent en un point que l'on appelle K. Place le point K.
7) Trace le cercle de centre K et de rayon AK.
8) Les segments [BO] et [EF] se coupent en un point que l'on appelle L. Place le point L.
9) Trace le cercle de centre L et de rayon LB.
10) Place le point M milieu du segment [OG].
11) Trace le cercle de centre M et de rayon 1 carreau.
12) Place les points : N sur le segment [OK] tel que la distance de N à K égale 2 carreaux.
et P sur le segment [OL] tel que la distance de P à L égale 2 carreaux.
13) Construis le cercle de centre N et qui passe par le point K.
14) Construis le cercle de centre P et de rayon PL.
15) Colorie cette construction comme tu le souhaites.

Validation et mise en commun

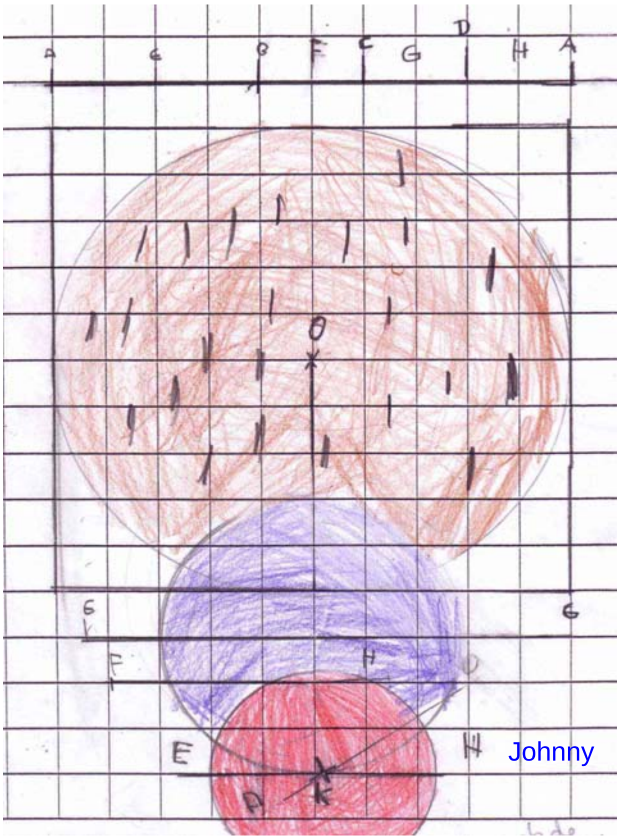
La mise en commun doit s'effectuer après la phase de validation qui elle, se déroulera à partir de la reproduction sur papier calque de la bonne construction (**modèle**). Les élèves peuvent ainsi repérer où se situent leurs erreurs, et modifier leur construction.
La mise en commun doit permettre d'aller rapidement vers la synthèse qui privilégiera deux aspects : *le premier* étant les critères de réussite de construction d'une figure géométrique complexe à partir d'un programme de construction (respecter l'ordre hiérarchisé des consignes de construction, utiliser ses connaissances du vocabulaire géométrique, puis *le second* étant l'analyse de la rédaction d'un programme de construction (verbes à l'infinitif, pas de mention des outils utilisés, usage d'un vocabulaire rigoureux de géométrie, une ligne par ordre de construction, ordre hiérarchisé).
Une aide méthodologique aidera les élèves à ne pas oublier une ligne d'instruction et à arriver au bout de la construction sans erreur : *cocher une ligne d'instruction dès que la construction a été réalisée*.

Voici l'analyse de quelques productions d'élèves de la classe de CM1

Dès le début **Houria** commet une erreur en construisant le carré puisqu'elle construit un rectangle de longueur 9 carreaux et de largeur 7 carreaux. Elle est la seule élève de la classe à effectuer cette erreur.



Houria

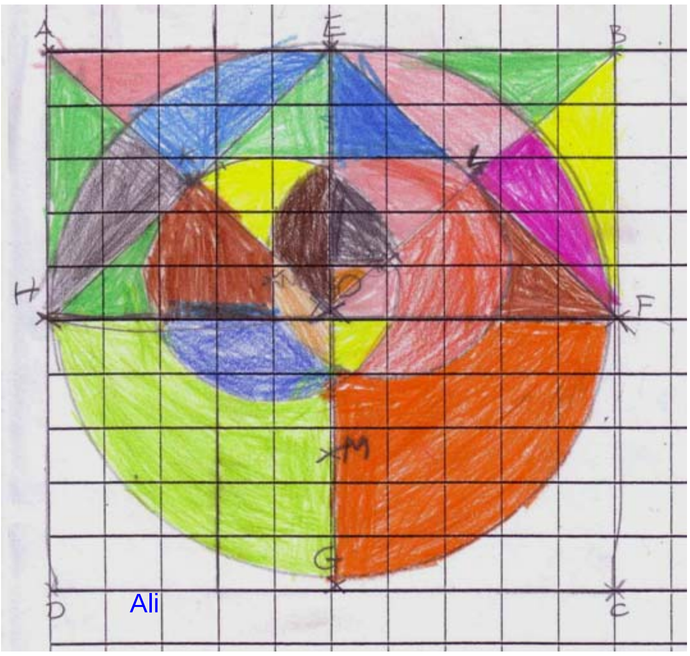


Johnny

Pour sa part **Johnny** ne semble pas avoir compris la signification de la désignation des points d'une figure géométrique. Il désigne par le même nom différents points. Cet élève effectue souvent une nouvelle construction indépendante de la précédente à chaque ligne d'instruction, comme si elle n'avait pas de lien avec les autres.

Nicolas construit le cercle de centre G et de rayon OF au lieu du cercle de centre O et de rayon OF. De plus la position des points N et P est incorrecte, ainsi que celle du point M. Il est possible que cet élève ait été trop vite et ne se soit pas concentré sur cette tâche de construction complexe qui nécessite beaucoup de rigueur et d'attention.

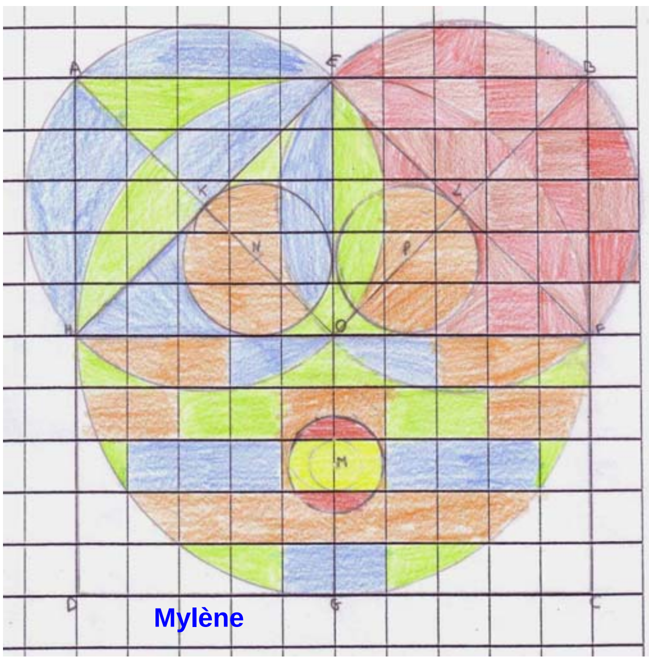
Nicolas



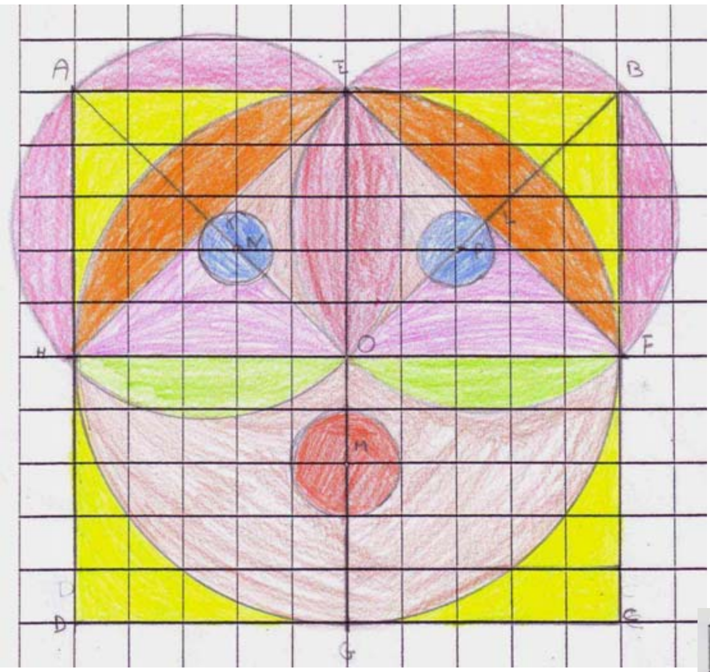
Ali

Ali oublie deux lignes d'instruction : « *Trace le cercle de centre K et de rayon AK* » ainsi que « *trace le cercle de centre L et de rayon LB* ». Cet oubli n'a pas d'incidence sur la suite de la construction donc il est possible de penser qu'il ne s'en est pas rendu compte. De même il n'a pas tracé le cercle de centre M et de rayon 1 carreau. D'autre part le point N n'est pas correctement placé.

Beaucoup d'élèves, comme **Mylène,** ont placé respectivement les points N et L au milieu des segments [KO] et [LO], ce qui donnait finalement un aspect plus réaliste à la construction qui ressemblait à une sorte de « nounours ».

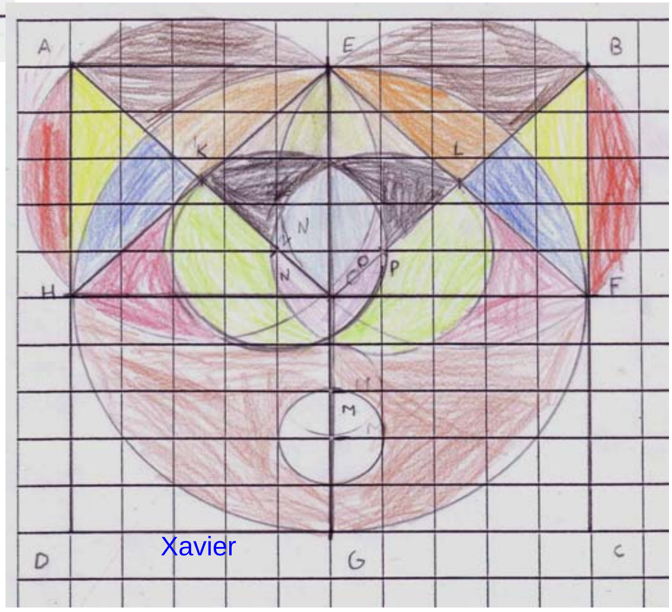


Mylène



Dans la production de **Sherrylin,** nous retrouvons une erreur commise dans la prise de la mesure de longueur sur le papier quadrillé. Il semblerait que, pour placer les points N et P, cette élève va prendre comme unité de longueur la longueur d'une diagonale d'un carreau, plutôt que la longueur d'un côté du carreau.
Mais comme le point M est aussi mal positionné, il est possible que cette élève ne conçoive pas l'éventualité de placer un point en dehors d'un nœud du quadrillage (ce qui pourrait aussi expliquer l'erreur pour les points N et P).

n



Xavier

Bien que le point M de la construction de **Xavier** soit mal placé, cet élève fait partie de la minorité des élèves qui a réussi à réaliser une construction presque correcte.

Ce peu de réussite va permettre au maître dans le cadre de la synthèse de la séance de faire formuler des aides méthodologiques qui devront être réactivées lors de la prochaine séance de construction de figures complexes.

Une petite remarque aussi concernant le coloriage : au premier coup d'œil, nous avons des difficultés à repérer si la construction est juste, car le coloriage est très prégnant**. La solution reproduite sur papier calque** est donc indispensable pour la validation des productions.
On peut aussi observer les difficultés de certains élèves à colorier esthétiquement leur construction. C'est une compétence transversale qu'il s'agit de développer, car elle est indispensable dans de nombreuses disciplines (biologie, géographie, arts visuels,etc.).
Le maître aurait aussi pu demander un coloriage qui faisait apparaître les éléments de symétrie de la figure, ce qui permettait de réinvestir une connaissance travaillée au cycle 2 et au début du cycle 3.

Séance 6
Reproduction de figures complexes

Objectifs du maître :

- Faire prendre conscience de la nécessité d'analyser des figures géométriques complexes avant leur reproduction.
- Faire écrire en mathématiques : exemple de programmes de construction.

Tâches de l'élève :

- À partir de modèles, reproduire à l'identique ou en agrandissant des figures géométriques complexes.
- Rédiger un programme de construction.
- Suivre les instructions d'un programme de construction.

Institutionnalisation :

Élaboration de démarches pour reproduire des figures géométriques complexes.

Voici plusieurs exemples de figures complexes à reproduire, sachant par ailleurs que de nombreux manuels scolaires en proposent également.

Exemple 1 – A la découverte de l'hexagone régulier

La construction de l'hexagone régulier permet de réinvestir la notion de cercle, et l'usage du compas pour le report de longueur.

Matériel

- Papier calque, compas, règle non graduée.
- Plusieurs feuilles unies destinées aux essais pour la reproduction.
- Différents hexagones réguliers reproduits sur une feuille unie.

Consigne :

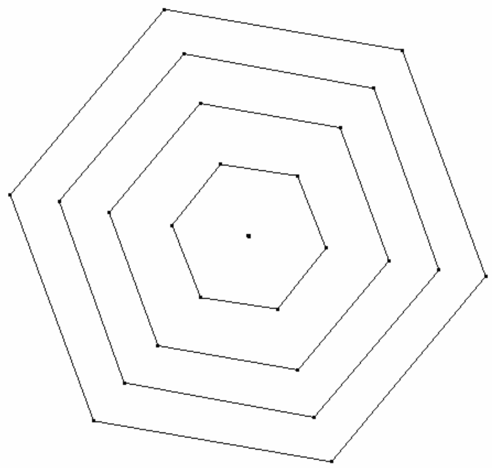
«Vous avez différentes figures géométriques sur votre feuille. Vous allez devoir les reproduire à l'identique sur des feuilles unies.
Connaissez-vous le nom de ces figures ? réponse attendue : des hexagones
Quelles propriétés géométriques particulières observez-vous ? " " : des côtés de même longueur
Pour les reproduire vous pouvez prolonger des côtés, tracer des droites, faire apparaître des points sur vos modèles. Vous pouvez aussi plier votre feuille. »

Laisser les élèves faire de nombreux essais puis en fonction des observations, le maître propose une mise en commun intermédiaire pour permettre à tous ceux qui sont bloqués de pouvoir avoir quelques indices. Ces derniers pourront porter sur les axes de symétrie des figures, sur le fait que les sommets semblent être sur un cercle dont le centre est l'intersection des axes de symétrie et que la longueur des côtés est identique.

La **synthèse** de la séance portera sur la mise en évidence des **propriétés de l'hexagone régulier** et sur une **méthode de sa construction**.

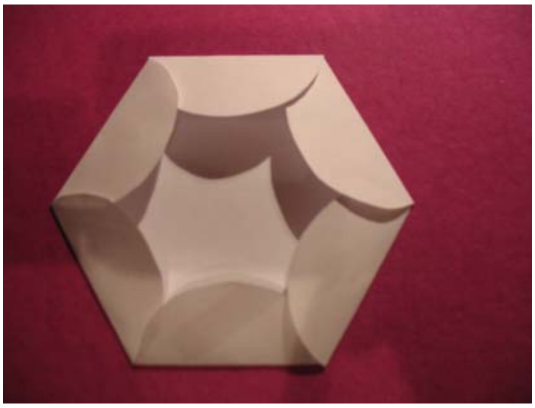
Puis, il sera essentiel de présenter des hexagones non réguliers afin d'éviter la construction de fausses représentations de l'hexagone chez les élèves. Pour beaucoup, un hexagone n'est qu'un hexagone régulier comme une pyramide n'est que la pyramide du Louvre.

Prolongement : proposer par la suite la reproduction suivante (des hexagones réguliers concentriques).



Exemple 2 – La petite fleur magique[6]

Remarque : Cette petite fleur est **magique** car si on la découpe selon son contour et que l'on plie ses pétales les uns après les autres comme sur la photo, en la posant sur une assiette remplie d'eau elle s'ouvre par capillarité de l'eau.



Faite en début de séance, cette démonstration motive les élèves pour se lancer dans l'activité de reproduction.

Un modèle de la petite fleur magique est distribué aux élèves qui doivent la reproduire.
Comme dans la situation de l'hexagone, ils sont invités à essayer toutes les recherches sur leur modèle afin de découvrir les formes simples qui constituent cette petite fleur magique (un hexagone régulier dont chaque côté est le diamètre d'un demi-cercle).

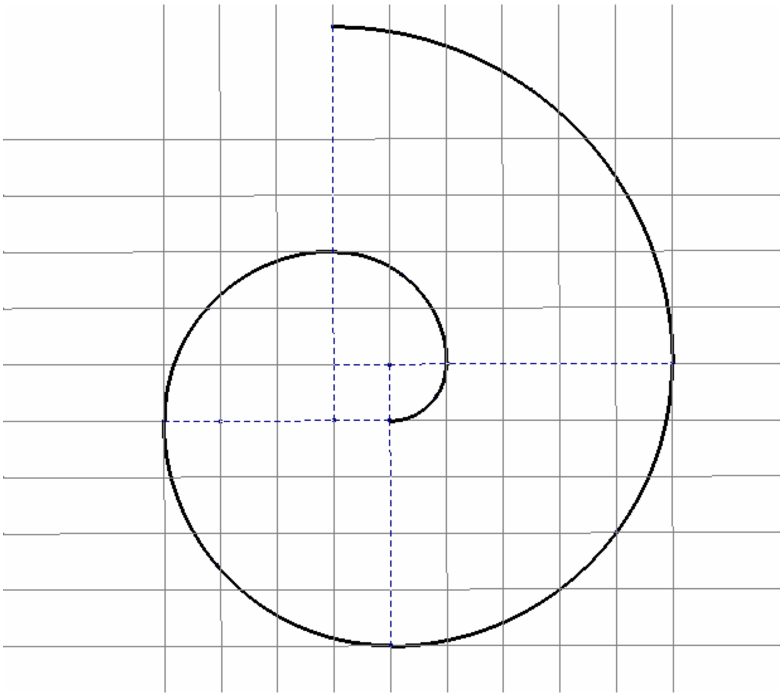
Cette reproduction est une séance de résolution de problème géométrique qui réinvestit la notion d'hexagone régulier. Elle nécessite une séance d'une heure qui doit se conclure par l'explicitation de la démarche d'analyse et mettre en évidence les propriétés de cette figure.
Le maître demandera aux élèves les plus rapides de rédiger un programme de construction destiné à l'autre classe de CM de l'école, par exemple.

[6] Activité issue de *Travaux géométriques 6e*, KUZNIAK A., TAVEAU C. Nathan pédagogie, 1998.

Exemple 3 – La spirale

La reproduction de cette spirale s'effectue sur un quadrillage de même dimension ou d'une autre dimension. Elle nécessite une analyse logique de l'algorithme de la construction et il est intéressant de demander aux élèves de la poursuivre jusqu'à ce qu'ils ne puissent matériellement plus (manque de place sur leur feuille).

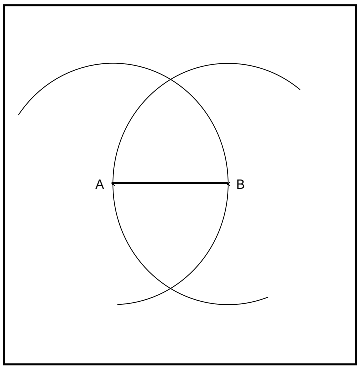
Le maître peut demander la rédaction d'un programme de construction de cette spirale et sera ainsi amené à introduire la désignation des sommets du carré de base qui seront successivement le centre des quarts de cercle à construire.



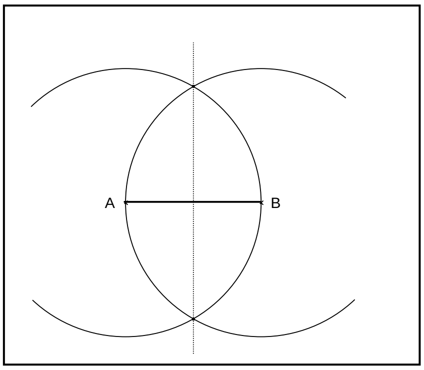
Exemple 4 – Le pentagone régulier

Voici une proposition du peintre Dürer pour construire un pentagone régulier connaissant un côté.

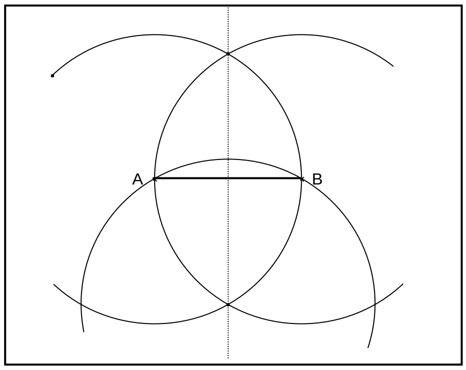
Reproduire cette construction nécessite de comprendre les tracés déjà construits et de les reproduire.
Cet exercice, un peu difficile car non habituel, se réalise à partir d'une suite chronologique de dessins, qui traduit les étapes de la construction, et qui incite les élèves à analyser la figure.
Le texte du programme de construction est ici remplacé par des dessins.



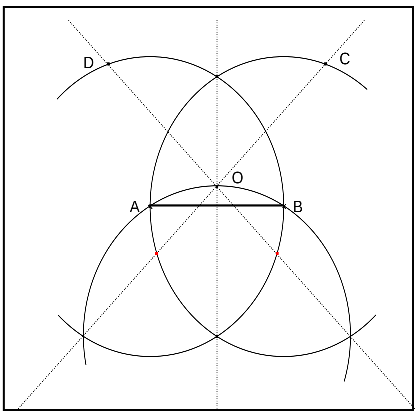
Étape 1



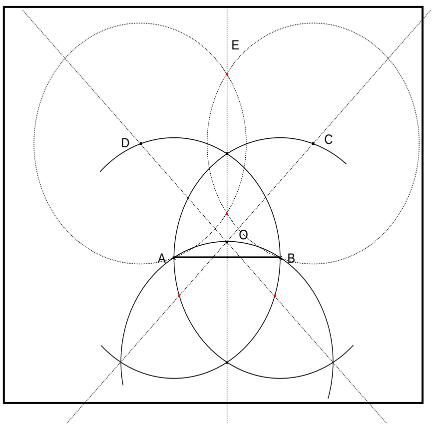
Étape 2



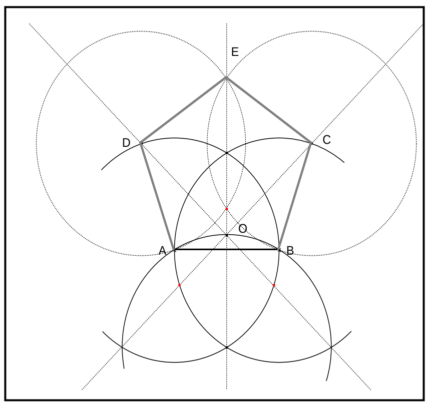
Étape 3



Étape 4

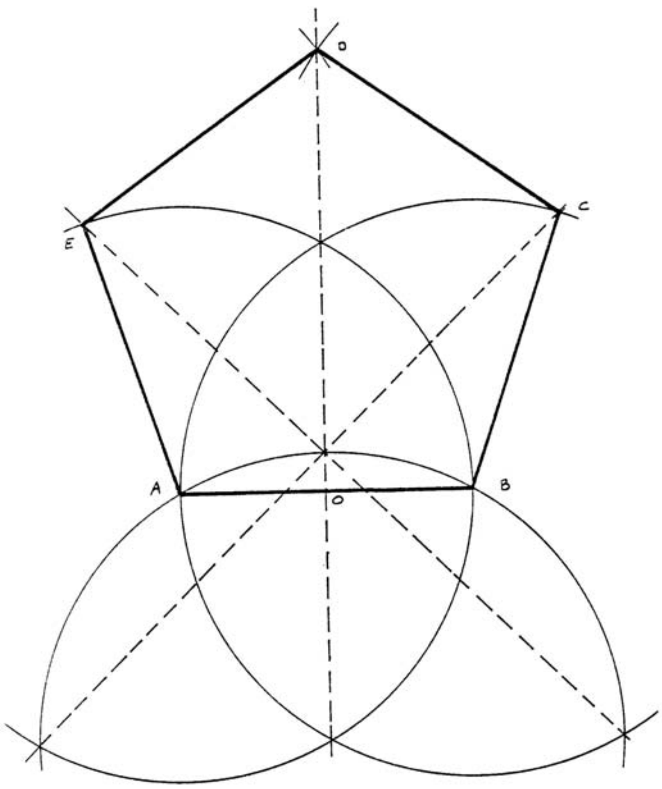


Étape 5



Étape 6

Voici la construction globale proposée par Dürer



Séance 7
Construction de triangles

Objectifs du maître :

- Réinvestir la propriété caractéristique du cercle pour faire construire des triangles dont la longueur des côtés est donnée.
- Présenter le compas comme un outil de report de distance.

Tâche de l'élève :

Construire à l'aide du compas des triangles de dimension donnée.

Institutionnalisation :

- Construction de triangles à l'aide du compas
- Le compas : outil de report de distance.

Déroulement

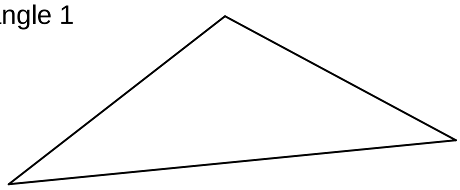
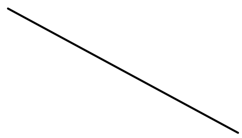
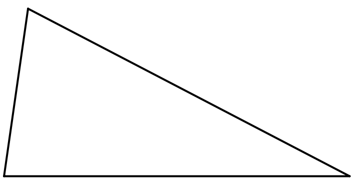
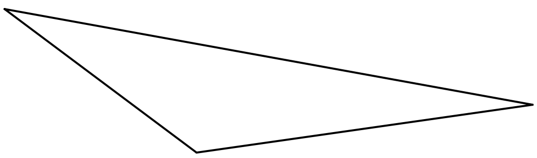
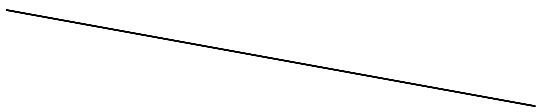
Matériel : Compas, règle non graduée, feuille quadrillée, crayon à papier.

<u>Phase 1</u> : rappel de la propriété caractéristique du cercle et présentation de l'enjeu de la séance.

« Où sont situés tous les points équidistants de… ? »
« Pendant cette séance nous allons apprendre à construire des triangles. »

<u>Phase 2</u> : reproduire des triangles

Sur papier uni, trois triangles sont tracés et les élèves doivent finir leur reproduction à partir de l'élément déjà tracé en utilisant le compas et la règle non graduée.

Triangles à reproduire	Continue la reproduction du triangle
Le triangle 1 	Le triangle 1 
Le triangle 2 	Le triangle 2 
Le triangle 3 	Le triangle 3 

Analyse a priori

Mise en commun
Le calque permet de valider la justesse des constructions. Chaque élève dispose donc d'un morceau de papier calque et effectue la validation de sa construction.

Synthèse
Elle portera sur la façon de reproduire un triangle à l'aide du compas en faisant le lien avec les points équidistants et le cercle.
On privilégiera le fait de dire aux élèves que l'on construit deux cercles dont les centres sont les extrémités du segment déjà construit et que l'on obtient deux triangles possibles, symétriques l'un de l'autre.

***Phase 3* : construire des triangles**

On donne aux élèves du papier quadrillé et on leur demande de construire des triangles dont les dimensions sont données par la longueur des côtés en carreaux.

L'enseignant proposera une aide en faisant le lien avec la situation précédente : faire un dessin à main levée, indiquant les informations données dans le texte.

Trace les triangles dont les côtés font :
- triangle n°1 5 carreaux, 7 carreaux, 8 carreaux
- triangle n°2 4 carreaux, 5 carreaux, 4 carreaux
- triangle n°3 3 carreaux, 4 carreaux, 5 carreaux

Validation à l'aide du papier calque sur lequel le maître aura photocopié les solutions.

Synthèse

Expliciter la méthode de construction des triangles à l'aide du compas en favorisant, avant de se lancer dans la construction, l'utilisation de dessins à main levée sur lesquels les élèves reportent les longueurs données des côtés des triangles.

Il sera possible de réinvestir, dans une autre séance, la construction de triangles dans une situation contextualisée comme celle des plots.
Pour réaliser cette construction, il suffit de construire un triangle dont l'ensemble des longueurs des côtés a été fourni. La difficulté réside dans la compréhension du problème et dans sa modélisation. Le maître doit encourager les élèves à avoir recours au dessin à main levée, sur lequel toutes les informations données pourront être indiquées.

La modélisation étant réalisée par le dessin, la solution au problème n'est qu'un réinvestissement de la construction de triangle.

Séance 8
Un état des lieux

Objectif du maître :

Évaluer les compétences des élèves concernant la notion de cercle et d'usage du compas comme report de distance.

Tâche de l'élève :

Résoudre les problèmes proposés

Matériel :

Compas, règle non graduée, règle graduée.

Déroulement

L'enseignant distribue **la feuille des quatre exercices** mise en annexe et ne commente rien. Les élèves doivent être autonomes pour résoudre ces exercices.

- L'exercice 1 évalue ***la capacité à analyser la figure*** (un carré de 2 cm de côté et un cercle dont le centre est un des sommets du carré et dont le rayon est de 2 cm) puis la ***capacité à utiliser le vocabulaire spécifique*** pour décrire cette figure.
- L'exercice 2 évalue la capacité à utiliser la propriété caractéristique du cercle pour résoudre un problème d'équidistance. Il évalue aussi la capacité à prendre en compte l'ensemble des informations.
- L'exercice 3 évalue ***les connaissances liées au cercle*** (centre et rayon), et ***la capacité à utiliser*** à bon escient le ***papier quadrillé***.
- L'exercice 4 évalue la compréhension du ***statut du dessin à main levée*** et la capacité à mener un raisonnement s'appuyant sur les ***propriétés des figures géométriques*** (carré et cercle).

Analyse des productions des élèves de la classe de CM1 de Ladislas Panis

L'exercice 1
Le fait qu'aucune indication ne soit inscrite sur la figure, désignation des points par exemple, rend la tâche difficile aux élèves. La majorité des élèves va parler du cercle et du carré, donner les mesures correctes, mais pas les indications nécessaires de la position relative du cercle par rapport au carré.
Aucune rédaction ne permet de construire la figure identique au modèle.

Des exemples de productions

Trace un cercle de centre A et de rayon AB. Trace un carré qui touche A et qui est aussi dehors.
Sur le dessin, l'élève désigne le centre du cercle par la lettre A et un sommet du carré par la lettre B ([AB] étant un côté du carré).

Fais un carré de 2 cm et trace un cercle.

Tu prends ton compas à 2 cm pour faire le cercle et aussi pour faire le carré tu prends ta règle graduée à 2 cm et tu traces.

Le carré est de 2 cm de chaque côté. La pointe du compas à droite en partant du haut, tracer le cercle de rayon 2 cm.

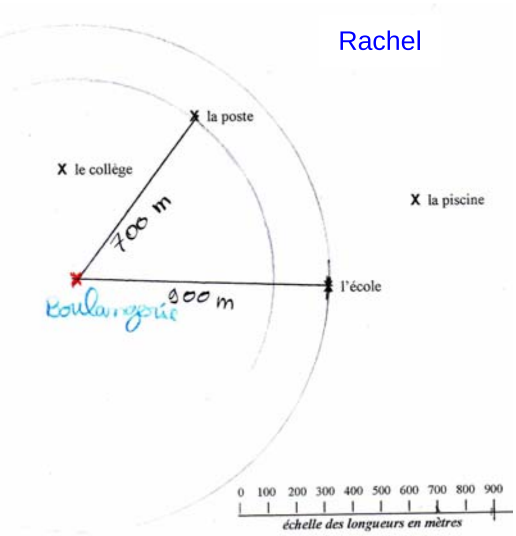
Faire un rond de 4 cm et un carré de 2 cm.

L'exercice 2

Cet exercice a largement été réussi par les élèves, soit par la construction des deux cercles (celui de centre « *la poste* » et celui de centre « *l'école* »), soit par la construction d'un seul de ces cercles et du report, à l'aide du compas, de la distance manquante ou bien de la recherche du point manquant à l'aide de la règle, graduée par l'élève. On observe beaucoup d'élèves qui n'utilisent pas le compas mais qui graduent leur règle non graduée afin de s'en servir comme d'une règle graduée.

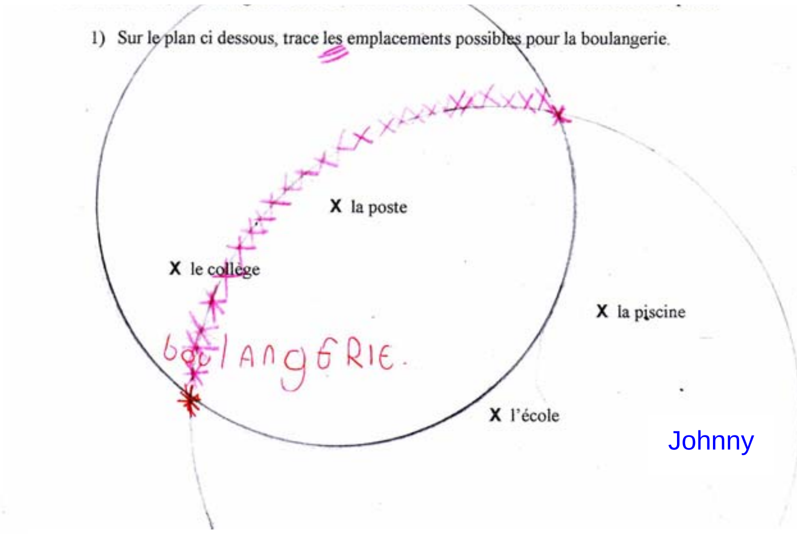
Des exemples de productions

Rachel

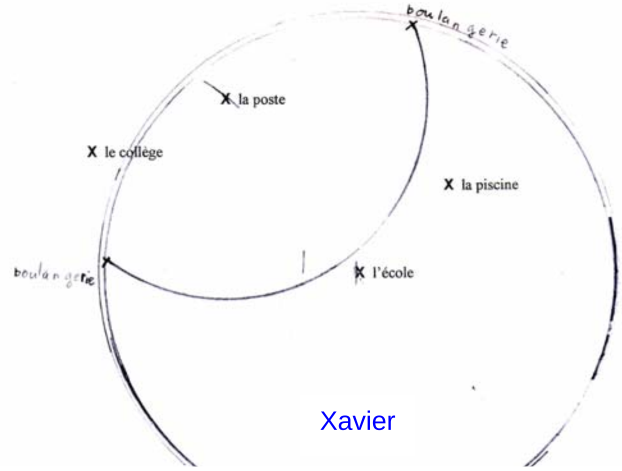


Rachel a cherché à l'aide de la règle, qu'elle a graduée, le point qui était à 700 m de la poste et à 900 m de l'école. Puis elle construit ensuite deux cercles concentriques mais de rayon 700 m et 900 m. Cette démarche ne donne pas les deux solutions possibles pour l'emplacement de la boulangerie et c'est une chance que le point trouvé soit la solution.

Pour sa part Johnny marque par des croix ce qui correspond aux emplacements possibles de la boulangerie, tous les points situés entre les deux points d'intersection des deux cercles. Puis parmi ces points il repasse en rouge le point qui sera la seule possibilité. Il semble que cet élève ait des difficultés à comprendre le sens donné à l'intersection de deux cercles en terme de distance.



Johnny



Xavier

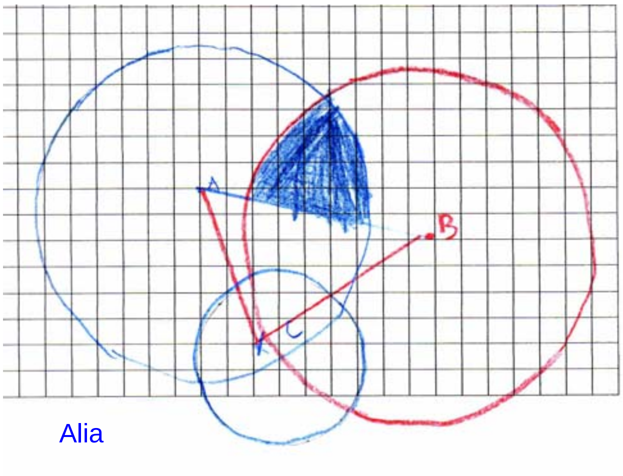
Quand à Xavier, il a compris qu'ayant tracé un premier cercle, il n'a pas besoin de tracer le second en entier : il lui suffit d'obtenir les points qui sont aux intersections des deux cercles.

L'exercice 3

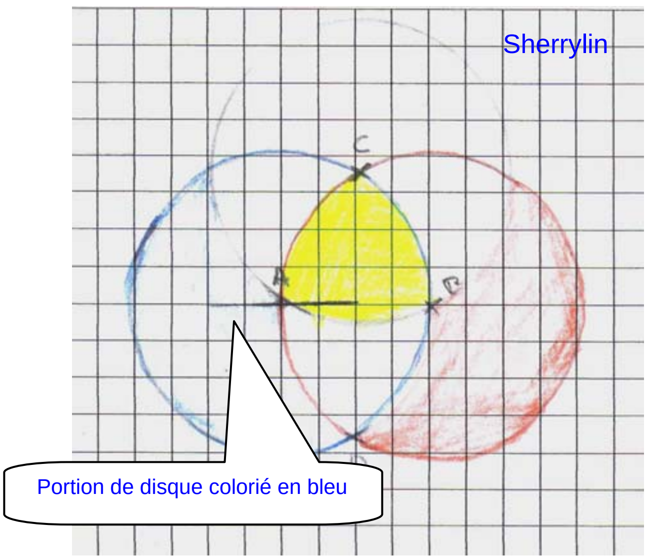
Cet exercice a été réussi par deux tiers des élèves.
Les erreurs des autres élèves sont de diverses natures :

- Un mauvais usage du quadrillage : le segment [AB] n'est pas construit sur une ligne du quadrillage, donc n'a pas pour longueur 4 carreaux.
- Une mauvaise compréhension de la désignation des points : plusieurs points « A » sont repérés sur la construction.
- Le coloriage de la partie commune aux trois disques n'est pas correct.

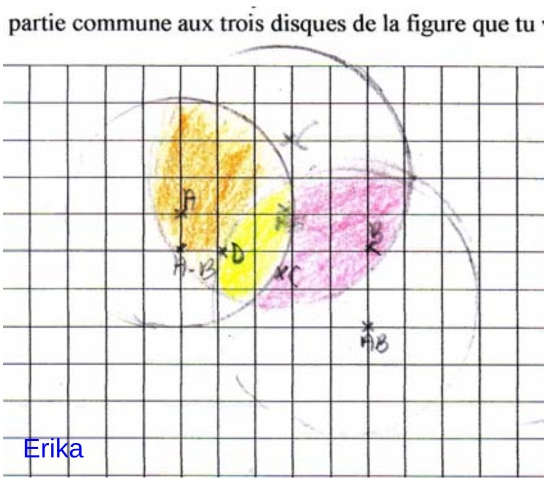
Des exemples de productions



Alia place les points A et B sur des nœuds du quadrillage mais la longueur du segment [AB] est de 6 cm, alors que le cercle de centre A a pour rayon 4 cm.
Le « petit » cercle a bien pour centre l'intersection des deux cercles (celui de centre A et celui de centre B), mais C ne désigne pas ce centre mais un point qui lui, est à 4 cm du point A. Le rayon de ce petit cercle est de 2 cm.
Le rayon du cercle centré en B est d'un peu plus de 4 cm.
Face à une production comme celle-ci, le maître est souvent démuni mais c'est en prenant toutes les informations possibles sur la construction que l'on peut comprendre en partie les erreurs et incompréhensions de l'élève.

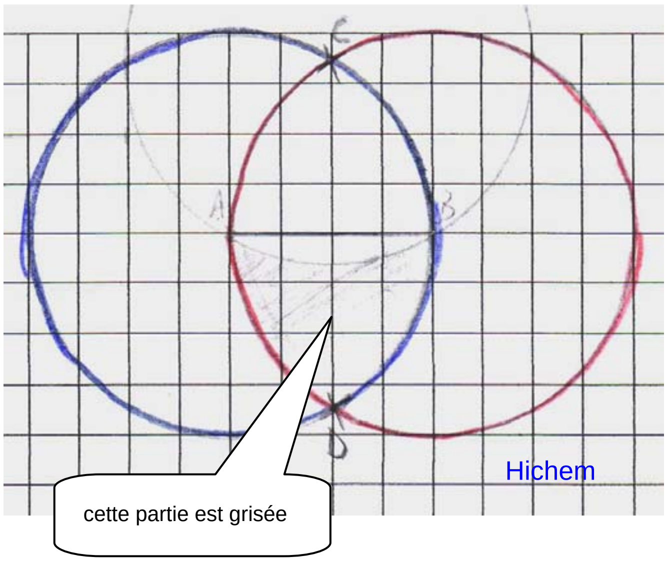


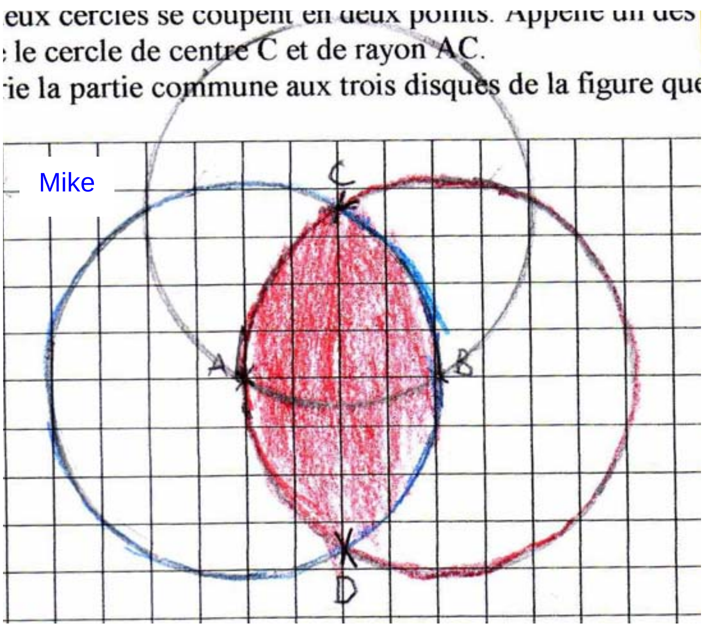
Concernant le coloriage, Sherrylin colorie correctement la partie commune aux trois disques (partie coloriée en jaune), mais elle colorie en rouge le cercle de centre B et la partie du disque de centre B qui ne possède pas une intersection avec un autre disque. Elle fait de même pour le disque de centre A.
On peut s'interroger sur la compréhension de la consigne « *repasse ce cercle en rouge* ». Fait-elle une distinction entre les mots *cercle* et *disque* ?



Erika fait partie des quelques élèves de la classe qui n'ont pas compris la désignation des points par une lettre sur une figure géométrique. Dans une figure géométrique, des points distincts ont des désignations différentes.

Voici deux productions (Hichem et Mike) qui illustrent les erreurs de coloriage de la partie commune aux trois disques.





L'exercice 4

Quelques élèves continuent de mesurer sur le dessin à main levée mais la grande majorité des élèves produit des réponses correctes en les argumentant.
Les réponses sont meilleures pour la question 1 concernant la propriété caractéristique du cercle. En revanche on observe de moins bons résultats à la question 2.

Des exemples de productions

Les élèves qui continuent de mesurer
Houria *: Le segment BH mesure 4,5 cm. On doit placer sa règle sur le segment puis on mesure.*
Tijany *: BH fait 3,2cm. J'ai mesuré avec la règle graduée. HC mesure 1,9 cm et j'ai aussi mesuré à la règle graduée. Mais on ne peut pas mesurer.*

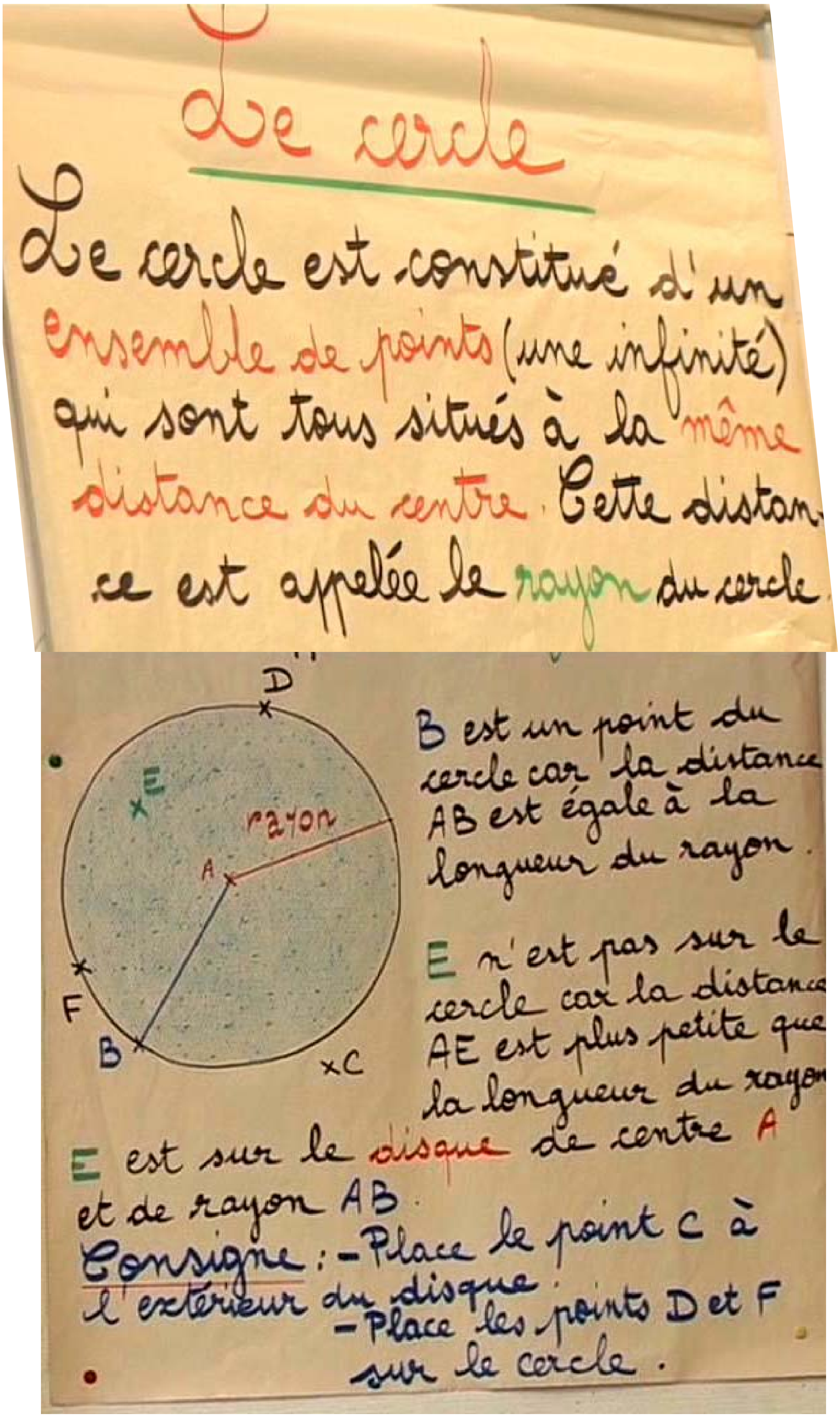
Ceux qui n'osent pas mesurer sur le dessin à main levée, donc qui construisent la figure aux vraies dimensions et mesurent sur cette construction.
Mylène *: BH fait 4 cm car tous les points du cercle sont tous à 4 cm. HC fait 3,1 cm car j'ai construit la figure au propre et j'ai mesuré.*
Xavier *: La longueur de BH est de 4 cm. D'abord j'ai reproduit la figure avec mon compas et ma règle et j'ai trouvé la vraie longueur. Et il y a une deuxième manière de trouver la vraie longueur en m'aidant de la consigne et du dessin à main levée. La longueur HC est de 3 cm. Je me suis aidé de la longueur BH qui donne 4 cm et aussi la longueur de chaque côté (du carré) est de 7 cm. Donc 4 cm + . = 7cm. HC fait 3 cm.*

Ceux qui répondent par une solution perceptive.
Rachel *: La longueur de HC est de 2 cm puisque c'est la moitié de 4 cm.*

Ceux qui font un petit arrangement avec les valeurs données dans le problème
Mélanie *: 4 + 4 = 8 ou 4 + 7 = 11. J'ai fait la longueur de B qui est de 4cm de plus que 4 donc 8 cm à moins que ce soit 4 cm de B et que BH fasse 7 cm.*

Ceux qui utilisent les propriétés géométriques.
Johnny : *BH = 4 cm et HC = 3 cm. Ils me disent que le cercle est de centre B et de rayon 4 cm et pour le point H à C : 7 – 4 = 3 cm.*
Hichem *: BH mesure 4 cm car le point H est sur le cercle de centre B.*

Annexes


Le cercle
Le cercle est constitué d'un ensemble de points (une infinité) qui sont tous situés à la même distance du centre. Cette distance est appelée le rayon du cercle.
D
E
rayon
A
F
B
C
B est un point du cercle car la distance AB est égale à la longueur du rayon.
E n'est pas sur le cercle car la distance AE est plus petite que la longueur du rayon
E est sur le disque de centre A et de rayon AB.
Consigne : - Place le point C à l'extérieur du disque
- Place les points D et F sur le cercle.

Évaluation nationale 6ème de 2004

Exercice 33 *(Exercice repris de 2000)*
http://cisad.adc.education.fr/eval/pages-04/telech/6eme/les_pdf/mathprof.pdf

Capacité	***Produire une réponse, la justifier.***
Compétence	***Reconnaître un cercle comme un ensemble de points équidistants d'un point donné.***
Composante	***Rechercher, parmi des points donnés, le centre d'un cercle dont on connaît quatre points et justifier.***

Commentaire
Cet exercice propose une situation permettant de repérer les élèves qui perçoivent que les points d'un cercle sont équidistants d'un point donné.
Le code 6 de l'item 76 repère les élèves qui ont vérifié l'équidistance pour deux des quatre points seulement.
Il pourra être intéressant de confronter les conceptions du cercle qui apparaissent dans l'exercice 21 et dans cet exercice.
Le code 5 de l'item 77 peut indiquer une mauvaise lecture de consigne ou une justification instrumentée, mais témoigne, plus probablement, de la conception du cercle en tant que dessin et non comme un ensemble de points situés à une distance donnée d'un point fixe. Ce changement de conception est à travailler en sixième.

Consignes de codage et résultats nationaux

item 76 : *Réponse*

G..	code 1	76,9% de réussite
F ou H..	code 6	7,9%
Autre réponse	code 9	6,1%
Absence de réponse..	code 0	9,1%

item 77 : *Explication*

Explication faisant appel à l'équidistance	code 1	26,7%
Référence au mesurage des longueurs GA, GB, GC et GD, mais l'égalité des mesures n'est pas signalée	code 2	9,2%
Justification ne faisant référence qu'à l'utilisation du compas	code 5	24,5%
Autre réponse	code 9	24,1%
Absence de réponse..	code 0	15,5%

Résultats et commentaires provenant des évaluations 2000
réponses

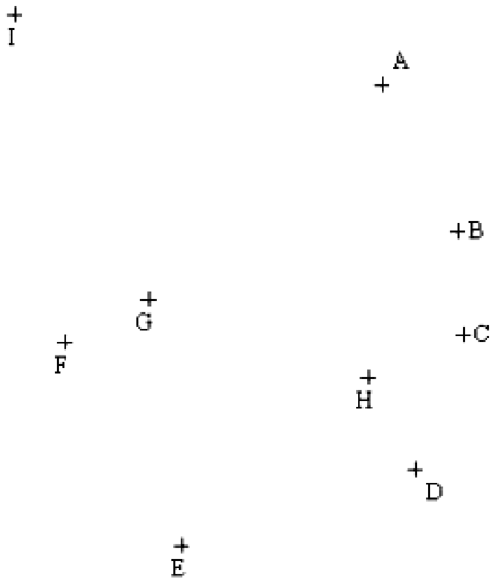
G et explication faisant appel à l' équidistance	34,3%	45,4%
G avec référence au mesurage des longueurs GA, GB, GC,GD, mais l' égalité des longueurs n' est pas signalée	11,1%	

explications
G sans explication..10,2%
G avec justification faisant référence à l'utilisation du compas (code 5) 16,6%
F ou H avec ou sans explication (code 6)..6,2%
Autre réponse..12,2%
Absence de réponse 9,4%

Commentaires et analyse des réponses
Cet exercice propose une situation permettant d'accéder à la représentation d'un cercle comme ensemble de points équidistants d'un point donné.
Le code 6 permet de repérer les élèves qui vérifient l'équidistance pour deux des points sur quatre seulement.
Il est intéressant de confronter les conceptions du cercle qui apparaissent dans l'exercice 19 et dans cet exercice.
La forte proportion (plus de 15 %) de codes 5 peut indiquer une mauvaise lecture de consigne mais témoigne, plus probablement, de la conception du cercle en tant que dessin et non comme un ensemble de points situés à une distance donnée d'un point fixe. Cette évolution de conception est à travailler en 6ème.

Exercice 1

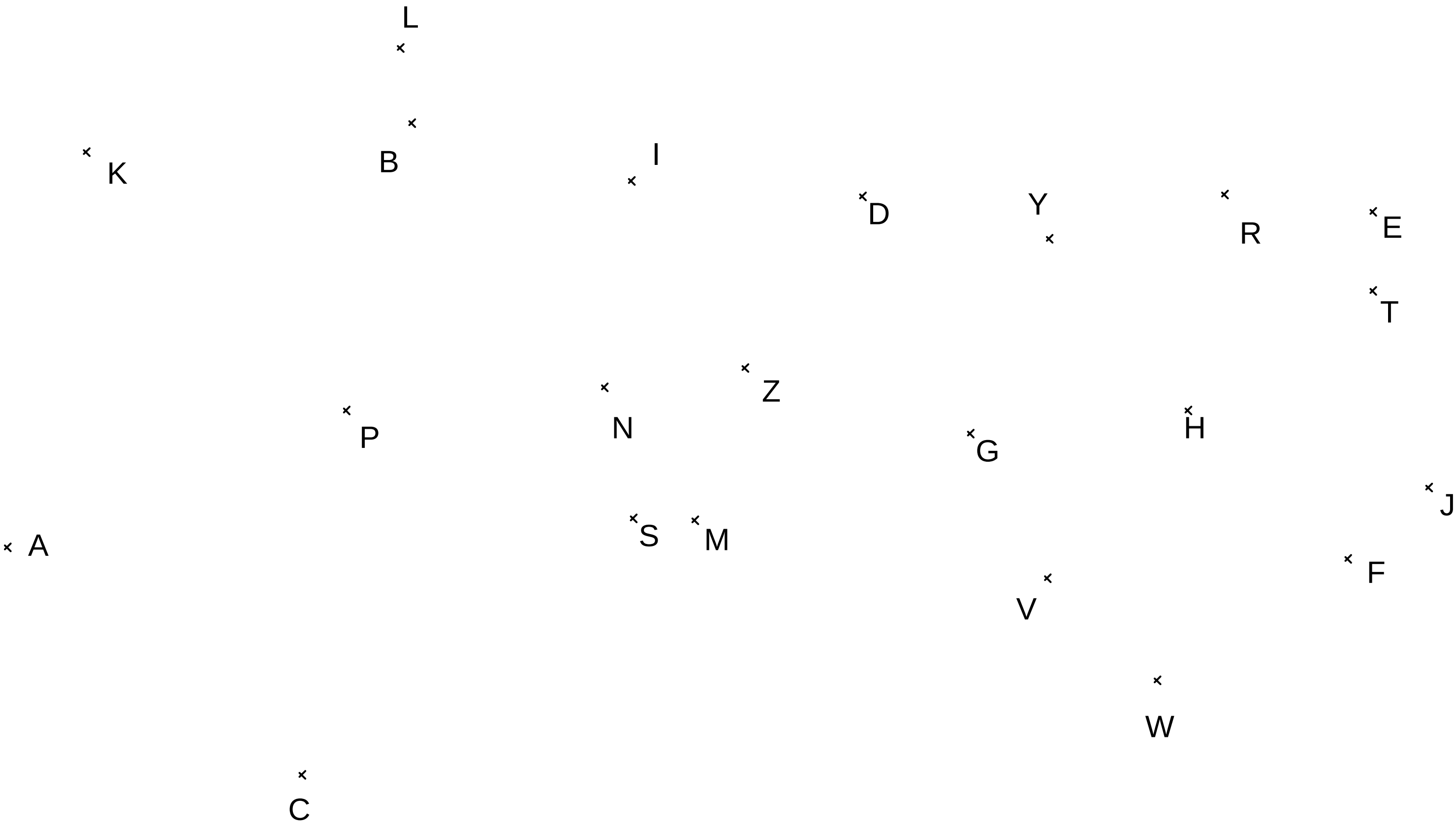
Les points A, B, C et D sont sur un même cercle.
Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.
En utilisant **ta règle graduée**, trouve le centre de ce cercle.



Le centre du cercle est le point : ....
Explique comment tu as trouvé :……………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..

Exercice 2

1) Parmi les points tracés sur la feuille, repasse en rouge tous ceux qui sont situés à 5 cm du point **P**. Explique comment tu les as trouvés.



………
………
………………………………………………………………………

2) Parmi les points tracés sur la feuille, repasse en bleu tous ceux qui sont situés à 3 cm du point **H**. Explique comment tu les as trouvés.
………
………
………………………………………………………………………

Exercice 3

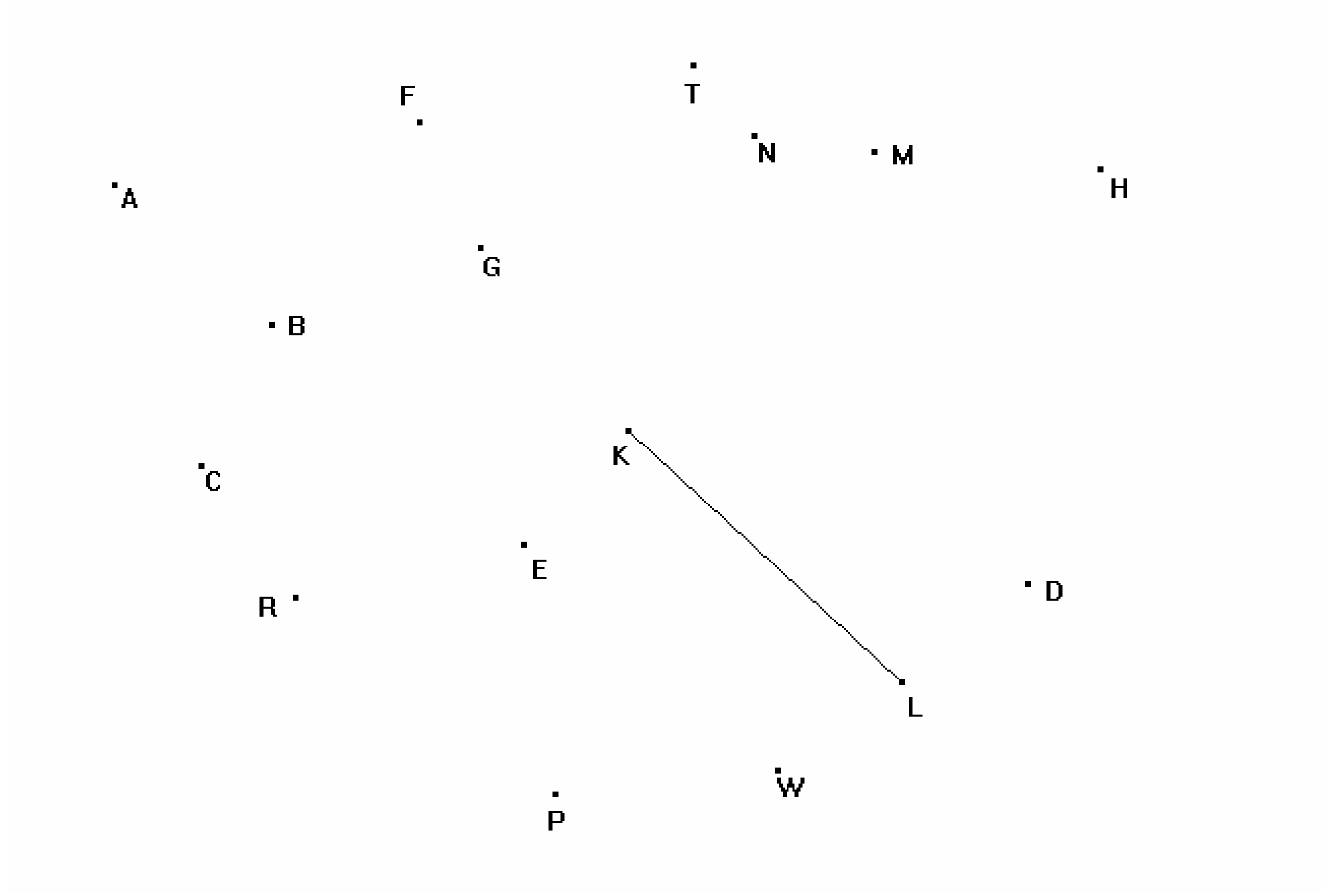
On a tracé le segment [KL]. Sa longueur est de 5 cm.

Sans utiliser la règle graduée, peux-tu donner la longueur des segments :

[KB] :………. [KA] :……….[KM] :……….[KE] :……….. [HD] :……….

[KT] :………. [KR] :……….[BC] :……….[KF] :………. [GE] :……….

Explique ta méthode :……………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
Peux-tu donner les longueurs d'autres segments ? si oui lesquelles ?......................
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………



Exercice 3 modifié

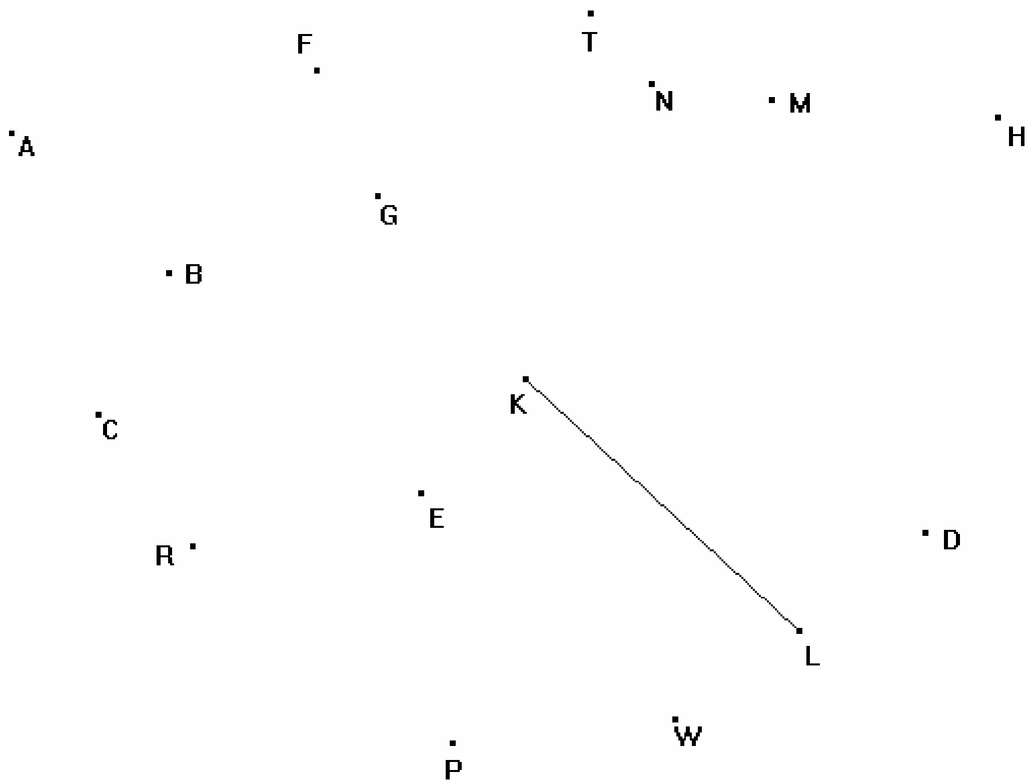
On a tracé le segment [KL]. Sa longueur est de 5 cm.

Sans utiliser ta règle graduée, range, dans les colonnes ①②③, les segments suivants [KB];[KA];[KM];[KE];[HD];[KT];[KR];[BC];[KF];[GE] selon leur longueur :

①	②	③
Les segments dont la longueur est plus petite que 5 cm.	Les segments dont la longueur est exactement 5 cm.	Les segments dont la longueur est plus grande que 5 cm.

Explique ta méthode :……………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………….

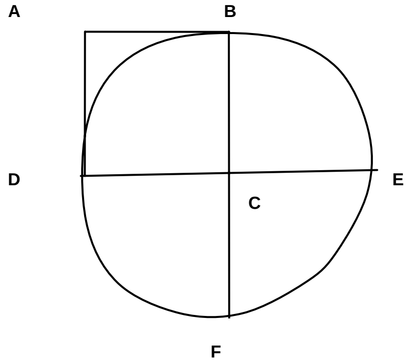
Peux-tu donner d'autres longueurs de segments ? si oui lesquelles ?.....................................



Séance 3

Exercice 1

On a dessiné à main levée la figure suivante :



On sait que :

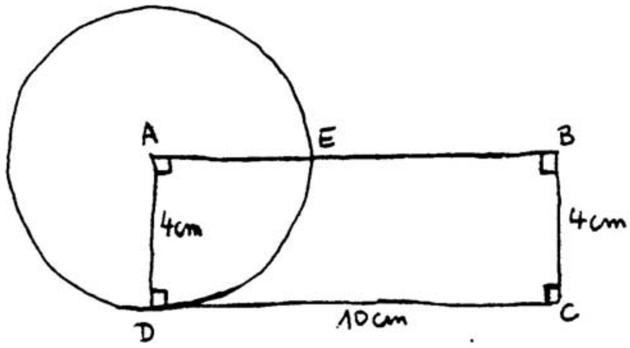
- ABCD est un carré dont la longueur des côtés est de 5 carreaux ;
- Le cercle est de centre C et de rayon CD ;
- Les points B, C et F sont alignés ;
- Les points D, C et E sont aussi alignés.

1) Peux-tu donner la longueur du segment [CF] ? du segment [CE] ? du segment [DE] ? du segment [BF] ?
Explique tes réponses…………………………………………………………………………………………
………
………
………

2) Construis aux vraies dimensions la figure sur le papier quadrillé ci-dessous.

Exercice 2

Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et le cercle de centre A qui passe par D.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



Quelle est la longueur du segment [EB] ? ....

Justifie ta réponse : ....

....

....

Les bijoux

Un plan a été retrouvé dans la cave désignant l'emplacement des bijoux cachés par des familles pendant la 2ème guerre mondiale. Voici le plan et les indications fournies.
« *Aller au jardin du Luxembourg. Les bijoux sont enterrés à 4 mètres du grand sapin et à 7 mètres de la statue du Dieu Apollon.* »
Voici un plan du Luxembourg et une échelle des longueurs. Où faut-il creuser pour récupérer les bijoux ?

X La statue

Le sapin X

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

échelle des longueurs en mètres

La mangeoire des chèvres

Dans un enclos, deux chèvres sont attachées chacune, par une corde, à un piquet différent. Le fermier ne dispose que d'une mangeoire. Il se demande où il pourrait la placer pour que ses deux chèvres puissent aller y manger en même temps. Pourriez vous l'aider ?

Voici des informations

Les deux piquets sont espacés de 16 carreaux. La corde d'une des chèvres est longue de 9 carreaux et l'autre corde est longue de 10 carreaux.
Faire un croquis qui donne l'emplacement possible de la mangeoire.

Séance 4

La mangeoire des chèvres (énoncé modifié)

Dans un pré, deux chèvres sont attachées chacune, par une corde, à un piquet différent. Le fermier ne dispose, comme mangeoire, que d'un petit seau pour nourrir ses animaux. Il se demande où il pourrait le placer pour que ses deux chèvres puissent aller y manger en même temps. Pourriez vous l'aider ?

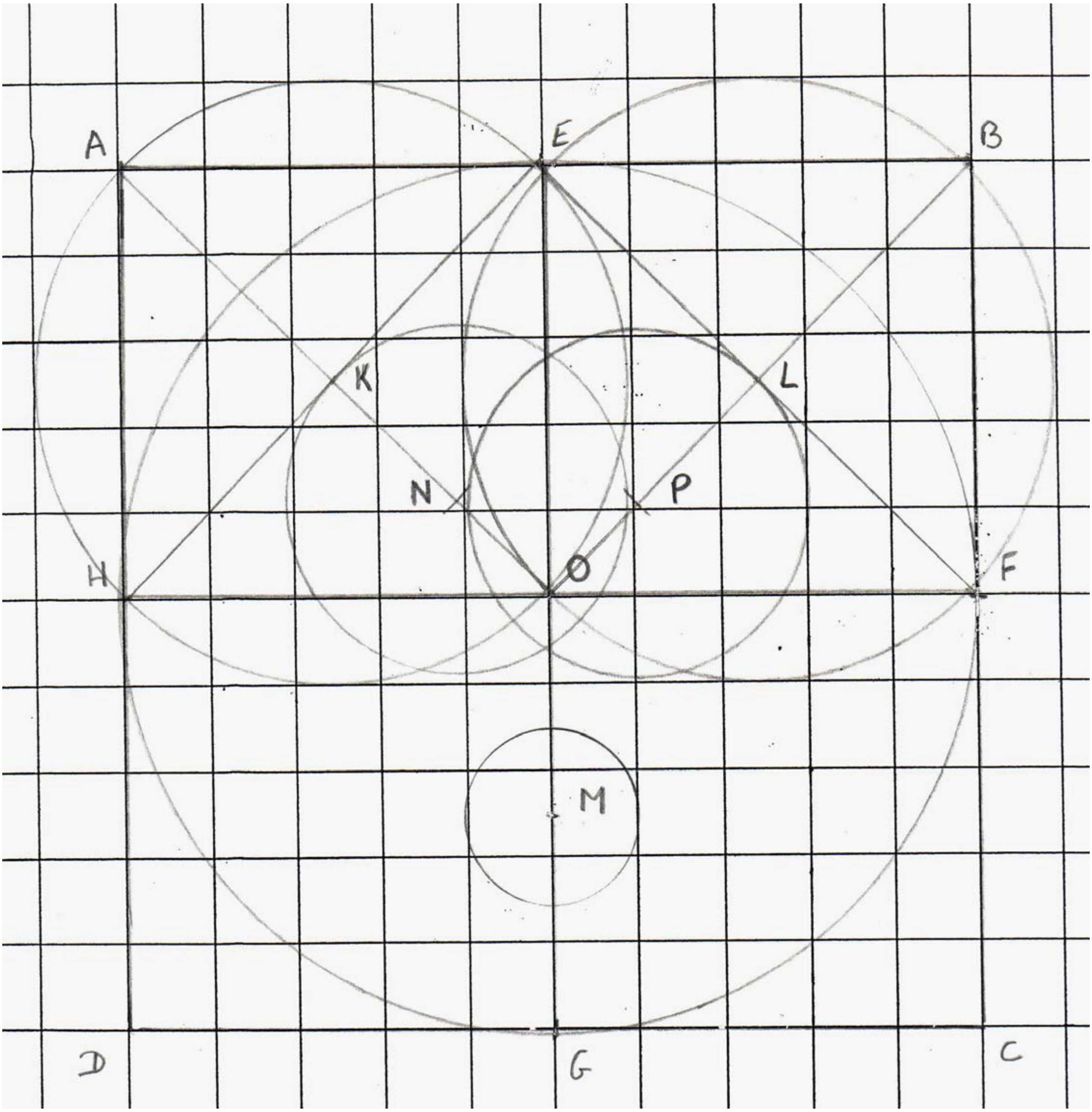
Voici des informations
Les deux piquets sont espacés de16 mètres. La corde d'une des chèvres est longue de 9 mètres et l'autre corde est longue de 10 mètres.
En utilisant l'échelle des longueurs ci dessous, faire un croquis précis qui donne les emplacements possibles de la mangeoire.

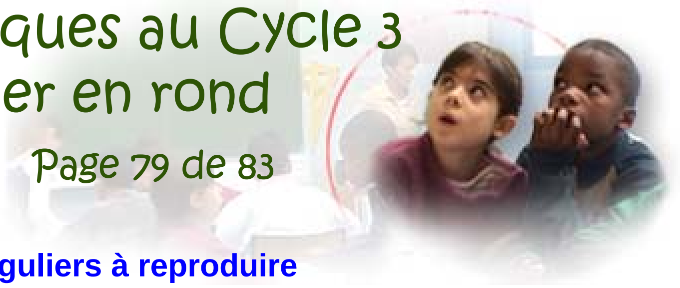
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

échelle des longueurs en mètres

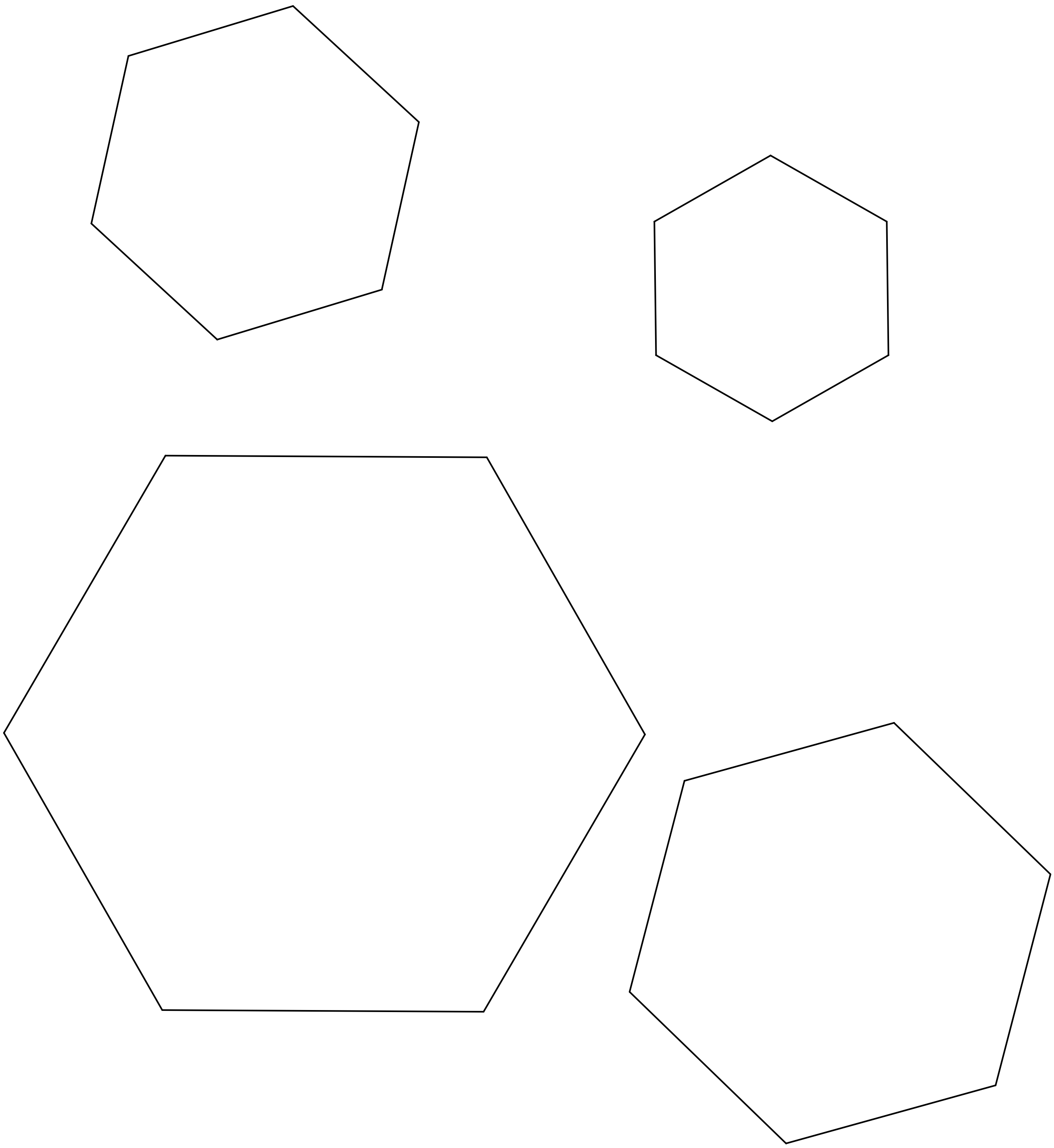
Feuille quadrillée

Modèle

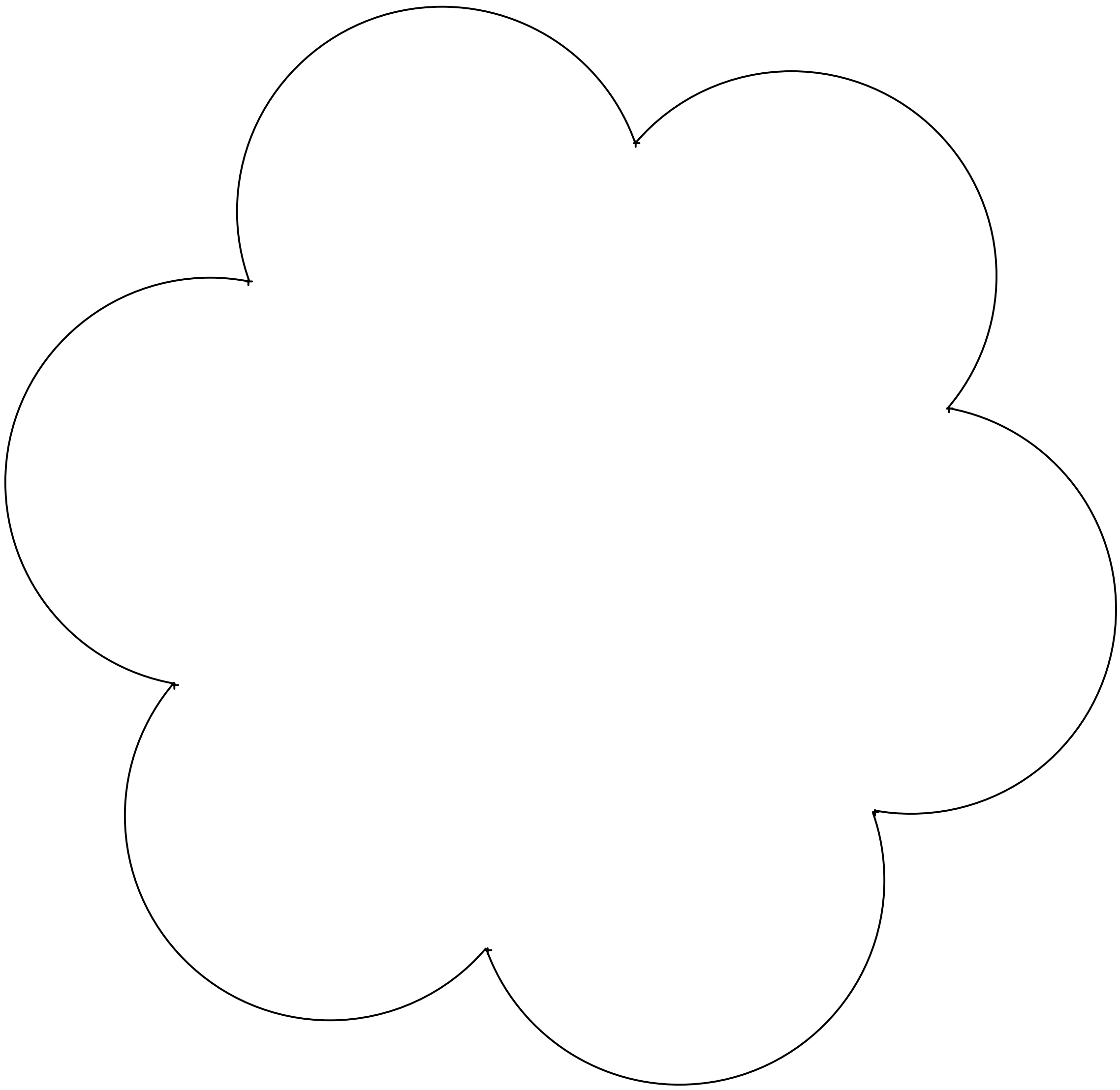




Les hexagones réguliers à reproduire



La petite fleur magique



Les plots

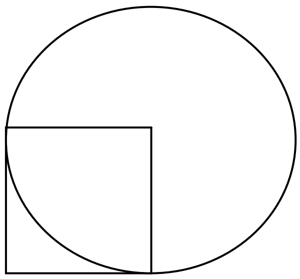
Sophie veut placer 3 plots sur le terrain de sport.
Elle sait que :

- le plot **A** doit être à 5mètres du plot **B** et à 8 mètres du plot **C.**
- le plot **B** doit être à 6 mètres du plot **C.**

En utilisant l'échelle des longueurs, représente, sur la feuille, la disposition des 3 plots.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Exercice 1



Ecris un message pour qu'un élève de l'autre CM1 puisse construire cette figure sans l'avoir vue.
……………………………………………………………..….
……………………………………………………………...
……………………………………………………………..…
…………………………………………………………….…
…………………………………………………………….…
…………………………………………………………….…

Exercice 2

Dans une ville, la boulangerie est située à 900mètres de l'école et à 700 mètres de la poste.

1) Sur le plan ci-dessous, trace les emplacements possibles pour la boulangerie.

X la poste

X le collège

X la piscine

X l'école

0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

échelle des longueurs en mètres

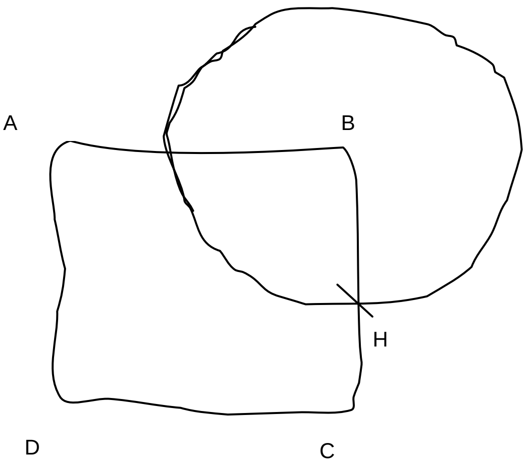
2) Mais on sait que cette boulangerie est plus proche du collège que de la piscine, marque en rouge l'emplacement exact de la boulangerie.

Exercice 3

Sur papier quadrillé :

1) Construis un segment [AB] de longueur 4 carreaux.
2) Trace le cercle de centre A et de rayon AB. Repasse ce cercle en bleu.
3) Trace le cercle de centre B et de rayon AB. Repasse ce cercle en rouge.
4) Ces deux cercles se coupent en deux points. Appelle un des points C et l'autre D.
5) Trace le cercle de centre C et de rayon AC.
6) Colorie la partie commune aux trois disques de la figure que tu viens de construire.

Exercice 4



La figure suivante est faite à main levée.
ABCD est un carré dont la longueur du côté est 7 cm.
Le cercle est de centre B et de rayon 4 cm.
1) Quelle est la longueur du segment BH ? Explique ta réponse.
2) Calcule la longueur HC. Explique ton calcul.

……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………