Chap 5 : Proportionnalité et fonctions numériques

Apports théoriques

1. Suites de nombres proportionnelles

1.1 Définition

Deux suites de nombres réels (ayant le même nombre de termes) sont proportionnelles si on peut passer de chaque terme de la 1ère suite au terme correspondant de la 2ème par un même opérateur multiplicatif (**le coefficient de proportionnalité**).

1.2 Propriétés numériques des suites proportionnelles

Propriétés relatives à l'ordre :
Pour les nombres positifs, la proportionnalité respecte l'ordre.
(Si 2 suites proportionnelles sont formées de nombres positifs, l'ordre selon lequel sont rangés les nombres de la 1ère suite est le même que celui selon lequel sont rangés les nombres de la 2ème suite).

Propriétés de linéarité :
Propriété additive :
Si 2 suites sont proportionnelles, « l'image d'une somme est la somme des images ».
Quels que soient les nombres x_1, x_2 et y_1, y_2 :

x_1	x_2	x_1+x_2
y_1	y_2	y_1+y_2

Ou dans le langage des fonctions : $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$

Propriété multiplicative :
Quels que soient les nombres x, y et k :

x	kx
y	ky

Ou dans le langage des fonctions : $f(kx)= kf(x)$

→ Il suffit de trouver, parmi tous les nombres composant les 2 suites, un seul exemple où l'une de ces propriétés (= propriétés de linéarité) n'est pas vérifiée pour que les 2 suites ne soient pas proportionnelles.

Propriétés des « rapports égaux » :

$$\frac{y1}{x1}=\frac{y2}{x2}=\frac{y3}{x3}=...=\frac{yn}{xn}=a$$

Propriété dite « du produit en croix » :
$x_1y_2=x_2y_1$...

Propriété des écarts :
Pour deux suites proportionnelles, à des écarts égaux entre nombres de la 1ère suite correspondent des écarts égaux entre les nombres correspondants de la 2ème suite.

6	10	14	20	26
4,5	7,5	10,5	15	19,5

Il y a le même écart (6) entre 14 et 20 et entre 20 et 26 et donc le même écart (4,5) entre 10,5 et 15 et entre 15 et 19,5.

1.3 Propriété graphique des suites proportionnelles

Soient 2 suites proportionnelles, on considère les couples de nombres formés par un nombre de la 1ère suite et son image dans la 2ème (x_1,y_1) ;(x_2,y_2)…
Soit un système d'axes gradués régulièrement à partir de 0, les points correspondants à ces couples sont alignés sur une droite qui passe par l'origine des axes.
Cette propriété est caractéristique des suites proportionnelles.

2. Situations de proportionnalité

Exemple :

1	10	15	16
5,4	54	81	86,4

La situation est modélisable par la fonction linéaire $x \longrightarrow 5{,}4x$.
On dit que cette situation est une situation de proportionnalité.

Une situation de proportionnalité est une situation dans laquelle 2 grandeurs (exprimées avec certaines unités) sont mises en relation et qui modélisable par une relation entre 2 suites de nombres proportionnelles, et donc par une fonction linéaire.

3. Quelques types de fonctions numériques

3.1 Fonction linéaire

Peuvent être décrites par un schéma du type : $\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R \\ x & \longrightarrow & ax \end{array}$

Caractéristiques des suites proportionnelles.

3.2 Fonction affine

Peuvent être décrites par un schéma du type : $\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R \\ x & \longrightarrow & ax+b \end{array}$

Ces fonctions sont croissantes si a > 0 et vérifient la propriété des écarts.
Dans un système d'axes gradués, les couples de nombres correspondant sont représentés par des points alignés (mais la droite ne passe par l'origine que si b = 0).

3.3 Fonction « puissance »

Peuvent être décrites par un schéma du type : $\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R \\ x & \longrightarrow & ax^n \end{array}$

Dans un système d'axes gradués, les couples de nombres correspondant ne sont pas représentés par des points alignés (sauf si n=1 ou n = 0 ou a = 0).

4. Problèmes de proportionnalité

4.1 Problèmes du type « recherche d'une quatrième proportionnelle »

Les différentes procédures de résolution :

- Utilisation des propriétés de linéarité :
  Ex : 6 m coûtent 21 F donc 3 m coûtent 10,50F (la moitié du prix) et 9 m coûtent 31,50 F (le prix de 6m + le prix de 3m).

- Passage par l'unité.

- Utilisation d'un rapport scalaire : passer directement de 6 à 9 par un rapport scalaire (ici en multipliant 6 par 3/2).

- Utilisation des rapports égaux.

- Procédure dite par les produits en croix.

- Utilisation du coefficient de proportionnalité.

- Utilisation d'un graphique.

4.2 Problèmes du type « comparaison de proportions »

5. Quelques applications de la proportionnalité

5.1 Vitesse moyenne

$d=v\times t$ (où d est la distance parcourue, v la vitesse moyenne et t la durée du parcours).

6.2 Pourcentages

Augmenter de a% c'est multiplier par $1 + \frac{a}{100}$.

Baisser de a%, c'est multiplier par $1 - \frac{a}{100}$.

6.3 Echelles

Aspects didactiques

1. Quels aspects de la proportionnalité prendre en compte ?

1.1 La proportionnalité peut être examinée dans 3 cadres différents

- Le **cadre des grandeurs** : utilisation de nombre « concrets », correspondant à des quantités ou à des mesures.
- Le **cadre numérique** : nombres manipulés de manière abstraite.
- Le **cadre graphique.**

1.2 Situations servant de support à ces problèmes

- Situations où la proportionnalité intervient par **convention sociale** : problème de nature économique, situations de la vie courante.
- Situations où la proportionnalité permet une **modélisation d'un phénomène** : physique (engrenages…) ou géométrique (diamètre, côté…)
- Situations où la proportionnalité intervient comme **outil pour définir de nouveaux concepts** : échelle, pourcentage, débit…

1.3 Typologie des problèmes posés

- Problèmes de **reconnaissance de la proportionnalité**.

- Problèmes de **4ème proportionnelle**.
- Problèmes de **comparaison**.
- Problèmes de **double proportionnalité** : cas d'une variable proportionnelle à 2 autres variables qui peuvent être modifiées de manière indépendante (ex : l'aire du rectangle est proportionnelle à la largeur et à la longueur du rectangle).
- Problèmes de **passage d'un cadre à un autre**.

2. Les procédures de résolution à l'école primaire

- Utilisation des **propriétés additives et multiplicatives de la linéarité** (+ cas particulier du passage par l'unité).
- Mise en évidence et utilisation du **coefficient de proportionnalité**.
- Recours à une **représentation graphique**.

→ dépend du choix des valeurs des variables didactiques.

3. Les principales variables didactiques dans les problèmes de proportionnalité

- Les **relations entre les nombres donnés** :
  - Le coefficient de proportionnalité peut ou non être choisi pour favoriser les procédures qui s'appuient sur son identification : entier (simple ou non), décimal (simple ou non, fractionnaire.
  - Les rapports de linéarité.
- **Les types de nombres** : peut ou non favoriser recours au calcul mental.
- **Le nombre de couples donnés** : peut favoriser la multiplicité des combinaisons linéaires ou faciliter la mise en évidence du coefficient de proportionnalité.
- **Le type de situation** : validation ou non par le milieu.

4. Les lieux de difficulté pour les élèves

- **Identifier les grandeurs en relation** dans la situation proposée.
- **Identifier que la situation relève bien du modèle proportionnel**.
- Pour de nombreux élèves, **les situations d'augmentation et de diminution sont liées aux notions d'addition et de soustraction**, ce qui constitue un obstacle à la reconnaissance du modèle proportionnel.
- Choisir une **procédure de résolution**.
- La **mise en œuvre** de la procédure choisie.