ثانوية المنصور الذهبي التأهيلية نيابة سيدي البرنوصي - زناتة أكاديمية: الدار البيضاء الكبرى	**سلسلة تمارين الحساب التكاملي**	الأستاذ : تباع خالد المستوى : السنة الثانية بكالوريا علوم الحياة و الأرض

التمرين1 : احسب التكاملات التالية:

1) $I=\int_2^1(t^2-4t+3)dt$
2) $I=\int_1^2\left(t^2-\frac{1}{t}\right)dt$
3) $I=\int_0^1\sqrt{x}dx$; $I=\int_1^8\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
4) $I=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{2x+5}}dx$; $I=\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$
5) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$; $I=\int_0^1 3xe^{x^2+3}dx$
6) $I=\int_0^1 2^{5x}dx$; $I=\int_{\frac{1}{3}}^1 e^{3x+4}dx$
7) $I=\int_{\ln 1}^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dt$; $I=\int_{-1}^1\frac{x}{x^2-4}dx$; $I=\int_1^2\frac{t^3}{t^4+2}dt$
8) $I=\int_0^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$; $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$

التمرين2 : احسب التكاملات التالية:

1) $I=\int_0^2|x-1|dx$
2) $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$
3) $I=\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{|\ln x|}{x}dx$

التمرين3 :

باستعمال المكاملة بالأجزاء احسب التكاملات التالية:

1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}3x\sin(3x)dx$; $I=\int_1^e x\ln x\,dx$
2) $I=\int_0^4(x+2)\,e^x\,dx$; $I=\int_0^1(2x+1)e^{-x}dx$
3) $I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}$; $I=\int_1^2(t-2)e^{2t}dt$

التمرين4 : نعتبر التكاملين:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x\;dx\;;J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x\;dx$$

1) احسب $I+J$ و $I-J$
2) استنتج I و J

التمرين5 :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب:

$$f(x)=\frac{1}{e^x-1}$$

1) حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث :

$$f(x)=a+\frac{be^x}{e^x-1}$$

2) استنتج التكامل: $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx$

التمرين6 :

1) حدد ثلاثة أعداد حقيقية a و b و c بحيث:

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}:\frac{x^2}{(x-1)^2}=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

2) استنتج التكامل: $\int_{-1}^0\frac{x^2}{(x-1)^2}dx$

التمرين7: نريد حساب التكاملات التالية: $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

و $J=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ و $K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx$

1) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $[0;1]$ ب:

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$$

احسب مشتقة الدالة $x\to\sqrt{x^2+2}$ ثم استنتج f'

2) احسب I
3) دون حساب التكاملات J و K بين أن $J+2I=k$
4) باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن $K=\sqrt{3}-J$ ثم استنتج قيمتي J و K

التمرين8:نعتبر متتالية التكاملات التالية :

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{e^x+1}dx$$

1) احسب I_1 و I_0+I_1 ثم استنتج I_0
2) احسب I_n+I_{n+1} لكل $n\in\mathbb{N}$
3) بين أن المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية
4) أثبت أن لكل x من $[0;1]$: $\frac{e^{nx}}{e+1}\le\frac{e^{nx}}{e^x+1}\le\frac{e^{nx}}{2}$

ثم استنتج تأطيرا للتكامل I_n

5) هل المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة؟

التمرين9: نعتبر متتالية التكاملات التالية :

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$$

1) احسب I_0 و I_1
2) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}:\ 2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$
3) أ- بين أن المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية

ب-بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}:\ I_n\ge 0$

ج-استنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N}:\ I_n\le\frac{e^2}{n+1}$

4) احسب نهاية المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

التمرين10: نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ ب:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ $(\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{\imath}\|=2cm)$

1) ليكن α عددا حقيقيا حيث $\alpha>1$

أ- بين أن $\forall x\geq 1: f(x)\geq 0$

ب- استنتج أن مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C_f) و المستقيمين $x=1$ و $x=\alpha$ و محور الأفاصيل هي: $I(\alpha)=\frac{-4\ln\alpha-4}{\alpha}+4$

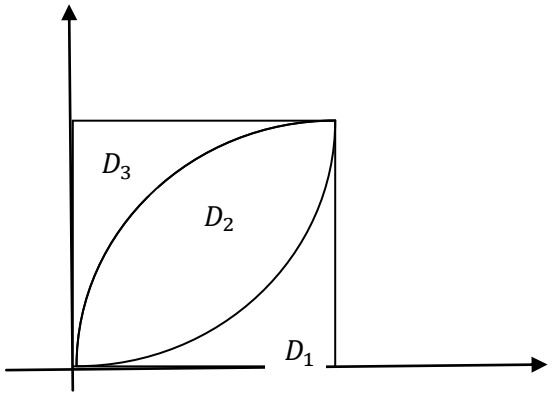
2) استنتج $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$

التمرين11:

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ $(\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{\imath}\|=1cm)$

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[0;1]$ بمايلي:

$$f(x)=\sqrt{x}\ ;\ g(x)=x^3$$



احسب مساحات الأجزاء D_1 و D_2 و D_3

حيث $\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{\imath}\|=1cm$

التمرين12:

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ $(\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{\imath}\|=1cm)$

احسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران منحنى الدالة f حول محور الأفاصيل دورة كاملة على المجال I في كل حالة:

1) $f(x)=\sin x$; $I=[0;\pi]$

2) $f(x)=\sqrt{x\ln x}$; $I=[1;e^2]$

التمرين13:

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ ب:

$$f(x)=x^2+(\ln x)^2$$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ $(\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{\imath}\|=3cm)$

1) أ- بين أن $(\ln x-1)$ دالة أصلية للدالة $\ln x$ على $\mathbb{R}^{*+}$.

ب-استنتج التكامل $\int_1^e \ln x\,dx$.

2)باستعمال المكاملة بالأجزاء احسب التكامل:

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx$$

3) استنتج مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C_f) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$ و محور الأفاصيل.

التمرين14 :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ ب:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$$

1) حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث :

$$f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}$$

2) استنتج التكامل: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

التمرين15 :

احسب التكامل التالي:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$$