Université Paul Sabatier, L2 Physique, 2017/2018

Session 2
Mathématiques pour la Physique

25 Juin 2017, 10h00 - 12h00, année universitaire 2017-2018.
Durée : 2 heures.

Remarques générales : Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. L'usage des téléphones portables est interdit.
Toutes les réponses doivent être clairement justifiées et, lors de la correction, une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction.
Le sujet comporte 2 pages et les exercices sont indépendants.

$* * *$

1. Questions de cours

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $< .|. >$ un produit scalaire de E.

a) On considère 2 vecteurs u et v de E. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ces 2 vecteurs et le produit scalaire $< .|. >$.

b) Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ...u_n)$ une base quelconque de E. Donner l'expression des vecteurs $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de la base orthonormée construite par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base $\mathcal{B}$.

$* * *$

2. Diagonalisation d'endomorphisme

Soit l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ et $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sa représentation matricielle dans la base canonique:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Quel est le rang de A?

b) Calculer A^2. Quel est le rang de A^2?

c) En déduire que Ker f = Ker f^2.

d) En déduire que Ker $f \oplus$ Im $f = \mathbb{R}^4$.

e) Calculer le polynôme caractéristique de A.

f) En déduire les valeurs propres de A.

g) Calculer les vecteurs propres de A, en déduire que la matrice est diagonalisable et donner A sous sa forme diagonale.

$* * *$

3. Séries numeriques

a) Établir la decomposition en éléments simples de : $\dfrac{1}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{A}{n-1} + \dfrac{B}{n+1}$ avec des constantes A et B à déterminer.

b) Justifier que la série numerique : $\left(\displaystyle\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n^2-1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge et calculer : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

c) Justifier que la série numerique : $\left(\displaystyle\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{(n^2-1)^2}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge et calculer : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2}$.

On pourra utiliser que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$* * *$

4. Séries entières

a) Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes, ainsi que la valeur de leur somme:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, n\, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, \frac{1}{n}\, x^n \qquad .$$

b) En déduire la valeur de la somme de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, \frac{(n-2)^2}{n}\, x^n \qquad .$$