« Les mathématiques à l'école primaire »
Conférence de Rémi Brissiaud

(DOUAI samedi 2 décembre 2006)

Rémi Brissiaud

- Maîtrise de mathématiques
- Docteur en psychologie cognitive
- Maître de conférence en psychologie à l'IUFM de Versailles
- Chargé de cours à l'ISPA de Lisbonne
- Chercheur associé à l'Université de Paris VIII
- A fait partie de 1e équipe de recherche ERMEL jusqu'en 1982 (qui avait un position un peu différente par rapport à la 2e équipe)

Plan de l'intervention

A. CONSTRUCTION DU NOMBRE CHEZ L'ENFANT
B. LA CONCEPTUALISATION DES OPERATIONS CHEZ L'ENFANT.

A. La Construction du nombre chez l'enfant

« Comment les enfants apprennent à compter ? » est le fruit d'une recherche interculturelle.
Des psychopédagogues ont comparé entre 1990 et 2000 la construction du nombre chez les enfants occidentaux et asiatiques.
La façon dont les enfants asiatiques « parlent » le nombre est impressionnante et ces enfants sont plus performants que les enfants occidentaux. Il y a deux ans de décalage.
Il y a un facteur langagier à cette cause
Les asiatiques ne construisent pas le nombre comme les occidentaux.
C'est ainsi qu'ils comptent : 1, 2 3, …….. 10-1, 10-2, ……………..2-10-1…..
La difficulté chez nous, vient du fait que l'on dit : onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize ,vingt, trente alors que chez les asiatiques il y a un phénomène de régularité langagière dès 10
Le changement d'unité est beaucoup plus facile.

Au niveau de la conceptualisation arithmétique :
Une tâche numérique = On a une collection de départ à laquelle on fait subir une trnasformation pour azrrivée à une collection d'arrivée.
Résoudre un problème numérique : Il y a de multiples façons qui conduisent aux mêmes résultats. Il y a une équivalence en différentes procédures

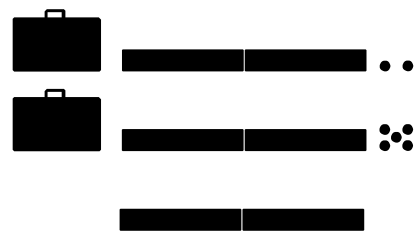
10-4 : c'est plus facile de forger une conviction d'une collection de 10 que quatorze.
Cela facilite la décomposition
Les aisiatiques comptent de 10 en 10 comme on compte de 100 en 100.

432 = - 432 unités (comptage de 1 en 1)
- comptage de 100 en 100 : 4 x 100, 3 x 10, 1 et 1
- 43 groupes de 10 et 2 groupes de 2 unités

Le nombre n'est pas du côté du langage mais du côté des propriétés des actions.
L'enjeu de la construction décimale c'est la décomposition

Cf expériences de Miura et co. (1993) qui montrent que les asiatiques réussissent mieux
Mais c'est peut-être une fausse réussite car le problème des asiatiques est qu'ils oublient qu'une barre de 10= 10 x 1.

Le problème des enseignants c'est de bien vérifier si les enfants ont bien compris la décomposition :



Enseignant : « Tu me dis qu'il y a 237 jetons mais je n'en vois que 7 »
Enfant : « Oui mais si j'ouvre les barres il y a 30 jetons et si j'ouvres les valises il y a 200 jetons »
Enseignant : « Tu me dis qu'il y a 23 groupes de 10 mais je n'en vois que 3 »
Enfant : « Oui mais si j'ouvre les valises il y a 20 groupes de 10 jetons »

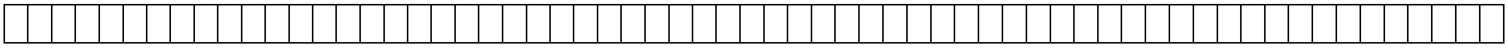
La résolution arithmétique se décrit toujours sous forme de construction de convictions d'équivalences entre les procédures.

<u>Avant l'enseignement de la soustraction</u>
Il y a 20 ans l'introductiondu signe – ne se faisait qu'au milieu du CE1 ET AU CP on faisait des additions à trous.

S1 56% de réussite, Sans avoir abordé la soustraction.	Ce matin Léa avait 47 billes en venant à l'école. Elle a perdu 3 billes. Combien de billes a-t-elle maintenant ?	47, elle perd 3 billes, elle en perd une = 46, elle en perd une = 45, elle en perd une = 44.
S2 15% de réussite	Ce matin Léa avait 47 billes en venant à l'école. Elle a perdu 44 billes. Combien de billes a-t-elle maintenant ?	elle en perd une = 47, elle en perd une = 46, elle en perd une = 45… Reculer sur la suite des nombres de 44 ce n'est pas simple !

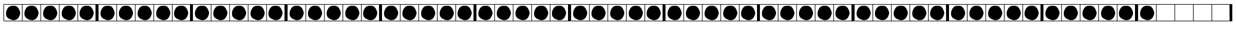
<u>Conception de l'enfant :</u>
Avancer = cumuler
Reculer = retirer
<u>Avancer</u> (avancer à l'ajout) sur la suite des nombres, c'est incompatible pour eux avec <u>une recherche de retrait</u>.
C'est à **l'école** de leur apprendre que l'on peut résoudre un problème de <u>retrait en avançant</u>.

Les fils numériques :
Les fils numériques numérotés implique une rigidité et ne sont pas une aide aux procédures.



L'école les aide à construire les concepts arithmétiques.
L'enfant qui ne va pas à l'école ne peut pas s'imaginer que les différentes situations donnent les mêmes résultats.
<u>Autre exemple</u> :
Soustraction :

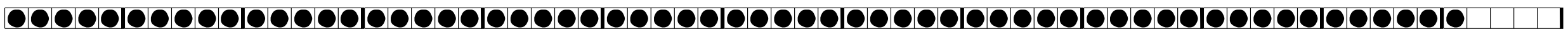
61 – 57

61 

a) Je barre à partir de la fin.

Ou bien

b) Je barre les 57 premiers.

61 

On théâtralise.
Il va se souvenir d'autres solutions.
Ici on voit l'intérêt de calculer en <u>avançant</u>, mais dans d'autres cas, on peut calculer en <u>reculant</u>.

<u>Expérience de Schilemann et co en 1988</u>
Expérience tentée au Mexique sur des enfants non scolarisées
M1 - Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ? 75% de réussite
M2 - Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ? **0 % de réussite**

M1 : 50, encore 50, encore 50 …..
M2 : 3, 6, ……. Trop difficile au niveau du comptage.
50 x 3 et 3 x 50 donne le même résultat.
C'est à **l'école** d'aider les enfants à résoudre le 2ème problème.

Il y a 15 ans Rémi Brissiaud et son équipe choisissent de favoriser le cheminement asiatique en le comparant au langage des <u>sourds profonds de naissance</u>. Pour eux leur langue naturelle est la langue gestuelle.
Les sourds construisent les collections en utilisant les doigts par correspondance terme à terme.

Ils montrent un jeton et font  avec leurs doigts puis le 2e et font  etc…

Quatre : pouce plié ( signe conventionnel) ou auriculaire plié.

Dix : les deux mains descendent
Douze (un dix-2) : deux mains se baissent et deux doigts se lèvent (l'autre main est tojurs baissée)
Vingt : 2-dix : deux doigts pliés
Fin CP, les enfants qui cheminent à l'asiatique ont compris <u>les relations numériques élémentaires</u> alors qu'en temps normal c'est au moins 2 ans plus tard.

QUESTION : Comment les enfants construisent-ils les relations numériques élémentaires ? ou comment les enfants acquièrent la conviction que 4 + 3 = 7

1. Cheminement états-unien
2. Cheminement asiatique
3. Comment fait-on la classe ?

I. <u>Cheminement états-unien</u>

Le surcomptage est enseigné
<u>Le répertoire additif</u> ne s'apprend pas par cœur. Il se construit en même temps que la construction du nombre.

4 jetons + 3 jetons
Les enfants simulent en utilisant les doigts. Ils sont enfermés dans le <u>comptage</u> des doigts.

a. quatre doigts + 3 doigts. <u>Ils recomptent le tout.</u>
b. <u>Ils surcompte au dessus de 4</u> : **4- (5, 6, 7)**

Les enseignants apprennent aux enfants (4 dans la tête ou dans la poche). => surcomptage
Les enfants doivent découvrir le surcomptage. Il ne doit pas être enseigné.

OR :

- Construction : Si l'enfant recompte, cela se terminera par le 4. Le 4 résume le comptage.

Je peux entrer à 4 (nombre total) et continuer 5 (un nombre qui suit 4).
L'enfant doit avoir construit la conviction que 4 résume le comptage du tout.

- CONCEPTUALISER

C'est construire ce genre de conviction.
C'est découvrir l'équivalence entre deux stratégies.

Apprendre la table d'addition par cœur ne sert à rien.
Par contre, il faut faire apprendre la table de multiplication dans l'ordre.

- Stratégies de Décomposition / Recomposition

- Usage des doubles

6+7 -> (6+6) +1 = 12 + 1 = 13 (6+6) est plus facile à mémoriser
On observe cette stratégie au CE1.
Mémorisation, de la quasi totalité du répertoire additif fin CE2 début CM1.
Ensuite il a mémorisé les relations numériques élémentaires à long terme.

II. Cheminement asiatique ou sourd profonds de naissance.

Cheminement à utiliser dès la PS.
Les pédagogues asiatiques n'enseignent pas le sur-comptage (alors qu'il est systématiquement enseigné aux USA).

En Asie, ils usent de stratégies de décomposition - recomposition plus calcul sur les doigts (et non pas comptage seulement) en même temps que la découverte du surcomptage (pas enseigné)

- Comptage
- Calcul sur les doigts

Sans les deux procédés les enfants s'enfermeraient dans le comptage.

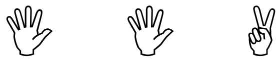
Le calcul sur les doigts permet une progression plus rapide.

4 + 3
//// ///
/ (doigt baissé) >>>>>>>>>>>>>> //// + // 2) (enlève un doigt)
/ 1)lève le pouce
=> complète la 1e main (ils utilisent des collections de doigts)
La structure des doigts permet le repère du **5** du **10.**
Les doigts ne sont pas comptés (égrainés les uns après les autres), les enfants utilisent la structure des doigts.
Le calcul sur les doigts = stratégie de décomposition / recomposition.

6 + 3
//// /
/ Les 6 doigts sont sortis directement. C'est facile
la main doigts ouverts = 5 +1 = 6
La décomposition est déjà faite.

////   / ///   Les 3 sont ajoutés et
/   tout de suite, l'enfant voit 9

9 + 3   (9 avec 1, ça fait dix et il faut encore 2)

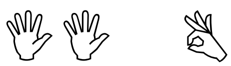


(Doigts baissés)

=> Passage de la dizaine sur les doigts. Ils imaginent 1 sur le doigt baissé et deux autres doigts (inverse de nous)

Par contre les enfants coréens baissent les doigts. Trois doigts baissés deux doigts levés c'est 3.
Quand on a baissé les doigts 5 ou 10, après ils regardent les doigts levés.
7   +   6
5/2   +   5 / 1
Stratégie du retour au 5
Il baisse les 2 mains, cela fait 10.
Ils cherchent le nombre inconnu : de combien cela dépasse de 10. (1 + 2)=3
Ce qui donne 7+6 = (5+2) + (5+1), = 10 + (2+1), = 10+3 (dix-trois)
7 (2 unités après 10) et 6 (1 unité après 10)

Sourds muets de naissance.
7 + 6 est écrit sur le cahier.
Ils regardent les doigts et voient que cela va dépasser 10.
Ils baissent les deux mains, pour montrer : 10



Lors de l'expérience, ces enfants avaient deux ans d'avance. Ils avaient dépassé l'opération numérique.
Ils usaient de façon très précoce des stratégies de décomposition-recomposition. Ce sont les formes additives.

Progression :
- Ils recomptent le tout
- Dans le même temps, découvrent le sur-comptage, il fait des stratégies de décomposition
- Calculent sur les doigts (repères : 5 et 10)
- Décomposent-recomposent

III. Quelles stratégies favoriser ?

Le deuxième cheminement est à favoriser.

Mise en situation (pour un adulte)
On change de suite verbale pour se retrouver dans les conditions d'un enfant qui va compter.
On compte des jetons avec l'alphabet.

Question : Blanche neige avait combien de nains ?
Elle avait plus ou moins de H nains ?
H, c'est plus petit ou plus grand que 10 ?

Il faut passer par le comptage sur les doigts.
On constate que H < 10, alors qu'avant simulation, on pense que H est plus grand que 10.
Quand on veut le faire vite on n'a pas idée. Il n'y a pas le repère du 5.
Il faut passer par la décomposition-recomposition.

E = 5
F, Facile à trouver E, F, G, H (c'est du surcomptage au dessus de 5).

• En CP on fait le comptage par rapport à : * 5
* 10
* De nombres repères

- Il faut faire <u>conceptualiser</u> très vite <u>le sur-comptage</u> par rapport à <u>ces repères privilégiés.</u>
- <u>Ces repères privilégiés</u> sont le support de décompositions.

Pour les enfants en difficulté <u>les nombres ne leur parlent pas.</u>
Ils donnent les bonnes réponses mais <u>n'ont pas acquis de représentations mentales.</u>
C'est pourquoi il faut favoriser cette démarche.

La difficulté est de conceptualiser les nombres.
Avoir compris 8 (Avoir conceptualisé 8)
Ce n'est pas seulement savoir compter jusqu'à 8 - C'est savoir exprimer ce nombre à l'aide de repères 5 et 10.
Connaître les décompositions analogues 8 = 5+3 ; 8= 10-2 ; 8=7+1 Etc.…
Le mot-nombre « huit », le chiffre « 8 » sont des <u>symboles de l'équivalence</u> entre toutes ces procédures.
Avoir acquis <u>un concept arithmétique</u> : c'est avoir construit une équivalence entre des procédures.

- Les nombres « parlent » en terme <u>d'action.</u>

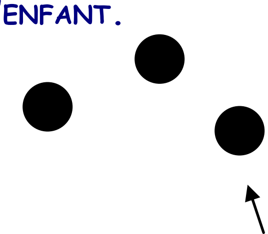
Il s'agit de montrer que tous les <u>signes arithmétiques</u> (écritures chiffrées, signes opératoires, écritures fractionnaires …) sont des symboles d'équivalence entre procédures.

<u>Avoir conceptualisé les notions arithmétiques</u> correspondantes, c'est disposer de procédures pour résoudre un problème donné (ce qui donne la possibilité d'adopter celle qui convient le mieux en fonction du contexte).

B. LA CONCEPTUALISATION DES OPERATIONS CHEZ L'ENFANT.

• Dès la petite section de maternelle

Je vais te les donner (3 jetons), combien il y en a ?



C'est le 3.

Réponse :
soit : « Il y en a trois » (dit directement)
soit : Comptage « Il y en a 1, 2, 3
- Combien ?
- 1, 2, 3 »
Pour l'enfant, le troisième jeton est le 3 ?
C'est très difficile pour eux de comprendre que <u>3 est la propriété de la totalité de la collection.</u>
Pour certains enfants cela résiste.
« Le pédagogue calculateur » privilégie le calcul (c'est privilégier les décompositions)
<u>Exemple :</u>
Il y a des jetons

Enseignant : « Donne-m'en 2 » et montrer avec les doigts  (représentation analogique)
1 et encore 1 ».
Si l'enfant ne sait pas, lui montrer :

Enseignant : « 1 et encore 1 ça fait 2»  (représentation analogique)

Donne-moi 1 jeton » et montrer avec les doigts  (représentation analogique)

Ne pas hésiter à changer la représentation avec les doigts (1 avec le pouce, l'index…) et/ou à demander aux enfants de les trouver.

<u>Autre exemple</u> :

3,est-ce que c'est deux comme ça ? ✌ et encore 1 ☝**,** 2 (valeur cardinale), 3 est défini par une <u>décomposition.</u>
Si on voit la déception - c'est qu'il pense que le maître a changé d'avis….
L'enfant n'a pas conceptualisé 3.
- Représentation verbale
- Représentation analogique du nombre
- Il s'agit de construire <u>une analogie de doigts</u> dans la collection.

Dans les milieux socialement riches, on <u>fait varier les stratégies</u> et on va au-delà du comptage.
Idée de totalité ;
1, 1, 1, 1 (4)
C'est 1 et 3 ou 3 et 1
En Asie les maîtres varient la façon de compter les nombres.
En occident le comptage est favorisé.

Il faut <u>conceptualiser les nombres en matériel 1, 2, 3, 4.</u>

Exemple en PS ou MS : tableau des présents, étiquettes boîte….
- Il reste « n » étiquettes (vite réglé) ce sont les absents
- Léa n'est pas là.

Gestion du nombre des absents : Léa 👍, et Amélie ✌ et… A la fin Il y a « comme ça » d'absents.
Ils font une correspondance terme à terme. (1 et 1 et 1).
Pas de comptage sur les doigts.
Demander les autres représentations de 3 sur les doigts.
La suite numérique est enseignée parallèlement par le biais des comptines.

Quand il y a une épidémie il y a 🖐 et ✌. Ils ne savent pas dire combien cela fait mais ils ont compris. (« Il y en a beaucoup ».)

<u>Quand enseigner le comptage ?</u> On n'enseigne le comptage que lorsque la conceptualisation des trois premiers nombres est acquise.

En ***GS*** le plus souvent possible faire mesurer le comptage par rapport à 5 ou 10.
Exemple : 7
🖐 et encore ✌ 7 est mesuré par rapport au repère 5.

Ø 13, c'est 10 🖐🖐 et 3 👌 (repère au 10)

soit 5 🖐 + 5 🖐 et 3 👌 (repère au 5).
<u>Ils mesurent</u> car ils éprouvent le besoin de comparer par rapport aux repères 5 ou 10.

« Le pédagogue calculateur » voit loin : jusqu'au CM2.
« Le pédagogue calculateur » souhaite faire conceptualiser.

I. L'album à calculer J'apprends les maths. (stratégie de décomposition / recomposition)

Perroquets (maison des 4 : fenêtres disposées en constellation).
Quatre fenêtres à la maison.

2 perroquets se sont envolés, il y a deux fenêtres vides.

Avec les enfants **on parle des décompositions.** On les fait verbaliser.

Avec les éléphants on verbalise sur la construction du 5.
Il faut utiliser le rabat du livre.
- Ecrit 5 éléphants. Combien tu en vois ?
- 2, les autres sont derrière le rideau.
- Combien ?

Pour les aider il faut évoquer la configuration des tonneaux. Il en « voit » 5.

Cinq, c'est 4 et encore 1. Il faut favoriser l'usage des décomposition-recomposition.

Il faut théâtraliser l'activité mathématique.

Il y a un rideau. Il faut imaginer ce qu'il y a derrière le rideau.
- Tu te rappelles sur quoi ils sont posés.
- Sur les tonneaux.
- Comment ?

- L'enfant explique …
- Il y a trois tonneaux de vides. Essaie de les voir 5 (3 et encore 2)

On soulève pour vérifier.

Et le calcul sur les doigts ?
Oui, si c'est comme les sourds profonds.

Mémorisation très difficile s'ils ont mémorisé le comptage.
Pour ne pas les habituer à n'utiliser que les doigts on peut leur procurer la :

II. La boîte à billes : Pic bille

Il s'agit de la même structure que la main. Mais la représentation est linéaire.

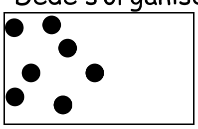
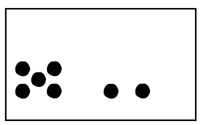
(5) (3 doigts) Il en manque 2 pour aller à 10.
Il faut théâtraliser le deuxième cheminement.

Ensuite on cache les 5 en rabattant le couvercle pour les représenter.

Il y a alors <u>re-présentation mentale.</u>
5 / 6,7
Travail de l'image des doigts (de l'image de la boîte)
Il faut qu'ils puissent se détacher de la boîte.

10 / 2 Tu progresseras plus vite si tu dessines. **<u>Visualisation mentale par la reconstitution mentale d'autrui.</u>**
Problème dans l'accès à ce qu'ils ont mémorisé.
<u>Stratégies de rappel</u> : on se souvient que le compartiment est plein à gauche.
Quand ils <u>sont organisés en ligne</u> ils doivent être organisés de <u>gauche à droite</u> (sens de l'écriture).
Stratégie de passage à la <u>dizaine</u>.

<u>Constellations</u>
L'écureuil compte 1 à 1.
Dédé s'organise.

écureuil Dédé

Imaginer quelqu'un d'autre faisant une action.
Imaginer que l'on fait l'action. (Même nombre de neurones cérébraux)
Le carton comme Dédé. **(Médiateur)**

<u>Métacognition</u> : stratégie de pensée.
L'écureuil ne s'organise pas. Il met tout en pagaille.
Dédé, lui s'organise. Aussi il voit tout de suite combien il a de noisettes.

<u>8 + 4</u>
8 complément à 10.
Valider en montrant. C'est 8 + 2 pour aller à 10 et encore 2.
Couvercle ouvert

J'ai 8 unités. C'est plus facile à <u>visualiser</u> que si on cache totalement la boîte.

Pour en savoir plus …….

Rémi Brissiaud :

- Comment les enfants apprennent à calculer
- J'apprends les maths, le livre du maître (existe de la GS au CM2)
- L'album à calculer 1, 2 ,3 PS
- L'album à calculer GS
- L'album à calculer II GS
- Jeu de fiches à calculer GS
- 2e jeu de fiches à calculer GS
- Mallette : Je compte…,tu compares GS
- Apprendre à calculer avec les réglettes GS/CP
- La mallette de géom GS/ CP

Tous ces titres sont parus aux EDITIONS RETZ.