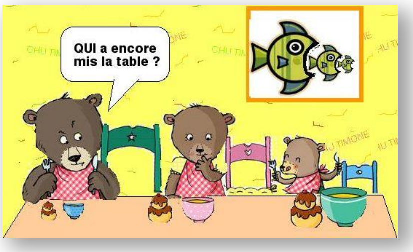


LA PROPORTIONNALITE

Définition

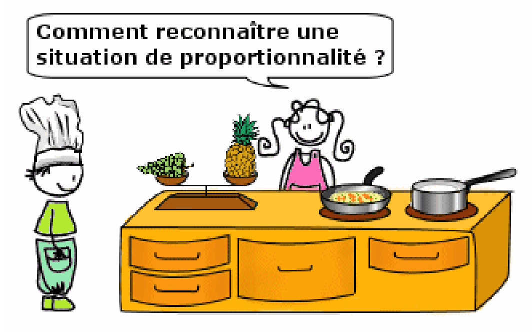
Une proportion est une **égalité de deux rapports** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a et *d* sont les **extrêmes** et *b* et *c* sont les **moyens**.
Une relation de proportionnalité n'est possible qu'**à partir de 4 nombres**.
Pour que 4 nombres forment une proportion, **il faut que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens.**

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **alors** $ad = bc$

Autres égalités :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **alors** $ad = bc$		Exemple **Si** $\frac{10}{5} = \frac{16}{8}$ **alors …**
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	**alors** $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$	$\frac{10 X 8}{5 X 8} = \frac{5 X 16}{5 X 8} = \frac{80}{40}$ **= 2**
Transformation d'une proportion		
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	**alors** $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$	$\frac{10+16}{5+8} = \frac{16-10}{8-5}$ $\frac{26}{13} = \frac{6}{3}$ **= 2**
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	**alors** $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$	$\frac{10+5}{10-5} = \frac{16+8}{16-8}$ $\frac{15}{5} = \frac{24}{8}$ **= 3**
Si $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	**alors** $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$	$\frac{10+5}{10} = \frac{16+8}{16}$ $\frac{15}{10} = \frac{24}{16}$ **= 1,5**
Dans une proportion, on peut intervertir les moyens, intervertir les extrêmes ou remplacer chaque rapport par son inverse		
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	**alors** $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ *(rapport inversé)* **alors** $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ *(extrêmes intervertis)* **alors** $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ *(moyens intervertis)*	$\frac{5}{10} = \frac{8}{16}$ **= 0,5** $\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$ = 1,6 $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ = 0,625



Soient deux suites de nombres (x_1, x_2, x_3, x_4 ….x_n) et (y_1, y_2, y_3, y_4 ….y_n) qui sont respectivement les termes d'un rangs 1, 2, 3, …n.
Les deux suites sont proportionnelles si **on peut passer de chaque terme de l'une au terme correspondant de l'autre suite par un** même opérateur multiplicatif, appelé **coefficient de proportionnalité** (ou par son inverse).

On utilise un **tableau de proportionnalité** pour illustrer :

x a | x $\frac{1}{a}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

x 2 | x $\frac{1}{2}$

2	**3**	**4**	**5**	**6**
4	6	8	10	12

- On retrouve donc les égalités suivantes : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} = \ldots\ldots = a$

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = 2$$

Les deux suites sont donc proportionnelles car elles ont des rapports de proportionnalité égaux.

- Ces deux suites étant proportionnelles, **il existe une fonction linéaire telle que**

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow ax$$

La deuxième suite est l'image de la première par cette fonction.

Propriétés numériques des suites proportionnelles

1) PROPRIETES RELATIVES A L'ORDRE

Si le **coefficient de proportionnalité est** **positif**, la proportionnalité **respecte l'ordre**.
Si le **coefficient de proportionnalité est** **négatif**, la proportionnalité **inverse l'ordre**.

X 2

2	**3**	**4**	**5**	**6**
4	6	8	10	12

X - 2

2	**3**	**4**	**5**	**6**
- 4	- 6	- 8	- 10	- 12

2) PROPRIETE ADDITIVE DE LINEARITE

La somme de deux termes a pour image la somme des images.
Cette propriété permet de compléter une suite proportionnelle. La fonction associée est linéaire.

X 3

3	**5**	**8**	**10**	**12**
9	**15**	**24**	30	36

Dans la 1ère suite, la somme des termes 3 et 5 donne 8. Ainsi que leurs images, dans la 2ème suite, la somme des termes 9 et 15 donne 24.

3) PROPRIETE MULTIPLICATIVE DE LINEARITE

Le double, le triple (…) d'un nombre a pour image le double, le triple (…) de son image.
Cette propriété permet de compléter une suite proportionnelle. La fonction associée est linéaire.

X 2

X 3

3	**5**	**8**	**10**	**12**
9	**15**	24	**30**	36

X 2

4) PROPRIETE DES « RAPPORTS EGAUX »

Tous les rapports obtenus en faisant le quotient d'un nombre de la 2ème suite par son image dans la 1ère suite sont égaux

X 0,5

3	5	8	10	12
1,5	2,5	4	5	6

.

Car $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} = \ldots\ldots = a$ $\quad \frac{1,5}{3} = \frac{2,5}{5} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = 0,5$

5) PROPRIETE DITE « DU PRODUIT EN CROIX »

3	5	8	10	12
1,5	2,5	4	5	6

3 X 2,5 = **7,5** et **5 X 1,5** = **7,5**

8 X 6 = **48** et **12 X 4** = **48**

Cette propriété permet de compléter des tableaux de proportionnalité.

➤ Pour CHERCHER LA 4e PROPORTIONNELLE =

5	8
?	24

Pour trouver le nombre manquant, il faut appliquer la propriété du produit en croix :

5 X 24 = 8*x*

120 = 8*x*

Donc $x = \frac{120}{8} = 15$

On peut utiliser aussi la **« règle de trois »** :

5m	8m
?	24E

Si 8m de tissu coûtent 24 euros, combien feront 5m de tissu ?

8m = 24 euros.

Pour 1m de tissu = $\frac{24}{8}$

Donc pour 5m de tissu on calcule = 5 X $\left(\frac{24}{8}\right) = \frac{5 X 24}{8}$ = 15 euros

6) PROPRIETE DES ECARTS

X 0,5

3	5	8	10	12
1,5	2,5	4	5	6

On a le même écart (2) entre 3 et 5 et entre 8 et 10 ; donc on a le même écart avec leurs images : écart de (1) entre 1,5 et 2,5 et entre 4 et 5.

Propriété graphique des suites proportionnelles

Soient deux suites proportionnelles :

$\times\, a$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

$\times\, \frac{1}{a}$

Un nombre de la 1ère suite forme **un couple** avec son image dans la 2ème suite : **(x_1 ; y_1)** , **(x_2 ; y_2)** , **(x_3 ; y_3)** …

Sur un système d'axes gradués à partir de 0 (repère du plan), les points dont les coordonnées sont ces couples sont alignés sur une droite passant par l'origine des axes.

C'est la caractéristique des suites proportionnelles : elles sont associées à une fonction linéaire (droite passant par l'origine du repère).

Comparer des proportions

Quel est le pot de peinture est le plus vert ?

- ✓ Mélange A = **5L** de peinture blanche + **3L** de peinture verte
- ✓ Mélange B = **7L** de peinture blanche + **4L** de peinture verte

Méthode 1 =

Calculer l'opérateur multiplicatif.

Mélange A

Peinture blanche (L)	5
Peinture verte (L)	3

$\times \frac{3}{5}$

Pour 1L de peinture blanche,

on utiliserait $\frac{3}{5}$ *L de peinture verte*

Mélange B

Peinture blanche (L)	7
Peinture verte (L)	4

$\times \frac{4}{7}$

Pour 1L de peinture blanche,

on utiliserait $\frac{4}{7}$ *L de peinture verte*

Puis comparer les coefficient en mettant sur le même dénominateur.

Comparer $\frac{3}{5}$ *et* $\frac{4}{7}$

$\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ *et* $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ *donc* $\frac{20}{35} < \frac{21}{35}$ *donc* $\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$ donc **le mélange A est plus vert que le mélange B.**

Méthode 2 =

➤ **Compléter les colonnes en utilisant les propriétés multiplicatives de linéarité, le produit en croix ou les rapports égaux.**

Mélange A

X 7

Peinture blanche (L)	5	35
Peinture verte (L)	3	21

X 7

Mélange B

X 5

Peinture blanche (L)	7	35
Peinture verte (L)	4	20

X 5

Ramener les mêmes quantités de peinture blanche pour les deux mélanges.
On voit alors que la peinture verte est en plus grande quantité dans le mélange A.
Donc **le mélange A est plus vert que le mélange B**.

Problèmes de proportionnalité multiple

6 vaches produisent 4000L de lait en 30 jours.
Combien de jours faut-il pour que 18 vaches produisent 72000L de lait ?

Nombre de vaches	**6**	**18**	18
Nombre de jours	**30**	30	**180**
Nombre de litres de lait	**4000**	**12000**	**72000**

1) En considérant tout d'abord la variation entre deux données (vaches et litres de lait) et en conservant le nombre de jours fixes.
   En 30 jours, 18 vaches (3 X 6 vaches) produisent 3X 4000L soit **12000L** de lait.
2) Donc, pour produire 72000L (6 X 12000L), il faudra 6 X 30 jours soit **180 jours.**

Problèmes de proportionnalité inverse

3 peintres peignent une chambre en 6H.
Combien de temps mettront 4 peintres ? 5 peintres ? 6 peintres ?

Nombres de peintres	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**
Nombres d'heures	**18**	**6**	$\frac{18}{4}$ soit 4,5H	$\frac{18}{5}$ soit 3,6H (3H36)	$\frac{18}{6}$ soit 3H
Inverse du nombre d'heures	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$			$\frac{1}{2}$

La durée du travail est inversement proportionnelle au nombre de peintres.

➨ Si le nombre de peintres double, la durée du travail est divisée de moitié.

Donc si 3 peintres mettent 6H, alors 1 seul peintre mettra 3 X 6H soit 18H.

Donc 4 peintres mettront 4 fois moins de temps qu'un seul peintre soit $\frac{18}{4}$ soit 4,5H.

Donc 5 peintres mettront 5 fois moins de temps qu'un seul peintre soit $\frac{18}{5}$ soit 3,6H (soit 3h36).