Didactique des maths

« Situation-problème » : Sert à mettre en place une connaissance nouvelle.

Les variables didactiques : Le matériel à disposition, les contraintes (un seul voyage possible) ou les données numériques.

L'élève fait des erreurs car : Il a des conceptions erronées, le contrat didactique (l'élève pense qu'il faut utiliser la notion qu'il est en train d'étudier ou qu'il y a forcément une solution juste dans le QCM ou il utilise l'addition parce que dans son manuel, c'est écrit « addition » en titre) ou de la compréhension de l'énoncé.

<u>Pour trouver les difficultés de résolution d'un problème, on s'appuie :</u>

- sur l'énoncé et sa compréhension, sur le contrat didactique dans l'élaboration des procédures ou les « mots inducteurs ».

- sur les erreurs de calcul possible

- sur la surcharge cognitive (un élève ne conclut pas après plusieurs calculs car il ne sait plus ce qu'il cherchait au début).

- le résultat attendu : l'élève peut ne pas faire de phrase de conclusion ou prendre un résultat intermédiaire.

<u>Trouver quelle aide apporter à un élève en difficulté :</u>

- Trouver d'abord d'où vient cette difficulté (énoncé, conceptions erronées, …).

- Se baser sur l'objectif de l'activité et sa place dans la séquence (découverte ou réinvestissement).

Pour l'énoncé : Faire reformuler l'énoncé, illustrer la situation à l'aide de matériel, expliciter les mots inconnus.

Pour la non-prise en compte de certaines contraintes : Inciter les élèves à vérifier leur résultat en relisant l'énoncé.

Pour le contresens : Demander à l'élève ce qu'il faut chercher, faire vivre la situation aux élèves (par exemple, avec un énoncé ou il y a « plus » et où ce n'est pas forcément une addition pour résoudre le problème).

Difficulté dans la maîtrise de certaines opérations : Autoriser l'usage de la calculatrice pour réduire la surcharge cognitive (quand l'opération n'est pas l'objectif premier) et signaler les erreurs de calcul.

Difficulté au niveau du tracé géométrique ou du mesurage : L'aider personnellement à tenir ses outils.

Surcharge cognitive : Aide du P.E dans le traçage, aide de la calculatrice et faire verbaliser ce qui a été fait jusqu'à l'arrêt.

1. Les programmes

6 grandes compétences :

- Chercher
- Modéliser
- Représenter
- Raisonner
- Calculer
- Communiquer

Selon la volonté de l'enseignant dans ses objectifs, il doit bloquer certaines procédures par des contraintes (le produit en croix est interdit).

Si un élève a une procédure fausse mais un résultat juste « Comparer deux nombres décimaux en comptant le nombre de chiffres fonctionne avec les nombres : 1.2 et 1.45 mais ne fonctionne pas avec les nombres : 1.25 et 1.5 ». L'élève aura alors du mal à abandonner sa procédure.

Les sources d'erreurs : L'élève se sent obligé d'utiliser toutes les données de l'énoncé, il se sent perdu par trop de données, les mots inducteurs le trompent, erreurs de calculs ou de tracés.

L'important est de prévoir un énoncé clair et de demander à un élève de reformuler. Quand il faut chercher une procédure, il faut donner du matériel aux élèves afin qu'ils n'invalident pas leur procédure trouvée parce qu'ils n'arrivent simplement pas à l'appliquer.

Il faut cependant que, pendant des phases de recherches, les élèves prennent conscience de la nécessité d'acquérir de nouvelles connaissances : les additions itérées sont longues à mettre en place donc nécessité de la multiplication.

Quand un élève trouve que $1.5<1.25$, on lui montre que $1.5=1.50$ et donc que $50>25$.

Compétences pour les nombres décimaux :

- Savoir comparer des nombres décimaux qui n'ont pas la même partie entière.
- Savoir comparer des nombres décimaux qui ont la même partie entière et le même nombre de chiffres dans la partie décimale.
- Savoir comparer des nombres décimaux qui ont la même partie entière mais pas le même nombre de chiffre dans la partie décimale.
- Savoir reconnaître si deux nombres décimaux sont égaux (3.4 et 3.40).

Un élève qui dit que $3.4<3.12$ peut avoir comparé les parties entières puis les parties décimales. Donc il s'appuie sur la méthode de comparaison des entiers et il perçoit le nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule. Cette conception erronée peut venir du fait que la virgule en français permet de séparer deux propositions et la prononciation « 3 virgule 4 » contribue à montrer cette séparation entre les deux parties. Dans la monnaie, la partie entière correspond aux euros et la partie décimale aux centimes qui sont matérialisés par des pièces de monnaie. De plus, des exercices d'entraînement, demande de séparer les parties avec des questions comme « Quelle est la partie décimale de... ? ». Cette méthode fonctionne de temps en temps mais reste fausse. Ou alors, si l'élève compte le nombre de chiffre du nombre décimal, il peut penser qu'un « nombre décimal est un nombre entier avec une virgule qu'on peut négliger ».

On ne peut pas dire à un élève qu'entre deux nombres consécutifs, on ne peut pas intercaler un nombre. C'est vrai pour les entiers mais pas pour les décimaux.

Parfois, dans la situation d'enseignement, on veut trop faire une continuité entre les entiers naturels et les décimaux, donc on peut, par exemple, les aborder en utilisant la conversion de cm en mètres. Exemple : 716cm=7m16cm donc 1.16m.

<u>Exemple du contrat didactique où l'élève veut utiliser les données de l'énoncé :</u>

Dans un bateau, il y a 13 chèvres et 18 moutons. Quel est l'âge du capitaine ? Réponse : 31 ans. L'élève utilise une addition parce que c'est ce qu'il travaille en ce moment, il met donc en jeu des connaissances contextuelles et non des connaissances conceptuelles. Les élèves pensent qu'à chaque problème posé par le professeur, il y a une solution.

Il faut être clairs avec les élèves sur le fait qu'un problème se conclut par une phrase. Il faut que l'élève laisse sa procédure apparente et qu'il apprenne à s'exprimer. Il faut que l'élève sache exactement ce que l'enseignant attend de lui. Les consignes ne doivent pas être ambigües. Il faut que l'enseignant précise les critères de réussite de la tâche (pas de faute d'orthographe, soin, rédiger une phrase complète pour la réponse).

La surcharge cognitive survient quand l'élève doit gérer plusieurs tâches en même temps, ou quand il n'a pas encore automatisé les procédures et quand sa mémoire à long terme n'est pas assez développée. Quand une procédure commence avec un bon raisonnement mais que la suite des calculs et la conclusion n'ont pas de logique, il faut y voir un problème de surcharge cognitive.

<u>Quand les erreurs sont liées aux conceptions de l'élève :</u>

- On peut réexpliquer la consigne ou remontrer une méthode (transmissif).
- On peut questionner l'élève pour l'emmener à la bonne réponse (maïeutique).
- On peut retravailler les objectifs un à un jusqu'à l'objectif final (béhaviorisme).

 Si un élève dit que $3.4<3.12$ alors il faut lui faire comparer $3+4/10$ et $3+1/10+2/10$ puis on aide l'élève à construire une nouvelle procédure. On peut aussi construire un segment de 3.4 et un autre de 3.12 et voir lequel est le plus grand. On peut aussi lui demander, à l'aide de nombreux exemples justes et faux, de trouver lui-même une règle de classement des nombres décimaux.

<u>Quand les erreurs sont liées au contrat didactique :</u>

Exemple d'un problème qui est irréalisable : discussion des élèves en grand groupe entre ceux qui ont compris que le problème n'avait pas de solution et ceux qui se sont servis des données de l'énoncé qui n'avaient pourtant pas de rapport. L'enseignant peut alors apporter une nouvelle ligne au contrat didactique « Tous les problèmes que je vous donne n'ont pas forcément de solution ».

<u>Quand les erreurs viennent d'une surcharge cognitive :</u>

Il faut alléger la charge de travail de l'élève en l'aidant à se créer des automatismes (reconnaissance de figures géométriques, techniques opératoires, …), en l'aidant à mieux organier son travail et en lui permettant d'utiliser des outils d'aide comme le tableau de conversion ou la calculatrice.

Un problème est une activité qui « pose problème » à l'élève qui doit alors élaborer une procédure pour le résoudre. Un problème pour des enfants de maternelle : « J'ai dans cette boîte 6 billes, j'en ajoute 2, combien j'en ai en tout ? » n'est plus un problème même pour des CP alors on joue sur les variables didactiques (un plus grand nombre de billes) pour qu'il redevienne un problème.

Certains problèmes n'en sont plus pour les CM2 comme « Convertir 25cm en m » mais résultent d'automatismes, ces exercices permettent la consolidation.

Pour les problèmes, il y a trois types de contexte : la vie courante (problèmes concrets), situations relevant d'autres disciplines, contexte purement mathématique (aucune relation avec la réalité).

Le fait de donner l'énoncé à l'écrit ou à l'oral nécessite que les élèves adoptent différentes stratégies de prise d'informations. Parfois, on ne donne pas tous les renseignements nécessaires ou on en donne trop.

Pour construire une connaissance nouvelle, on s'appuie le plus souvent sur des situations-problèmes. Quand on veut approfondir une connaissance, on utilise des problèmes de transfert (qui permettent à l'élève d'utiliser ses connaissances) et des problèmes de synthèse (qui font fonctionner un nouvel élément de savoir avec d'anciennes connaissances).

Les problèmes ouverts permettent la recherche.

Pour le problème : « Je veux répartir 756 œufs dans des boîtes de 12 œufs, combien me faut-il de boîtes ? » proposé en début d'année de CE2, les élèves ne connaissent pas la division ni la calculatrice. Ils vont donc devoir inventer des procédures personnelles et originales comme les soustractions successives ou des essais de produits par 12. Ces procédures initiales évolueront ensuite vers la division. Si ce problème est proposé à des CE1, l'enseignant n'aura pas, derrière, l'objectif de les faire évoluer vers la division. L'objectif principal est plutôt ici d'apprendre à chercher.

Les stratégies de recherche : l'essai-erreur, schéma, méthodes générales.

Exemple : On place 86 bouteilles dans des casiers de 12 bouteilles, combien faut-il de casier ?

Si l'élève répond 86x12=1032 alors c'est sûrement que l'énoncé à induit dans ses représentations, l'utilisation de l'addition. Il pense qu'il y a 12 casiers qui contiennent chacun 86 bouteilles. Peut-être que c'est un moment de l'année où l'enseignant travaille la multiplication (contrat didactique). Ou alors, il savait qu'il fallait faire une division mais il ne sait pas faire donc il fait une multiplication pour quand même obtenir un résultat. Une même procédure erronée peut avoir des origines différentes.

L'élève peut ne pas arriver à bien se représenter le problème, ne pas prendre toutes les informations importantes ou ne carrément pas comprendre l'énoncé. Par exemple, si l'élève ne connaît pas certains mots de l'énoncé, il va faire des contresens ou alors, si le contexte social de l'énoncé ne lui est pas assez familier, il ne va pas le comprendre. Il faut donc expliciter les mots difficiles et lever les implicites ainsi que s'assurer que le contexte est familier pour l'élève (faire vivre ce contexte).

Si l'élève n'arrive pas à stocker le trop grand nombre d'informations, alors il faut schématiser ou mettre en évidence les infos (surligner).

Certains élèves, dans les énoncés, ne cherchent que les données numériques en raison de la règle de contrat. C'est une stratégie économique qui limite la charge mentale. Mais il faut que l'élève abandonne cette stratégie par la résolution de problèmes impossibles, par des problèmes avec des données inutiles.

Certains élèves s'appuient sur les mots inducteurs comme « plus », « total » ou « fois », donc il faut leur proposer des problèmes avec des mots inducteurs pièges.

Les données des problèmes sont souvent données dans l'ordre dans lequel elles doivent être utilisées, la question vient en fin de l'énoncé… Il faut cependant que l'élève comprenne ce qu'on lui demande même si la forme du problème est différente (question en début de l'énoncé). Donc on peut partir des données (chaînage avant) ou partir de la question (chaînage arrière).

Quand un élève dit qu'il ne sait pas faire juste après avoir lu l'énoncé, c'est souvent parce qu'on lui demande d'effectuer une procédure inhabituelle, ce qui est source de problème pour l'élève. Pour y remédier, on peut lui poser des questions « Qu'est-ce que tu peux déduire de ces informations ? » ou « Avec ces données, que peux-tu calculer ? » ou alors des questions du genre « qu'est-ce qu'on te demande ? ». On peut l'inciter à faire des essais. A la fin, faire une mise en commun où ceux qui ont réussi expliquent leurs procédures et ceux qui n'ont pas réussi verbalisent leurs difficultés.

Si un élève ne réussit pas un exercice, c'est peut-être parce qu'il n'a pas les savoir-faire requis donc il faut lui permettre de se les approprier.

Un problème ouvert possède un énoncé court, il ne précise pas la méthode par des questions intermédiaires et se trouve dans un domaine conceptuel assez proche des élèves pour qu'ils puissent s'approprier la situation. Exemple : « Je pense à deux nombres qui se suivent et dont la somme fait 23 ».

Avantages du problème ouvert : L'élève se place comme un mathématicien, il met l'accent sur des objectifs spécifiques d'ordre méthodologique (organiser une démarche, chercher, essayer, …), il contribue à l'éducation civique de l'élève (travaux de groupe), permet une diversité de réponses qui sont toutes intéressantes dans l'échange et il permet aux élèves de prendre des initiatives et d'être originaux sans appliquer une méthode toute faite. L'enseignant fait toujours une synthèse des aspects méthodologiques qui pourront être réinvestis par les élèves.

Le travail en groupe diminue les risques de blocage ou de découragement. Il oblige les élèves à formuler leur démarche et leur raisonnement. Il favorise l'argumentation et la prise en compte des autres. Les élèves ont un réel échange, que l'enseignant laisse libre.

A la fin de la mise en commun, on peut recommencer un travail de recherche avec, par exemple, des nombres différents. Cela permet aux élèves de tester des procédures auxquelles ils n'auraient pas pensé.

La situation-problème a pour objectif d'introduire une connaissance nouvelle alors que le problème ouvert doit permettre aux élèves de s'approprier la stratégie de la démarche scientifique.

2. L'apprentissage des nombres

Les objectifs à l'école maternelle :

- Construire le nombre pour exprimer des quantités
- Stabiliser la connaissance des petits nombres
- Utiliser le nombre pour désigner un rang, une position
- Acquérir la suite orale des mots-nombres
- Ecrire les nombres avec les chiffres

Les objectifs en cycle 2 :

- Dénombrer, constituer et comparer des collections
- Utiliser diverses stratégies de dénombrement
- Repérer un rang ou une position dans une file ou sur une liste
- Faire le lien entre le rang dans une liste et le nombre d'éléments qui le précèdent
- Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles

Les nombres servent à exprimer et comparer des quantités (aspect cardinal), de garder la quantité en mémoire et d'anticiper le résultat d'actions. Ils servent aussi à repérer des positions dans une liste rangée (aspect ordinal).

Deux collections d'objets sont équipotentes quand elles comportent autant d'objets l'une que l'autre. Construire une collection équipotente à une autre est une activité en maternelle, ou fournir des informations à quelqu'un pour qu'il puisse créer une collection équipotente à la nôtre.

Pour l'aspect ordinal, on a les activités de repérage d'objets dans une liste ordonnée avec, par exemple, se souvenir de la position d'un livre dans une bibliothèque pour pouvoir ensuite le ranger à sa place.

Les variables didactiques dans un problème d'équipotence : la place des deux collections (est-ce qu'on peut les déplacer pour placer les éléments l'un en dessous de l'autre ?) ⍰ Correspondance terme à terme. Le nombre d'objet de la collection de référence et combien d'essais sont possibles afin de réaliser cette activité.

Si les collections sont proches spatialement, le problème peut être résolu par une correspondance terme à terme ou paquet par paquet. Si la collection de référence n'est pas déplaçable, il faut que l'élève établisse des liens entre les objets.

Si la collection de référence comporte seulement 3 objets, les enfants reconnaissent tout de suite cette quantité avec le subitizing mais aussi, ils peuvent retenir la quantité par une collection intermédiaire : les doigts de la main.

Si la collection de référence ne peut pas être déplacée et qu'elle est grande, la procédure la plus efficace est de dénombrer les objets (comptage un à un), garder le nombre en mémoire et recompter le même nombre d'objet pour la seconde collection.

Les enfants auront du mal à réaliser une correspondance terme à terme quand il manipule des billes par exemple.

Dénombrer c'est utiliser un moyen qui permet d'exprimer une quantité par un nombre.

Le subitizing est la reconnaissance perceptive immédiate.

Le dénombrement comptage un en un permet d'utiliser le dernier chiffre exprimé dans la suite numérique pour dire combien il y a d'éléments dans une collection. Chaque mot est énoncé et doit être mis en relation avec un terme et il n'y a pas d'ordre pour compter la collection. Chacun des noms de nombre désignent la quantité qui vient d'être formée. Certains enfants comptent mais ne peuvent pas dire combien il y a d'objets puisque le dernier mot-nombre exprimé est considéré comme le nom qualifiant le dernier objet pointé.

Dans une activité où les enfants doivent apporter une robe à chaque poupée, on observe les types de procédures utilisées : prennent-ils en compte le nombre de poupées ? Est-ce qu'ils utilisent une procédure numérique ou non numérique (mémoire de quantité avec les doigts). Si les collections sont éloignées, l'enfant ne peut pas utiliser de correspondance terme à terme.

Savoirs et savoir-faire : dénombrement

- Etablir une correspondance terme à terme entre deux collections.
- Dénombrer les objets par subitizing ou par comptage un par un (et lever les doigts □ avec une collection intermédiaire.
- Décomposer une collection en sous-collections facilement dénombrables (trois et encore trois).

Les problèmes de repérage consistent à retrouver la place occupée par un objet dans une liste rangée. Pour les variables didactiques, on a la nature identique ou non des boîtes, la modalité de repérage des boîtes (peut-on les désigner du doigt ?). Dans ce cas, le problème peut être résolu sans recours aux nombres puisqu'on peut attribuer un signe distinctif à chaque boîte. Si on ne peut pas les désigner, la procédure consiste à numéroter mentalement les boîtes en les pointant en même temps que de réciter la comptine numérique. On pourra ensuite dire que l'objet se trouve dans la 6ème boîte. Si les élèves n'ont pas le droit de donner le numéro de la boîte oralement, on s'attend à ce qu'ils donnent ce nombre par écrit

En CP, on peut mettre x jetons dans une boîte puis encore y jetons en donnant les quantités aux élèves puis ils doivent dire combien de jetons il y a en tout. Pour les variables didactiques, il y a la taille des nombres ou la disponibilité des jetons à compter. Si les objets sont disponibles, on peut compter directement les objets accumulés, c'est intéressant pour familiariser les enfants avec le contexte. Si les quantités sont inférieures à 3, les élèves peuvent compter sur leurs doigts ou se représenter la situation mentalement. Si les objets sont plus grands, les élèves doivent soit figurer les objets par des dessins, soit opérer avec les nombres. C'est l'absence d'objets à dénombrer qui conduit à l'utilisation des nombres.

Les élèves peuvent aussi utiliser le recomptage □ Représente sur ses doigts pour les compter.

Le surcomptage est le fait de retenir une quantité puis d'y ajouter l'autre quantité en avançant dans la suite numérique. Pour favoriser cette méthode, on peut demander aux élèves de lancer un dé deux fois puis d'additionner les quantités obtenues, il est donc nécessaire de retenir le premier nombre. Il faut ensuite se détacher de cette procédure quand on étudie des grands nombres.

Le décomptage est la même chose que le surcomptage mais c'est pour trouver la quantité restante, donc on recule dans la suite des nombres. Cette procédure est plus difficile.

Le double comptage est le fait de ne pas additionner mais de compter de 0 deux fois (comme dans un jeu où il y a deux dés). Les difficultés résultent d'un mauvais départ du comptage et de gérer le double-comptage.

En fin d'école maternelle, l'élève doit prendre conscience que le résultat d'un ajout d'un objet s'obtient en avançant de un dans la suite des nombres. Cela est associé à un travail de composition et de décomposition verbale. La traduction symbolique se fait au CP (2+2=4=).

La première maîtrise des nombres passe par la capacité des élèves à circuler entre le registre analogique (dé, doigts), le registre symbolique (écriture chiffrée) et le registre verbal. Le repère analogique permet aux élèves des images mentales des petits nombres. La représentation verbale est nécessaire à l'apprentissage de faits numériques comme les tables de multiplication. La représentation symbolique est utilisée pour communiquer à l'écrit et pour poser des opérations en colonnes ou sur la calculatrice. Exemple : Réalise 7 avec deux dés ⍰ Symbolique à analogique.

La reconnaissance de l'écriture chiffrée n'est pas automatique est nécessite une progression par des jeux de carte traditionnels (autant de dessin que ce que le nombre indique sur la carte) et l'utilisation de la file numérique.

3. <u>La numération décimale :</u>

Problème : Construire une collection dont le nombre d'objets est donné par son écriture chiffrée ou produire la suite des nombres de un en un ou de dix en dix. Placer des nombres sur une ligne régulièrement graduée. Ces problèmes font intervenir la relation entre quantités et écritures des nombres en chiffres, la comparaison des nombres entiers, l'écriture des suites de nombres entiers, le placement ou le repérage de nombres sur une ligne graduée.

« Organiser une collection importante pour pouvoir écrire facilement le nombre d'objets qu'elle contient. » ⍰ Relation entre quantités et écritures des nombres en chiffres.

La procédure : représenter la quantité d'objets par groupements successifs de 10. L'élève doit maîtriser le groupement par 10 objets (la dizaine), par groupement de 10 dizaines d'objets (la centaine) puis le groupement par 10 centaines d'objets (le millier).

2ème procédure : représenter la quantité par un nombre limité d'objets choisis à l'avance qui permet de reproduire l'écriture chiffrée (symboles). Par exemple, quand on compte 10 objets, on les remplace par un triangle qui symbolise une dizaine puis un groupement de 10 triangles sera symbolisé par un cercle. Chaque type d'objet à une valeur et une position dans l'écriture chiffrée.

Les connaissances : connaître la base dix, connaître les égalités suivantes : 1 dizaine : 10 unités, 1 centaine : 10 dizaines, … Savoir que chaque type d'unité de numération correspond à une position dans l'écriture du nombre, connaître le rôle du 0 pour marquer l'absence d'unité d'un certain type, connaître les décompositions associées : 3042 = 1 000 + 1 000 + 1 000 + 10 + 10 + 10 + 10 + 2 ou = (3 x 1 000) + (4 x 10) + 2.

La monnaie peut être étudiée à ce moment mais cela supposerait qu'on se limite aux billets de 10 et 100 euros et aux pièces de 1. Le boulier est souvent utilisé où chacune des boules du haut vaut 1 et chaque des boules de la ligne suivante vaut 10.

Construire une collection dont le nombre d'objets est donné par son écriture chiffrée ⍰ Passage de l'écriture chiffrée à la quantité. Exemple : Si les timbres sont vendus par pochettes de 100 timbres et carnets de 10 timbres, combien de pochettes et de carnets de timbres faut-il acheter pour avoir 2340 timbres ?

Procédure : Si on décode 2340 en 2 milliers, 3 centaines et 4 dizaines, on trouve directement le nombre de carnets : 4 dizaines donc 4 carnets de 10. Pour les pochettes, on procède à un décodage des milliers : 2 milliers = 20 centaines et on ajoute les 3 centaines du nombre, on obtient donc 23 pochettes. Ou alors, on peut directement lire le nombre de centaine dans 2 340 (23) mais c'est très difficile pour les élèves. On peut aussi décomposer 2 340 en : (2 x 1 000) +(3 x 100) + (4 x 10) ou (23 x 100) + (4 x 10).

Le recours au tableau de numération est une aide.

L'objectifs de ces exercices est de comprendre et utiliser la valeur de chaque chiffre de l'écriture d'un nombre en relation avec son rang. Les variables didactiques sont : le nombre demandé, la présence du 0 dans l'écriture du nombre, le nombre d'objets disponibles pour chaque catégorie (limite les décomposition).

<u>La comparaison des nombres :</u>

Procédure 1 : Si les nombres n'ont pas le même nombre de chiffre, le plus grand est celui qui a le plus grand nombre de chiffres. Si les deux nombres ont le même nombre de chiffre, on regarde le chiffre du rang le plus à gauche, puis le suivant s'ils sont identiques.

Procédure 2 : On imagine que les nombres sont écrits les uns sous les autres. On regarde les chiffres figurant au rang le plus élevé puis on recommence avec le rang inférieur.

Certains élèves développent des procédures personnelles : Ils comparent en faisant des groupements : le plus grand nombre est celui qui a plus de centaine ou de dizaine que l'autre.

Les erreurs dans la comparaison : Si on a 46>203, l'élève compare les chiffres de gauche à droite sans se préoccuper de leur rang. Cette procédure est fausse mais l'élève ne le comprend pas car elle fonctionne quand il y a le même nombre de chiffres. Parfois, il y a une confusion dans la représentation des nombres : l'élève pense que 23 = 2+3 et 17 = 1+7 donc 23<17 puisque 5<8. Les symboles de la comparaison peuvent être non maîtrisés, il y a donc deux compétences : Savoir comparer deux nombres et savoir coder le résultat de la comparaison à l'aide des signes < et >.

Si un élève écrit : 102 < 200 < 23 < 32 alors il ne compare que le premier chiffre de gauche sans prendre en compte son rang.

La suite des nombres de 1 en 1 est compliquée car l'élève doit comprendre que quand on passe de 209 à 210 on obtient 10 unités qui sont regroupées en une dizaine. Le passage de 299 à 300 est aussi compliqué puisqu'on ajoute une unité qui est regroupée dans une nouvelle dizaine et cette nouvelle dizaine s'ajoute aux 9 autres, donc on ajoute une centaine. Parfois, l'élève écrit 39 après 29 car il ne fait avancer de 1 que le chiffre des dizaines, il n'a pas perçu que, dans ce processus, le chiffre des unités devient 0. S'il a su écrire la suite jusqu'à 29, il peut se retrouver gêner par le fait qu'il ne sait pas ce qu'il y à après 29. S'il écrit 210 après 29, c'est parce qu'il considère qu'après 9, il y a 10. S'il écrit 320 après 310, c'est parce qu'il considère que le 0 doit être traité à part (puisqu'on commence à compter à partir de 1), donc il avance le premier chiffre non nul en commençant par la droite.

La suite des nombres de 10 en 10 nécessite d'avoir compris qu'il faut ajouter à chaque fois une dizaine. Quand on passe de 296 à 306, on obtient 10 dizaines qui sont transformées en une centaine.

Les aides : Il faut proposer aux enfants des outils de la vie quotidienne pour qu'ils prennent conscience des régularités de la suite numérique : mètre de couture, bandes numériques, tableau de nombres, droites numériques graduées.

Placer ou repérer des nombres sur une ligne graduée : (dès le CE1)

Au CE1, les repères sont de 1 en 1 puis de 5 en 5, 10 en 10 et 100 en 100, puis on demandera de placer de manière approchée. Ces exercices renforcent la maîtrise de la comparaison des nombres, la maîtrise des suites de nombres organisées et la maîtrise des relations entre les nombres. A la fin du cycle 2 et au cycle 3, on demande aux élèves de placer des nombres approximativement sur une droite graduée, ce qui est une approche de la notion d'ordre de grandeur. L'élève fait des erreurs quand il ne prend pas en compte le pas choisi (toujours égal à 1 dans les autres exercices). Ou alors, l'élève ne tient pas compte des relations entre les nombres. Par exemple, sur une droite graduée de 100 en 100, il place 325 au milieu de l'intervalle 300 ; 400 alors qu'il doit être dans le premier quart.

Procédures : Ils peuvent numéroter mentalement ou réellement les traits, s'appuyer sur les nombres déjà placés, reculer mentalement dans la suite numérique depuis un nombre déjà placé, avancer de 10 en 10.

Désignation orale des nombres : de l'oral à l'écrit et de l'écrit à l'oral.

La suite orale est la première approche des enfants avec les nombres mais elle est difficile au vu de ses irrégularités. De onze à dix-neuf, beaucoup de problème avec le quatorze et le quinze qui ne répondent pas à une logique. De vingt à cinquante-neuf, c'est plus facile car il existe une sur-comptine des dizaines et les mots sont construits selon une logique : vingt-trois ; vingt-quatre. A partir de soixante, les difficultés sont plus importantes car soixante est associé soit à 6 dizaines (soixante-deux), soit à 7 dizaines (soixante-douze). Ces nombres ont des compositions variées comme : soixante-dix obéit à une composition additive (60+10), quatre-vingts à une composition multiplicative (4x20) et quatre-vingt-dix cumule les deux (4x20+10).

Pour passer de l'oral à l'écrit, les nombres sont réguliers de 20 à 59. Par exemple, on entend bien 3 et 9 dans « trente-neuf). De 60 à 99, on travaille en deux temps car quand on entend soixante, on doit écrire 6 ou 7 et quand on entend quatre-vingts, on doit écrire 8 ou 9 et le 4 entendu n'est pas traduit par un 4.

Au-delà de 100, il est important de décomposer les nombres sous forme canonique pour aider, en utilisant les puissances de 10. Elle permet le passage de l'écriture chiffrée à l'écriture orale.

Exemple : 2 393 = (2 x 1 000) + (3 x 100) + 93. On représente bien « deux mille trois cent quatre-vingt-treize. Les grands nombres (au-delà de dix-mille et cent-mille) sont organisés par tranche de trois chiffres séparés par un court espace pour en faciliter la lecture, on s'appuie sur les milliers.

Les erreurs : « soixante-seize » écrit 616 car le « soixante » induit un 6 et le « seize » un 16. Ou alors 6016 où l'élève écrit chaque nombre qu'il entend, il ne prend pas le nombre comme un tout. Erreurs dans la compréhension du vocabulaire des nombres : un élève ne saura pas forcément ce que veut dire « mille ».

Il est important que les élèves comprennent qu'à l'oral, le plus grand nombre n'est pas forcément celui qui contient le plus de mots. « Mille » est plus grand que « trois cent quatre-vingts dix-sept ».

Si l'élève écrit 492 = quatre neuf deux, il traduit chaque chiffre par sa dénomination verbale, sans tenir compte de sa valeur. Il a peut-être mal interprété la consigne en pensant qu'il fallait écrire le nom de chaque chiffre ou alors il ne maîtrise pas les principes de la numération décimale. On peut entourer le nombre pour que l'élève comprenne que c'est un tout ou alors il faut s'appuyer sur du matériel de numération pour lui réapprendre le principe positionnel d'écriture des nombres en commençant par des nombres à deux chiffres où la dizaine se traduit par un mot particulier puis augmenter le nombre de chiffres.

Si l'élève oublie de marquer la valeur d'un chiffre : il faut lui faire prendre conscience que dans un nombre à trois chiffres, le nombre de centaines ne se traduit pas par un mot particulier mais par l'ajout du mot « cent ». L'élève peut prendre conscience de son erreur quand on lui demande de traduire ce qu'il a écrit en chiffres.

4. **<u>Fractions et nombres décimaux : (dès le CM1)</u>**

Les fractions ont principalement pour but d'aider à la compréhension des nombres décimaux en primaire.

Les apports des fractions dans les problèmes : une grandeur est rarement un nombre entier, les fractions permettent de trouver la valeur exacte. Elle permet d'exprimer une mesure en n'utilisant qu'une seule unité (pas comme les heures). Sur une ligne graduée, l'utilisation unique des nombres entiers laisse beaucoup de vides, on peut donc fractionner chaque intervalle (par 10 ou 100 par exemple) pour repérer de nouveaux points de cette ligne. Les nombres décimaux permettent de donner une approximation aussi proche qu'on veut.

Les fractions sont introduites au CM1 comme des outils pour exprimer des mesures à partir d'une unité dans le cas où cette mesure ne s'exprime pas par un nombre entier d'unités.

Problème : deux élèves ont la même bande graduée. L'un des deux doit permettre à l'autre de tracer un segment de même longueur qu'un segment [AB] représenté à l'aide de la bande unité et sans règle graduée.

La procédure de base est de chercher combien de fois il est possible de reporter la bande unité sur le segment [AB]. Les variables sont le rapport entre la longueur du segment et celle de la bande unité, le nombre de bandes unités disponibles pour chaque élève (s'il y a en a plusieurs, on peut toutes les mettre bout à bout).

Si le report est un résultat entier alors le résultat sera un nombre entier qui est facile à trouver. Si le rapport est fractionnaire, avec un dénominateur multiple de 2, report d'un nombre entier d'unités puis de la bande-unité pliée en 2 ou 4 (le pliage de la bande est facile à réaliser). La longueur du segment peut être exprimée par 1u + ¾u, où on a pris 3 fois le quart de l'unité.

Si la mesure du segment est inférieure à la bande unité, les élèves seront déstabilisés car cela remet en cause ce qu'ils ont l'habitude de faire.

Si le dénominateur n'est pas un multiple de 2, la procédure est la même mais partager en 3 ou en 5 est plus difficile et si les élèves n'ont qu'une seule bande, ils vont avoir du mal à faire

2u + 1/2u + 2/3u. Si le rapport fractionnaire est encore plus compliqué, le problème devient irréalisable.

On passe d’un travail sur les fractions simples à un travail sur les fractions décimales (dixièmes, centièmes) et les nombres décimaux. Le passage d’une écriture fractionnaire à une écriture décimale nécessite l’apprentissage d’un nouveau code puisque 43 + 2/10 + 5/1000 = 43.205. Le codage est facilité par le recourt à un tableau de numération. La virgule permet de repérer le chiffre des unités.

La numération décimale de position n’est pas compliquée, on fait toujours des paquets de 10 :

1 centième = 10 millièmes 1 millième = 1/10 centième.

Comme exercice, on leur donne des bandes de longueur de l’unité, de la moitié de l’unité, du quart de l’unité et du dixième d’unité et on leur demande de tracer un segment de longueur 3.2u. Ils doivent donc Il faut donc reporter 3 fois la bande de longueur unité et une deux fois la bande du dixième d’unité. Certains élèves comprennent 0.2 comme 1/2u, donc la moitié.

Les nombres décimaux sont d’abord utilisés avec des unités de mesure non conventionnelles puis ils serviront à exprimer des masses, des longueurs, des aires et des durées avec le système légal. Il est désormais possible de coder des mesures qui étaient exprimées en plusieurs unités avec les décimaux. Exemple : 1m37 = 1.37m

1 cm = 1/100 m   1dm = 1/10 m

On écrit donc 4 m 7 cm = 4 m + 7/100 m = 4.07 m.

La mesure des durées est plus délicate car elle ne repose pas sur la base 10.

 1h15 = 1h + 1/4h = 1.25h.

Pour repérer des points situés sur une droite graduée, les élèves doivent identifier la longueur unité et le type de partage de l’unité.

A l’école primaire, la fraction 4/3 signifie qu’on a reporté 4 fois le tiers de l’unité. C’est donc 4 x 1/3. Les élèves comprennent que les nombres décimaux fournissent des résultats aussi précis que l’on veut pour la valeur du quotient (approché au 1/10, au 1/100).

La désignation des fractions :

Ils apprennent les dénominations : demi, tiers et quart et la dénomination en -ième lorsque le dénominateur est différent de 2 ; 3 ou 4.

Les élèves doivent comprendre qu’une fraction peut être découpée en partie entière et en partie fractionnaire inférieure à 1.

Certains ne différencient pas 4/3 et 3/4, il inverse la fonction du numérateur (donne le nombre de part) et du dénominateur (en combien de parts égales l’unité est partagée). Difficulté à concevoir des fractions < 1 comme 4/3 d’une tarte. Difficulté à concevoir que 2/3=4/6, ils pensent plutôt que 2/3<4/6.

La désignation des nombres décimaux :

L’écriture décimale avec une virgule : comprendre que la valeur d’un chiffre dépend de sa position qu’il occupe dans l’écriture et les relations qui existent entre des chiffres situés à des rangs différents. Exemple : 405.26 : « 4 » représente le nombre de centaines d'unités et « 6 » représente le nombre de centièmes d'unités.

Comprendre les décompositions associées aux écritures : 405.26 = 405 + 0.26 ou 4x100+5+2x0.1+6x0.01 et avec les écritures fractionnaires : 405 +26/100.

Ils doivent connaître la lecture courante (avec la virgule) et la lecture « signifiante » « 405 et 26 centièmes ».

Les élèves confondent l'écriture décimale et l'écriture fractionnaire où le trait de fraction représente pour eux une virgule. L'écriture décimale est parfois perçue comme une écriture où la virgule sépare deux entiers. Exemple : 1.8 + 2.6 = 3.14.

Confusion entre les termes « dizaines » et « dixièmes » car les élèves pensent que si « dizaine » correspond au 2$^{\text{ème}}$ chiffre avant la virgule, alors les « dixièmes » sont placés deux chiffres après la virgule.

<u>La comparaison de fractions : (cycle 3)</u>

Cas simples : 4/3>2/3 ⍰ Reconnaissance par l'oral et visible par l'écrit.

5/4>1 est plus difficile à établir. Les élèves doivent se dire qu'il faut 4 quarts pour faire 1.

Savoir que 3/2=6/4 car un quart est obtenu en partageant un demi en deux.

Le recours à des représentations de fractions par des longueurs ou des aires est une aide, comme le placement de fractions sur une droite graduée.

<u>Comparaison de nombres décimaux : (cycle 3)</u>

Procédure 1 : Considérer la valeur de chaque chiffre en partant du chiffre de plus grande valeur (placer les chiffres les uns en dessous des autres).

Procédures 2 et 3 : Comparer les parties entières. Si elles sont égales, les mettre au même format (par exemple, 3 chiffres après la virgule ⍰ Conversion) ou examiner chaque chiffre après la virgule.

Les erreurs viennent de la non prise en compte de la virgule où le plus grand nombre est celui qui a le plus grand nombre de chiffres. Ils peuvent comparer les parties décimales comme des parties entières.

Certains pensent qu'entre un nombre entier et un nombre qui possède deux chiffres après la virgule, on ne peut placer qu'un nombre qui a un chiffre après la virgule. Ils pensent aussi que plus on se déplace vers la droite et plus les chiffres ont une valeur faible donc ils écrivent : 3.092<3.09

Toutes ces connaissances erronées viennent de conceptions initiales que les élèves se sont forgées en étudiant les nombres naturels. Leurs conceptions sont renforcées car, dans certains cas, leur démarche fausse fonctionne. Ces difficultés sont entretenues par les lectures courantes comme « deux virgule cinquante-quatre » au lieu de « deux et cinquante-quatre centièmes ». Ces conceptions peuvent aussi venir de choix didactiques de l'enseignant qui peut commencer les nombres décimaux en présentant différentes unités réunies en une comme 3m14cm = 3.14m, les élèves peuvent alors transmettre les règles connues des entiers sur les décimaux.

Il faut être vigilant quand on donne des exercices à ne pas permettre aux élèves d'utiliser des procédures erronées qui fonctionnent. Par exemple, ne pas proposer des nombres dont les parties décimales sont supérieurs et où l'ordre y correspond comme 2.12<1.55 car 12<55.

5. L'enseignement du calcul :

Il existe des calculs automatisés, qui font appel à la mémoire (6*4=24).

Les calculs réfléchis ou raisonnés sont réalisés à chaque fois qu'on établit une procédure spécifique pour sa résolution. Il y a différentes procédures pour résoudre 43+19. On peut calculer 4+1 et 3+9 puis additionner les deux résultats ou ajouter 1 à 19 pour rendre le calcul plus simple : 43+20=63 puis on enlève 1 : le résultat est 62. Ou ajouter 7 afin de trouver un nombre rond (43+7=50) puis ajouter 12.

Chaque calcul, qu'il soit automatisé ou réfléchi, nécessite de disposer de résultats mémorisés et ils s'appuient sur les propriétés des opérations.

Le calcul posé s'appuie sur les propriétés des opérations mais elles ne sont pas choisies contrairement au calcul réfléchi où l'élève décide de mobiliser telle propriété. La procédure du calcul posé est la même pour tous alors que chacun développe des procédures différentes dans le calcul réfléchi. Le calcul automatisé est réalisé sans effort alors que le calcul réfléchi peut mobiliser une grande charge mentale. Selon les individus, le calcul sera automatisé ou réfléchi. Par exemple, en CE1, tous les élèves savent que 5+4=9 mais en CP, ils ont élaboré des stratégies comme représenter 5 et 4 sur leurs doigts ou le surcomptage à partir de 5.

L'apprentissage des tables ne favorise pas la mémorisation, il faut commencer par le sens des opérations en travaillant la résolution de problème. Les tables ne doivent pas être une comptine à réciter, chaque calcul est indépendant. Les doubles, les moitiés, les compléments à 10, les tables du 2 et du 5 sont faciles à mémoriser et constituent donc des points d'appui. L'élève doit comprendre la commutativité de la multiplication pour éviter d'apprendre la même opération deux fois.

Le calcul posé est moins important qu'avant à l'école primaire mais constitue un apprentissage nécessaire pour la compréhension des nombres et des opérations. L'usage de la calculatrice est enseigné depuis le cycle 2 où les élèves doivent comprendre comme elle fonctionne : calcul de division avec reste, utilisation des parenthèses, … L'initiation au tableur ne se fera qu'au collège.

La calculatrice apporte une grande aide dans l'apprentissage d'une nouvelle opération et quand le problème est complexe (beaucoup d'opérations), afin de réduire la charge mentale de travail.

Pour effectuer un calcul réfléchi, il est nécessaire d'avoir des résultats de base (les tables) en mémoire et les relations entre les nombres (25 est le quart de 100), connaître la décomposition d'un nombre : 27 c'est 20 et encore 7. Connaître les propriétés des opérations. Pour alléger la charge de travail, on peut s'accompagner de traces écrites : résultats partiels, schémas, …

On peut proposer à l'élève un calcul qui ne peut pas directement être posé sur la calculatrice, il devra alors établir un raisonnement et une procédure spécifiques. Exemple : Comment obtenir 235x21 alors que le bouton (x) de calculatrice ne fonctionne plus ? □ Additions itérées : 21 fois 235 (lien entre multiplication et addition itérée).

Le calcul approché nécessite toutes les compétences du calcul réfléchi mais aussi de savoir déterminer l'ordre de grandeur recherché (en fonction du contexte de la situation) et de savoir déterminer les arrondis choisis pour les nombres en jeu.

6. Addition et soustraction :

Les compétences :

Être capable de résoudre des problèmes relevant de ces deux opérations d'abord par des procédures personnelles puis en utilisant des procédures expertes (reconnaître qu'un problème nécessite telle opération).

Être capable de résoudre des problèmes relevant de calcul additif ou soustractif en choisissant la méthode la plus appropriée.

Beaucoup de problème ne peuvent être résolus qu'avec plusieurs opérations, ils doivent donc être décomposés en sous-problèmes. C'est la structure des problèmes qui provoque les difficultés et pas le choix de l'opération.

Les problèmes de composition de deux états : Recherche de composé (Dans un bouquet, il y a 8 roses et 7 iris. Combien y-a-t-il de fleurs ?) ou recherche d'une partie (Dans un bouquet de 15 fleurs composé de roses et d'iris, il y a 8 roses. Combien y-a-t-il d'iris ?)

Les problèmes de transformation d'un état : Recherche de l'état initial (Jacques a gagné 5 billes. Il en a maintenant 22. Combien en avait-il avant la partie ?) ou recherche de l'état final (Jacques avait 17 billes. Il en a gagné 5. Combien en a-t-il maintenant ?) ou recherche de transformation (Jacques avait 17 billes avant de jouer cette partie. Il en a 22 à la fin de la partie. Combien en a-t-il gagné ?)

Les problèmes de comparaison d'états : Recherche de l'un des états (Bernard possède 25 petites voitures. Il en a 5 de plus que Charles. Combien Charles en a-t-il ?) ou recherche de la « comparaison » (Dans un magasin, un jouet vaut 9.45€. Il vaut 6.60€ dans un autre magasin. De combien est-t-il moins cher dans le 2ème magasin ?)

Les problèmes de compositions et de transformations : Recherche de la transformation composée (Gérard a joué deux parties de billes. A la première partie, il gagne 7 billes et à la seconde partie, il en gagne 8. Combien en a-t-il gagné au total ?) ou recherche de l'une des composantes (Au jeu de l'oie, Julie joue deux coups. Au 2ème coup, elle avance de 9 cases. Au total, elle s'aperçoit qu'elle a reculé de 4 cases. Que s'était-il passé au premier coup ?)

Les problèmes où les opérations sont mobilisées dans leur sens premier sont plus simples : addition pour chercher le résultat d'une augmentation et soustraction pour chercher le résultat d'une diminution.

La recherche de l'état final dans les problèmes de transformation d'un état peut être résolus par des grandes sections avec des petits nombres. Il est important de laisser les élèves faire la schématisation qu'ils souhaitent.

Les procédures des élèves :

- Procédures s'appuyant sur **une figuration de la réalité** ou un dénombrement : Représentation à l'aide de schémas ou de ses doigts puis dénombrement par le comptage de un en un.

- Procédures utilisant **le comptage en avant ou en arrière** : comptage de un en un ou sauts successifs de 10 en 10 ou 100 en 100. Le comptage en avant est le surcomptage et le comptage en arrière est le décomptage. (L'élève écrit la suite de nombre de l'énoncé puis barre les chiffres afin d'arriver au bon nombre).

- Procédures **de reconnaissance d'un calcul** : L'élève ne s'appuie plus sur le contexte mais il traduit mathématiquement la situation avant d'effectuer les calculs nécessaires. Exemple : Bernard possède 25 petites voitures. Il en a 5 de plus que Charles. Combien Charles a-t-il de voitures ? ￼ L'élève traduit par 5 + … = 25.

Les élèves se construisent progressivement un schéma général de procédure qui évite les raisonnements trop longs. S'il n'a pas encore acquis ces schémas, il peut :

- raisonner en s'appuyant sur le contexte évoqué : « Avant, il avait moins de billes, donc je fais une soustraction ». L'élève transforme le problème pour le ramener à quelque chose qu'il sait résoudre.

- faire un schéma intermédiaire : Le schéma va lui faire comprendre qu'il faut reculer (soustraire) pour trouver le nombre recherché.

- Traduire l'énoncé par une équation : 25 = 5 + … (addition à trou + comptage avant).

- Procéder par essais en faisant une hypothèse sur la réponse.

<u>Les variables didactiques :</u>

La taille des nombres et de leur écart :

- Si les deux nombres sont petits, alors toutes les procédures sont possibles, même le dessin de chaque objet.

- Si l'un des nombres est grand, alors le dessin devient difficile mais on peut compter en arrière.

- Si les deux nombres sont voisins, alors l'élève peut réaliser un calcul mental ou un comptage en avant.

- Si les deux nombres sont grands et non voisins, alors les calculs réfléchi, posé ou avec la calculatrice sont nécessaires.

La configuration des nombres : Les nombres « ronds » permettent des calculs plus simples et les nombres décimaux rendre les calculs plus difficiles.

La mise à disposition ou non d'outils de calcul : Avec la calculatrice, l'élève peut utiliser la procédure qui lui paraît la plus pertinente même s'il n'est pas capable d'effectuer les calculs par lui-même.

<u>Les difficultés des élèves :</u>

- La structure du problème et la place de l'inconnue : les problèmes de composition de transformation sont les plus difficiles à concevoir.

- La difficulté des calculs : Liée à la taille et à la nature des nombres. Les élèves hésitent à mettre en place une procédure de calcul qu'ils maîtrisent mal.

- L'ordre d'apparition des données dans le texte : idée que les nombres doivent être utilisés dans leur ordre d'apparition (contrat didactique).

- La présence de mots inducteurs qui induisent un calcul faux.

- Difficultés sémantiques : l'élève pense qu'une addition n'est que pour un problème d'augmentation. Il faut qu'il élargisse les catégories de problèmes.

- Difficultés syntaxiques : Comprendre que l'addition est commutative contrairement à la soustraction.

Le vocabulaire :

L'élève doit connaître les termes « plus », « addition » et « somme » (résultat de l'addition) mais aussi « soustraction », « moins » et « différence » (résultat de la soustraction).

L'addition et la soustraction des entiers :

La connaissance des tables de l'addition sont souvent bien connues à partir du début du CE2. Elle est nécessaire pour éviter la surcharge cognitive. Il est important de connaître l'équivalence de certains résultats comme 7+5=12 donc 12-7=5. Pour un apprentissage efficace, il faut mettre en relation les résultats : si je connais 7+7 alors je trouve facilement 7+8.

Le répertoire additif se compose de la connaissance des doubles, de la connaissance des décompositions faisant intervenir le nombre 5, de la connaissance des compléments à 10 et de la connaissance de la commutativité de l'addition.

Pour pratiquer le calcul posé, il est nécessaire de bien comprendre les principes de la numération décimale pour comprendre le principe des retenues. Pour l'addition de nombres entiers, la seule difficulté réside dans les retenues. Pour la soustraction de nombres entiers, il y a trois méthodes :

- La méthode par « emprunt » qui casse la dizaine puis la centaine. Les connaissances requises : repérage des chiffres de chaque nombre, équivalence entre 1 centaine et 10 dizaines, … et connaissance des différences entre nombres inférieurs à 20.

- La méthode « par complément » qui remplace le calcul posé par un calcul à trou. Connaissances requises : repérage des chiffres de chaque nombre, équivalence entre a - b et b + … =a et connaissance des différences entre nombres inférieurs à 20.

- La méthode « traditionnelle » où on ajoute 10 unités au premier terme et 1 dizaine au second. Connaissances requises : repérage des chiffres de chaque nombre, propriété de la soustraction selon laquelle, quand on ajoute un même nombre aux deux termes d'une différence, on conserve la différence et connaissance des différence entre les nombres inférieurs à 20.

La conception du 0 comme « rien » conduit parfois à des erreurs.

L'addition et la soustraction des décimaux :

Certains élèves effectuent une opération en posant les nombres décimaux en commençant par la droite sans se préoccuper de la virgule. Dans des opérations où les 0 après la virgule ne sont pas écrit, les élèves ne les imaginent pas.

Exemple : 134.700

- 52.834

Les propriétés du calcul réfléchi : Pour le calcul de 75-67

- Remplacer ce calcul par celui du complément de 67 à 75 : savoir que ces deux calculs sont équivalents.

- Enlever d'abord 70 puis ensuite ajouter 3 (il a enlevé 3 de trop).

- Remplacer ce calcul par 78-70 en ajoutant 3 à chacun des termes de la différence : savoir qu'on obtient une différence égale en ajoutant un même nombre aux deux termes de la différence.

Le choix de la procédure vient de la connaissance des relations entre nombres. Par exemple, pour additionner 42+38, on additionne d'abord 2+8 car ils vont bien ensemble. Pour additionner 42+39, on additionnera 42+40 puis un enlèvera 1 unité.

Les difficultés viennent des conceptions erronées des élèves : « la virgule sépare deux nombres entiers »

7. Multiplication et division

- Être capable de résoudre des problèmes relevant de ces deux opérations, d'abord par des procédures personnelles puis par des procédures expertes.

- Être capable de produire le résultat d'un calcul en choisissant la méthode la plus appropriée.

Catégorie 1 : Situations de proportion simple, avec présence de l'unité

A. Problème multiplicatif : « Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers de longueur 16. En partant de 0, j'ai avancé de 12 bonds. Quelle est ma position d'arrivée ? » : Ces problèmes peuvent être représentés par des schémas fonctionnels.

B. Problème de division-partition (recherche de la valeur d'une part) : « Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers. En partant de 0 et en 12 bonds, le pion arrive à la position 192. Quelle est la valeur de chaque bond ? » ⍰ La valeur de chaque bond est donnée par la position d'arrivée au bond du premier bond.

C. Problème de division-quotition (recherche du « nombre de parts ») : « Je déplace un pion sur une piste graduée, en partant de 0, par bonds réguliers de longueur 12. Je suis arrivé à la position 192. En combien de bonds ? ».

Les nombres utilisés dans ces problèmes sont situés soit dans un contexte ordinal (sauts réguliers ou comptage de n en n), soit dans un contexte cardinal (avec des objets isolés : problème B), soit dans un contexte de mesure (problème C).

Tous les problèmes sont formulés avec des nombres naturels même si le résultat ne l'est pas forcément. C'est le contexte qui impose l'existence d'un reste nul ou non. Le contexte est donc une variable qui conditionne la mise en forme mathématique du problème : utilisation de la division euclidienne, de la division décimale ou de donner le résultat sur la forme fractionnaire.

Catégorie 2 : Situation de proportion simple, sans présence de l'unité

Ces problèmes ne peuvent pas être résolus en ne faisant intervenir qu'une seule opération et relèvent de la proportionnalité.

Catégorie 3 : Situation de comparaison faisant intervenir des expressions du type « fois plus » ou « fois moins »

« Pierre a 7 ans. Son père est quatre fois plus âgé. Quel est son âge ? ».

Catégorie 4 : Situation de produits de mesures

Ce sont des situations qui peuvent être schématisées par un tableau à double entrée ou un quadrillage rectangulaire régulier ou par l'aire d'un rectangle.

Problèmes multiplicatifs : « Avec 3 sortes de figures (carré, triangle, rond) et 5 couleurs, combien peut-on réaliser de pièces différentes ? »

Modélisation par un tableau :

	Carré	Rond	Triangle
Jaune			
Rouge			
Bleu			
Vert			
Blanc			

Problème de division : « Pour faire un quadrillage rectangulaire de 180 carreaux ayant 12 carreaux sur un côté, combien faut-il de carreaux sur l'autre côté ? »

Les procédures de résolution :

Pour les problèmes de multiplication :

Problèmes de proportionnalité simple : « Le directeur de l'école a acheté x boîtes de y crayons chacune. Combien a-t-il acheté de crayons ? »

Si y et x petits, alors procédure du dessin, procédure additive (ajouter x fois y) ou procédure multiplicative.

Si y grand et x petit, alors procédure additive (efficace si l'élève fait des groupements de termes) et procédure multiplicative.

Si x et y grands, alors les procédures additives deviennent compliquées, il ne reste plus que la procédure multiplicative.

Pour les problèmes de « produits de mesures » :

- Ecriture de tous les couples possibles

- Résolution par un schéma : assure la représentation de tous les couples (avec un arbre).

- Résolution par un tableau à double entrée

- Résolution par un raisonnement (multiplication).

Pour les problèmes de division :

« On range 273 œufs dans des boîtes de 12. Combien de boîtes peut-on remplir ? »

- Des procédures imagées : soit le dessin figuratif des œufs groupés par 12, soit le dessin schématisé qui ajoute des boîtes de 12 successivement.

- Des procédures fondées sur l'addition et la soustraction : Soit des additions itérées (12+12+12+…), soit des soustractions itérées (273-12-12- …).

- Des procédures multiplicatives : Soit une addition à trou, soit des essais des multiples successifs du diviseur, soit des essais par approches successives.

- Utilisation de la division : Division de 273 par 12 ou utilisation de la calculatrice.

<u>Les variables didactiques :</u>

Pour une multiplication ou une division, on peut faire varier :

- le type de problèmes (les problèmes « proportion simple » sont plus réussit que les problèmes « produit de mesures ».

- Le type de nombres utilisés (naturels ou décimaux).

- La taille des nombres (empêcher le recours au dessin).

- Les outils de calcul disponibles (calculatrice = plus de choix dans les procédures).

Pour les problèmes de division, on varie :

- la valeur du quotient (plusieurs chiffres ou un seul).

- l'existence ou non d'un reste nul (interprétation des calculs)

- l'interprétation du résultat ou non (la réponse est soit fournie par le quotient entier, soit par le reste, soit par le quotient augmenté de 1, soit par le quotient et le reste).

<u>Les erreurs des élèves :</u>

<u>Pour les problèmes ne faisant intervenir que des nombres entiers :</u>

- Erreurs dans le choix de la procédure de résolution : influence des termes de l'énoncé ou pour un contexte qui induisent une opération.

Exemple : « Sophie a partagé un long ruban en 42 petits rubans identiques de 6 cm de long. Quelle était la longueur du long ruban ? » Le contexte est une situation de partage, donc l'élève peut penser qu'il faut faire une division alors qu'ici, c'est une multiplication.

« Jo a acheté 8 crayons identiques et a payé 2€. Quel est le prix d'un crayon ? » C'est une situation de recherche d'une part mais les élèves peuvent faire 8/2 au lieu de 2/8.

- Des erreurs dans l'exécution de la procédure choisie ou dans l'interprétation des calculs effectués et des erreurs dans le calcul.

Pour les problèmes faisant intervenir des décimaux :

Dans l’énoncé « Jeff achète un morceau de 0.756 kg de gruyère à 10.35€ le kg. Quel est le prix de ce morceau de gruyère ? » Il est difficile pour un élève de se dire qu’il faut ici faire une multiplication. L’élève peut alors chercher le prix d’un gramme en divisant 10.35 par 1 000 puis en convertissant 0.756 en kg.

Dans certains énoncé, les nombres sont entiers mais le résultat est décimal, il faut donc penser à réaliser une division euclidienne. Certains élèves, avec la division euclidienne, vont comprendre le reste comme une partie décimale et donc l’ajouter après la virgule. Si la division ne s’arrête pas, l’élève doit savoir le degré de précision qu’on attend de lui.

Si l’élève ne comprend pas qu’il faut utiliser une division, il va additionner plusieurs fois le nombre pour arriver sur le nombre d’objets attendus ou alors il va essayer des produits du nombre de part par des entiers.

Le vocabulaire :

Il faut que l’élève sache qu’une écriture comme 25x13 est égale aux additions répétées de 25 (13 termes). Cela devient complexe quand il y a plus de deux termes dans une multiplication car on fait intervenir l’associativité de la multiplication.

On peut employer « fois » et « multiplié par ». Le terme « produit » désigne l’écriture et le résultat. Le mot « facteur » qualifie le « terme d’un produit » mais n’est pas utilisé à l’école primaire.

Le vocabulaire de la division est plus complexe puisqu’il y a deux résultats dans la division euclidienne : le quotient entier et le reste. Il faut se limiter à l’égalité de la division euclidienne :

17 = (5x3) +2. On utilise les termes « quotient » et « reste ».

Les connaissances de bases sont : les tables de multiplication jusqu’à 10, le calcul de produits dont un facteur est 0 ou 1, le produit et le quotient d’un nombre naturel ou décimal par 10 ou 100, des produits de type 30x4 ou 30x40. Il faut mettre en évidence la commutativité de la multiplication et la particularité des tables (dans la table du 4, les résultats vont de 4 en 4).

Pour calculer des grands nombres, il faut connaître quelques propriétés des opérations.

Le quotient de 434 par 7 On décompose 434 en 420 + 14 et on calcule 420/7 et 14/7 puis on additionne les deux résultats.

Pour calculer 32/5, on peut multiplier les deux termes par 2 pour obtenir 64/10, ce qui est bien plus facile à réaliser.

Les difficultés des élèves viennent souvent du fait que les tables ne sont pas sues, qu’ils gèrent mal les retenues, qu’ils ne respectent pas l’ordre des calculs ou au « décalage » qui correspond à l’ajout d’un « 0 ».

La multiplication par un nombre à un chiffre est mise en place en CE2.

Les connaissances préalables :

- Les produits des tables de multiplication

- La décomposition des nombres en fonction de leur écriture en base 10

- Le repérage de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre

- Remplacer un produit par une somme de produits (distributivité de la multiplication sur l'addition et associativité de la multiplication 438 x 500 = (438 x 5) x 100).

- Connaître la règle des « 0 » : savoir multiplier par 10 ou par 100.

Difficultés de la division euclidienne :

- C'est la seule opération où on considère le nombre inscrit au dividende de gauche à droite.

- Cette technique exige de faire simultanément des divisions et des multiplications.

- Il est important d'exiger des élèves la pose des soustractions partielles afin qu'ils ne se retrouvent pas devant une opération qu'ils ne savent pas faire.

- Les chiffres écrits au quotient sont des approximation (combien de fois… dans … ?).

Les connaissances préalables :

On met la division euclidienne en place fin CE2 mais surtout en CM1. Il faut :

- Repérer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre

- Connaître les tables de multiplication

- Connaître le calcul approché

- Maîtriser le calcul de produits et de différences.

Les multiples :

Au CE2, notion de double, de triple, de quadruple, de moitié, de tiers et de quart (prépare l'étude des fractions l'année suivante).

Au CM1, l'élève doit connaître les multiples des nombres suivants : 5,10,15,20,25,50 et les multiples de 2 (les doubles).

Procédures pour reconnaître si un nombre est multiple d'un autre nombre :

- Chercher s'il est dans la table de multiplication du nombre, en avançant de n en n.

- Essayer des nombres en réfléchissant aux possibilités.

- Diviser le nombre par n pour vérifier si on obtient un reste nul ou non.

- Utiliser une propriété connue comme un critère de divisibilité.

Les difficultés rencontrées :

- Confusion entre multiple et multiplication : l'élève calcule 3 x 24 quand on lui demande si 24 est multiple de 3.

- Dissymétrie de l’expression « est multiple de » : 24 est multiple de 3 ne signifie pas que 3 est multiple de 24.

- Extension des propriétés valables pour certains nombres : prolonger ce qui est valable pour deux en disant que 18 est un multiple de 4 car 8 est dans la table du 4 Il pense que, comme pour 2, il faut juste regarder si le chiffre des unités est dans la table.

<u>Les problèmes à l’école primaire :</u>

« En avançant de 6 en 6 sur une piste graduée à partir de 0 avec des nombres entiers, passera-t-on par le repère associé au nombre 98 ? » Problème qui demande si 98 est multiple de 6.

Pour la notion de multiples communs : « Une plaque rectangulaire mesure 48 cm sur 84 cm. On veut la recouvrir entièrement avec des carrés tous identiques dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Quelles sont toutes les solutions possibles ? » La plupart des élèves auront recours à des hypothèses.

8. Proportionnalité

- Reconnaître si une situation peut être mathématisée au moyen de la proportionnalité.

- Être capable de mettre en œuvre un mode de résolution adapté, en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des données en jeu.

La proportionnalité s’exprime seulement dans le cadre des grandeurs à l’école primaire : « Quand j’achète une quantité 3 fois plus importante, je paye 3 fois plus ». (Quantités, mesures, prix, …).

Les problèmes où la proportionnalité est une convention sociale : Ce sont des problèmes de la vie courante Le prix de la viande proportionnel à la masse achetée. Si les élèves ne connaissent pas ces situations, la convention sociale doit être précisée dans l’énoncé.

Les problèmes où la proportionnalité permet une modélisation d’un phénomène : En physique, l’allongement d’un ressort est proportionnel à la masse suspendue et le nombre de tours de roue est proportionnel au tour de pédales (sauf en moment de roue libre). En géométrie, le périmètre d’un cercle est proportionnel à la longueur de son diamètre et la longueur de la diagonale d’un carré est proportionnelle à la longueur de son côté.

Les problèmes où la proportionnalité intervient comme outil pour définir de nouveaux concepts : Nouvelles notions : agrandissement, échelle, pourcentage, vitesse moyenne, … Elles sont construites en faisant une hypothèse de proportionnalité. Quand on dit qu’on a roulé à une vitesse moyenne de 60km/h, on a rarement roulé à 60km/h tout le long.

<u>Diversité des problèmes :</u>

Les problèmes de quatrième proportionnelle : chercher le nombre manquant. Concerne des grandeurs de même nature comme les problèmes sur les échelles (même unité ou différentes une fois en cm, une fois en kg). Elles peuvent être de natures différentes comme un problème sur les vitesses.

Les problèmes de comparaison de mélanges : Déterminer une partie par rapport à un tout (quantité de sirop à utiliser pour une quantité de boisson souhaitée), déterminer une partie par rapport à une autre partie ou les proportions (tel mélange a-t-il plus ou moins le goût de fraise que tel autre mélange ?).

Les problèmes de recherche peuvent être proposés même s'ils relèvent davantage du collège : Cas de double proportionnalité ▯ Le prix à payer pour un séjour est fonction du nombre de jours et du nombre de personnes.

<u>Les procédures :</u>

- Procédures en appui sur les propriétés de la linéarité : prendre, par exemple, 2.5 fois plus d'ingrédients que les quantités d'origine. Ou alors, procédure en appui sur les propriété additives et multiplicatives de la linéarité comme « 10 c'est 8 plus 2 » donc rapport entre plusieurs nombres pour trouver le nombre final.

- Procédure en appui sur le passage par l'image de l'unité : Trouver les quantités nécessaires pour 1 objet puis multiplier par le nombre d'objets.

- Procédure en appui sur le coefficient de proportionnalité.

<u>Les variables didactiques :</u>

- La relation entre les nombres donnés : Le coefficient de proportionnalité peut être un nombre entier simple ou non, un nombre décimal simple ou non ou un nombre fractionnaire.

- Les rapports de linéarité entre nombres relevant d'une même grandeur : un nombre entier, décimal ou fractionnaire.

- Le nombre de couples donnés : faciliter la mise en évidence d'un coefficient de proportionnalité.

- Le contexte du problème : Est-ce qu'on peut s'appuyer sur une simulation ou à une validation sur expérience ?

- La familiarité des élèves avec la situation évoquée.

<u>Les difficultés des élèves :</u>

- Difficulté à identifier les grandeurs en relation dans la situation proposée : Il est important de laisser les élèves construire eux-mêmes le tableau de proportionnalité afin qu'ils prennent conscience des grandeurs en relation.

- Difficulté à reconnaître si la situation relève du modèle proportionnel ou non : Certains élèves pensent que toutes les situations qui sont représentées en tableau sont des situations de proportionnalité. Le fait qu'on doit faire appel à la proportionnalité n'est jamais dit explicitement, l'élève doit donc faire appel à ses connaissances extérieures.

- Difficulté dans des situations de proportionnalité de type « augmentation » ou « diminution » : agrandissement et réduction de figures où les élèves pensent que ce sont des situations additives ou soustractives.

- Difficulté pour choisir une procédure de résolution : il faut que l'enseignant choisisse ses nombres en fonction des procédures qu'il veut travailler.

- Difficulté liée à la mise en œuvre de la procédure choisie : Comment calculer le coefficient de proportionnalité si celui-ci n'est pas calculable mentalement ? L'exécution des calculs peut aussi être une source de difficulté (décimaux/fractions).

Les situations de référence doivent être issues du domaine de la vie quotidienne ou d'autres disciplines ou de domaines mathématiques (géométrie).

9. Organisation et gestion de données

Cet enseignement correspond à établir des correspondances entre trois modes de présentation : textuelle, en tableau ou graphique.

Les difficultés :

- Extraire une information.

- Comparer deux états relatifs à une même variable.

- Décrire l'évolution d'une variable.

Texte et tableau :

Les procédures :

- Organiser des données, identifier des caractéristiques communes qui constitueront les entrées du tableau.

- Organiser la prise d'information dans un tableau

Les variables didactiques :

- La complexité du texte et la dispersion des données dans le texte.

- Le nombre de catégories qui détermine le nombre d'entrées dans le tableau.

- La quantité de données.

- La familiarité de l'élève avec le contexte.

Texte et graphique :

Les procédures :

- Lecture directe d'une donnée sur un graphique.

- Lecture nécessitant le recours à des calculs.

Les variables didactiques :

- Le type de graphique : le diagramme circulaire est plus difficile à utiliser que le diagramme rectangulaire.

- Les éléments du graphique : La signification des axes, l'échelle choisie sur chaque axe, la graduation des axes (données ou à l'initiative des élèves ?) et les lignes de rappel qui peuvent être fournies ou non.

Les difficultés :

- Difficultés de lecture : regrouper des informations dans un texte, coordonner dans un tableau la lecture des lignes et des colonnes et difficulté à repérer l'abscisse et l'ordonnée dans un graphique.

- Difficultés de graduation et échelle : Certains élèves ne respectent pas la proportionnalité des écarts sur la ligne des abscisses.

- Difficultés liées à la graduation non entière des axes.

- Difficulté relevant de la proportionnalité : La proportionnalité est nécessaire pour la construction de graphiques.

10. Géométrie plane

Cycle 1 et 2 : géométrie perceptive. Cycle 3 : Géométrie instrumentée

L'espace sensible est constitué d'objets concrets et l'espace géométrique est constitué d'objets idéaux qui peuvent être représentés par des figures.

Les problèmes de modélisation sont des problèmes pratiques mais dont la résolution passe par des concepts géométriques. Les problèmes géométriques ne font intervenir que des objets idéaux.

Les dessins son des objets concrets sur lesquels on peut mesurer. Les figures sont des représentations d'objets idéaux, elles comprennent les schémas à main levée qui ne respectent pas les mesures mais qui possèdent des symboles.

En géométrie instrumentée, est vrai ce qui peut être contrôlé par des instruments. En géométrie perceptive, est vrai ce qui est vu. En géométrie déductive est vrai ce qui est démontré.

Il y a les concepts qui évoquent des objets géométriques : segment, droite, demi-droite, centre, … et des relations géométriques entre des objets : alignement, perpendicularité).

Savoir-faire perpendicularité : Savoir tracer une droite perpendiculaire à une droit donnée passant par un point donné et savoir reconnaître si deux droites données sont perpendiculaires.

En PS, l'élève commence à différencier les formes par la vue, le toucher, à travers les jeux.

En MS, travail sur les formes : carré, triangle, cercle, rectangle. L'élève associe un objet à sa représentation.

En GS, l'élève commence à comprendre les propriétés des formes (bords droits ou courbes, sommets et reconnaissance de formes dans l'assemblage.

Le dessin géométrique permet d'évoquer un objet physique, de trouver les propriétés pour résoudre le problème oh d'établir les étapes de construction d'un dessin. Quand la représentation géographique est faite à main levée, on parle de schéma.

Certains élèves ont du mal à utiliser les instruments : dérapage de la règle pendant un tracé s'ils appuient trop fort, la difficulté à comprendre qu'une équerre permet de tracer des droites perpendiculaires ou des difficultés dans des pratiques inhabituelles d'un outil (comme un compas pour reporter les longueurs).

Reconnaître un concept géométrique à partir d'une représentation : pour les figures qui ne sont pas en position prototypique, les élèves essaient de voir à vue d'œil puis avec les instruments si le carré a bien 4 angles droits et 4 côtés égaux.

Variables didactiques :

- La présence ou non d'instruments.

- Le fait que la figure à reconnaître soit isolée ou non.

- Le fait que la figure à reconnaître soit en position prototypique ou non.

Les erreurs et difficultés :

- L'élève ne dispose pas d'images mentales

- Il ne reconnaît les figures que lorsqu'elles sont en position prototypique.

- Il ne contrôle pas toutes les propriétés et peine à utiliser les instruments correctement pour vérifier.

- Il rencontre des difficultés à isoler une figure

- Il peut avoir une mauvaise connaissance du vocabulaire.

Il y a la reconnaissance perceptive (à vue d'œil) et instrumentalisée.

Construire la représentation d'un concept géométrique :

La construction passe toujours par une anticipation mentale du produit fini puis par l'élaboration d'un procédé de tracé qui repose sur des propriétés avant de passer à l'exécution du tracé.

Variables didactiques :

- le fait d'avoir une figure à compléter ou la construire totalement.

- le fait que le début de la construction soit en position prototypique ou non.

- la nature de la figure à construire (rectangle plus facile qu'un losange).

Difficultés et erreurs :

- L'élève n'arrive pas à anticiper une image mentale du dessin qu'il doit construire.

- Il rencontre des difficultés à utiliser les instruments.

- Il rencontre des difficultés au niveau du vocabulaire (confusion parallèle/perpendiculaire)

- Il peut faire des erreurs à cause de la confusion qu'il fait entre les objets de géométrie.

Aider les élèves :

- La manipulation d'objets géométriques (pour classer par exemple).

- Le tracé à main levée des objets géométriques qui permet à l'élève de se débarrasser de la pratique des instruments de géométrique et de se concentrer sur les images mentales.

Les problèmes géométriques en primaire :

A. Les problèmes de construction d'une figure

A partir d'un texte ou d'un schéma : construire une figure à partir d'un cahier des charges. Le problème de type : « Trace un triangle ABC rectangle en A tel que AB= 3cm et BC= 6cm. » devient un problème si l'élève ne dispose pas d'une procédure immédiate. A partir d'un schéma, il faut connaître les propriétés de la figure pour la tracer.

Les variables didactiques :

- Le type de support : papier blanc ou quadrillé.

- Les instruments dont disposent les élèves.

- La spécificité des dessins à réaliser (nombre d'étapes de la procédure).

- La taille de l'espace dans lequel la figure est à réaliser.

Difficultés et erreurs :

- L'élève ne connaît pas les propriétés nécessaires pour trouver la procédure de tracé.

- Si un schéma est nécessaire, l'élève ne va pas oser le dessiner en pensant qu'il faut tout de suite tracer la figure en grandeur réelle.

- L'élève peut avoir du mal à lire le schéma dans le cahier des charges.

B. Reproduction d'objets à l'échelle 1 :

L'élève doit réaliser la copie d'un objet. Ça peut être un dessin ou un solide, une figure simple comme une figure complexe. La validation de la reproduction peut se faire grâce à la superposition avec le modèle.

Pour reproduire une figure complexe, il faut :

- Repérer dans la figure des objets ou des relations de la géométrie de base.

- Repérer des liens entre ces figures de base.

Variables didactiques :

- Le support de la reproduction : papier blanc ou quadrillé.

- Les liens entre les différentes figures de base.

Les difficultés et erreurs :

- Difficulté à repérer des figures et des propriétés de base dans une figure complexe : L'élève pense qu'un objet ne peut pas être décomposé au risque de le dénaturer. Donc difficulté dans le repérage des sur-figures.

- Difficulté à identifier les liens entre les figures de base.

- Difficulté à déterminer une chronologie des tracés : il faut construire mentalement au moins une partie de la figure.

- Difficulté à exécuter des tracés géométriques : difficulté dans le repérage des différents sommets de la figure et, sur papier quadrillé, difficulté à compter les carreaux pour positionner les points les uns par rapport aux autres.

C. Reproduction d'une figure avec agrandissement ou réduction

1ère méthode : Utiliser la proportionnalité et le fait que la mesure des angles entre la figure de départ et son agrandissement ne changent pas.

2ème méthode : La méthode géométrique qui s'appuie sur les propriétés de conservation de l'alignement, des angles, du parallélisme, de l'égalité des longueurs, du milieu d'un segment.

Variables didactiques :

- La nature du coefficient d'agrandissement : coefficient entier ou décimal (possibilité de la première méthode).

- Les relations entre les différentes mesures de la figure à agrandir : relations simples (chaque mesure est un multiple d'une de ses dimensions) ⍰ Appliquer la propriété multiplicative de la linéarité pour construire la figure agrandie.

- La possibilité de disposer d'une règle graduée : sans, la première méthode est impossible à mettre en place.

- La présence de relations géométriques dans la figure : (alignement, milieu, …) qui permettent d'utiliser les propriétés de conservation et d'agrandissement/réduction.

Les difficultés et les erreurs :

- L'élève ne voit pas les relations entre les différents objets de la figure : Par exemple, si les points alignés ne sont pas joints par une droite.

- L'élève est tenté d'utiliser le modèle additif : calcul de la différence entre une dimension de la figure agrandie et la dimension de la figure de départ puis ajoute cette différence aux dimensions de la figure initiale pour trouver les dimensions de la figure agrandie.

- L'élève peut placer approximativement certains points qui manquent.

Pour valider la reproduction de l'élève, on peut utiliser un calque de la figure agrandie par l'enseignant.

D. Description d'une figure

La description d'une figure pour faciliter on identification parmi les autres figures : Les critères utilisés sont en fonction de la figure à décrire mais aussi des autres figures. On s'appuie sur le nombre de côtés et de sommets mais ce n'est pas valable si toutes les figures sont des quadrilatères par exemple.

La description d'une figure pour qu'un destinataire puisse se la représenter ou la reproduire : Il faut d'abord analyser la figure, repérer les figures de base qui la composent, définir les liens entre ces différentes figures puis établir une chronologie du tracé. Ensuite, il faut communiquer les différentes étapes de construction : Utiliser un vocabulaire adapté qui n'est pas forcément mathématique (les élèves se comprennent mieux entre eux avec la langue naturelle). L'élève doit se mettre à la place du récepteur du message.

Les variables didactiques sont les mêmes que celles énoncées pour la représentation de figures.

Les difficultés et erreurs :

- Le vocabulaire : L'élève ne connaît pas certains mots mathématiques donc il réalise des phrases longues et imprécises. Il confond certains mots comme perpendiculaire et parallèle ou il utilise un vocabulaire qui n'a pas de sens en mathématique (rond, trait, …).

- La connaissance des propriétés qui caractérisent les figures de base des objets à décrire : Il faut connaître les propriétés d'un carré pour le décrire.

- Effort de décentration dans la description : se mettre à la place de l'autre : Par exemple, l'élève parlera de « perpendiculaire à une droite » sans préciser quelle droite.

- La nomination de certains points de la figure : Beaucoup d'élèves s'interdisent de donner des noms aux points car ils pensent qu'ils n'ont pas le droit de transformer un dessin donné par le maître.

- Le sens que l'élève donne à l'activité : S'agit-il d'être compris de son interlocuteur ou de montrer au maître ce qu'on sait ? Dans le premier cas, l'élève ne respectera pas forcément le vocabulaire mathématique mais saura l'adapter au récepteur. Dans le second cas, l'élève peut faire une liste des figures de base sans préciser les liens entre ces figures et la chronologie des tracés.

11. La symétrie axiale :

Cette symétrie est présente dans beaucoup d'objets et déjà dans le corps.

A. La recherche d'un axe de symétrie :

On repère d'abord une sous-figure qui admet un axe de symétrie, ou des éléments de la figure qui semblent symétriques (segments de même longueur ou angles de même mesure).

Pour vérifier s'il y a bien un axe de symétrie, on peut soit tracer mentalement le symétrique de la figure et voir si le symétrique obtenu fait partie de la figure ou effectuer mentalement le pliage et vérifier que les deux parties de la figure se superposent.

Les difficultés :

Certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage ou de construction de symétrique.

Beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève qui stipule que « un axe de symétrie d'une figure passe par le « milieu » de cette figure ». Le milieu caractérise pour eux le milieu d'un segment, le centre d'un cercle ou une droite qui partage une figure en deux figures superposables. Ils privilégient les axes de symétrie verticaux ou horizontaux et donc, si une figure présente plusieurs axes de symétrie, les élèves ne les relèveront pas tous et si la figure n'admet pas d'axe de symétrie vertical ou horizontal, les élèves vont en conclure qu'elle n'admet aucun axe de symétrie. Si une figure est composée de figures élémentaires facilement repérables et possédant chacune un axe de symétrie, les élèves ont tendance à assimiler ces axes avec ceux de la figure complète.

Variables didactiques :

- Les outils dont dispose l'élève : papier calque (résolution par pliage, reproduction du symétrique, …), géomiroir (permet de réfléchir l'image du dessin et de voir par transparence la figure placée derrière elle) ou l'élève ne dispose pas de ces outils, il est obligé de faire appel à des images mentales s'il ne peut pas plier la feuille.

- Le nombre d'axes de symétrie à trouver.

- L'orientation de la figure (et donc des axes).

- La familiarité de l'élève avec la figure (dans un triangle isocèle, l'élève reconnaîtra vite l'axe de symétrie).

- Les figures de bases qui composent la figure : si la figure est composée de deux éléments isolés qui sont symétriques, l'élève saura qu'il y a deux axes. Si la figure est composée de deux éléments superposables non symétriques, il risque de considérer que la figure n'a qu'un seul axe de symétrie. Si la figure peut être partagée par une droite en deux parties superposables, l'élève risque de reconnaître un axe de symétrie alors qu'il n'y en pas forcément.

B. Tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe :

Les procédures : Le pliage, le papier calque (décalquer la figure de départ avec l'axe, retourner la feuille et la placer sur l'axe (suppose un point de repère sur l'axe)).

- Le papier quadrillé : 1ère procédure : placer le symétrique de tous les points remarquables de la figure et à joindre les points obtenus. 2ème procédure : placer le symétrique d'un point puis construire la figure à partir de ce point en « inversant » la figure de départ et en respectant les propriétés de conservation des longueurs.

Le placement des points sur le quadrillage est facilité si l'axe est placé sur une ligne du papier quadrillé. Les perpendiculaires sont déjà tracées et le report de mesures se fait par le décompte des carreaux.

Les difficultés et erreurs :

- Se tromper dans le dénombrement des carreaux lors de la construction du symétrique d'un point.

- Construire le symétrique d'un point correctement puis construire la figure en la translatant → L'élève a retenu que le symétrique et la figure sont superposables et que ce symétrique est placé de l'autre côté de la droite.

- Suivre les lignes du quadrillage pour tracer le symétrique d'un point dans le cas d'un axe porté par les diagonales des carreaux du quadrillage → L'élève a compris dans les premiers exercices qui la méthode consistant à suivre les lignes du quadrillage donne un résultat juste.

- Tracer le symétrique de tous les points, mais se tromper en les rejoignant → L'élève n'arrive pas à se construire une image mentale du résultat final.

Variables didactiques :

- Consignes données aux élèves (peuvent-ils plier la feuille ?)

- Le matériel mis à disposition (calque, géomiroir, …)

- L'orientation de l'axe

- La figure (classique ou composée de plusieurs figures classiques ? Le nombre de sommets ? Coupe-t-elle l'axe ? A-t-elle des côtés horizontaux ou verticaux ?

Il existe une conception erronée de la symétrie chez les élèves qui pensent que « Le symétrique d'une figure est une figure identique située de l'autre côté de l'axe, à une même distance de l'axe que la figure objet. Il y a conservation de la nature de la figure, des dimensions et de la forme ». Les élèves pensent aussi que l'axe de symétrie d'une figure est une droite d'équilibre entre les deux parties qui passe par le « milieu » de la figure. Les élèves prennent toujours en compte la conservation de la distance de l'objet à l'axe mais, selon les variables didactiques, le traçage est erroné.

Les logiciels de géométrie dynamique :

L'utilisation en classe entière : C'est l'enseignant qui pratique à l'aide du vidéoprojecteur pour montrer des figures, les déplacer ou construire une figure en s'appuyant sur les procédures proposées par les élèves.

L'utilisation en atelier : Les élèves sont maximum deux sur les ordinateurs et ont des tâches de construction de figures dont on donne les caractéristiques ou de reproduction de figures. Il faut gérer l'hétérogénéité des élèves en donnant du travail complémentaire pour les plus rapides. Chaque élève doit avoir une fiche de travail pour noter ses constatations. En fonction des objectifs visés, l'enseignant peut bloquer certains outils comme « Construction de polygones réguliers » pour que les élèves trouvent comment tracer un triangle équilatéral à l'aide de ses propriétés.

Dans ces logiciels de géométrie dynamique, l'une des caractéristiques est la résistance des figures au déplacement (conservation des propriétés qui ont servi à construire la figure lorsqu'on la déplace en tirant sur un point). Cette caractéristique permet de valider les tâches de construction des élèves et de les engager dans des problèmes ouverts.

Exemple d'activités :

« Place deux points A et B. Trace le segment [AB]. Trace la droite perpendiculaire au segment [AB]. → Objectif : entraîner les élèves à utiliser les différents outils du logiciel.

Reproduire une figure à partir d'un modèle.

L'utilisation de « boîtes noires » → L'enseignant réalise une construction et les élèves doivent trouver la procédure de construction en déplaçant la figure pour voir les propriétés qui en résultent.

Inconvénients : Besoin d'une salle informatique, nécessité pour l'enseignant de bien connaître le logiciel, mettre en place des initiations des élèves à l'usage du logiciel et faire accepter à l'élève le lien entre le déplacement d'une figure et la conservation des propriétés.

Avantages : Motivation des élèves, travail en partie autonome.

12. Repérage dans l'espace

- Aider les élèves à se situer, se repérer, se déplacer dans l'espace ordinaire.

- Les familiariser avec quelques solides géométriques.

Se repérer dans l'espace nécessite des connaissances spatiales et des connaissances géométriques. Il y a trois types de repères :

- Les repères relatifs qui prennent en compte le point de vue de l'observateur (le repère est soit placé sur une personne ou sur un objet fixe non orienté).

- Les repères relatifs indépendants du point de vue de l'observateur (Les objets choisis pour le repérage sont temporaires).

- Les repères absolus (établis une fois pour toute avec un point de référence et des directions).

<u>Les types de problèmes :</u>

- Décrire, représenter ou communiquer des positions ou des déplacements.

- Demander des informations pour reproduire une situation spatiale ou effectuer un déplacement.

- Construire ou compléter une organisation spatiale ou organiser un déplacement d'après une description.

<u>Variables didactiques :</u>

- La dimension de l'espace : A plusieurs échelles : repérer parmi des étiquettes identiques l'une d'entre elles. Demander de décrire un trajet pour se rendre d'un point à un autre de l'école en réalisant un plan. Demander d'indiquer la position d'un objet par rapport à soi.

- L'espace :

- Le micro-espace est proche de l'observateur mais extérieur à lui. Il peut voir et toucher tous les objets sans se déplacer (feuille rectangulaire).

- Le meso-espace est accessible par la position de l'observateur, il est un élément de l'espace et a des repères fixes.

- Le macro-espace est un espace dont on ne peut avoir que des perceptions locales, l'observateur doit coordonner des informations partielles pour le reconstituer mentalement.

- Les repères fixes :

- Dans l'espace de la classe : porte, bureau de l'enseignant, …

- Dans l'espace d'une feuille rectangulaire : orientation « portrait » ou « paysage ».

- Dans un quadrillage : Système de coordonnées avec des lignes et des colonnes nommées.

- Les moyens de communication : à l'oral ou à l'écrit ou par schéma à main levée, un plan.

- La place des locuteurs : Est-ce que l'émetteur et le récepteur sont au même endroit ? Pour un trajet, le repérage peut se faire par rapport à des repères relatifs au récepteur, orientés ou non ou absolus.

Les difficultés :

- Difficulté à se décentrer dans un repère relatif (l'élève fait comme si son interlocuteur a le même point de vue que lui).

- Difficulté à orienter une carte dans la bonne direction.

13. Les solides

- Les solides sociaux sont ceux qu'on rencontre dans la vie de tous les jours (boîte).

- Les solides mathématiques sont des portions de l'espace géométriques, définies par des caractéristiques mathématiques (sphère, cylindre, …)

- Les maquettes sont des représentations des solides mathématiques ou sociaux qu'on a épurés.

Les solides se caractérisent par des définitions et des propriétés (nombre et nature des faces), un langage de la description (face, côté, arêtes), un savoir-faire (savoir reconnaître et représenter des solides particuliers).

On peut représenter des solides en perspective ou grâce aux vues (face du dessus, du dessous, …) ou grâce à un patron.

A l'école, l'étude des solides est centrée sur leurs propriétés : nombre et nature des faces, nombre d'arêtes et de sommets. On étudie aussi les patrons (énoncé si le patron est bien celui de la figure donnée). On étudie aussi la perspective cavalière même si c'est au programme du collège.

Les compétences :

- Identifier les propriétés d'un polyèdre.

	Procédure	Variables et difficulté
Si l'élève a le polyèdre en main	Reconnaître la nature de chaque face et les dénombrer	- Familiarité de l'élève avec le solide. - Le nombre de faces, de sommets et d'arêtes. - La nature des faces : polygones connus de l'élèves ? Difficulté : Les faces ne sont pas toutes visibles en un coup d'œil, il faut manipuler le polyèdre.
Si l'élève n'a pas le polyèdre en main mais le voit	Il doit imaginer ce qu'il y a derrière. Il a déjà dû voir ce solide avant sinon l'exercice est impossible.	Mêmes variables qu'avant. Difficulté à s'imaginer ce qu'il y a derrière la face avant.
L'élève a seulement le dessin en perspective	L'élève doit s'appuyer sur les conventions du tracé d'un polyèdre avec les	Mêmes variables. Difficulté à identifier la nature des faces latérales. Si l'élève n'a pas le nom du

	arêtes en plein et en pointillés pour les dénombrer. Il doit tenir compte du fait que certaines faces sont déformées par la perspective.	solide, il ne peut pas répondre avec certitude.

- Savoir reconnaître le patron d'un polyèdre.

Le solide doit être connu des élèves ou alors il faut qu'ils puissent le visualiser. L'élève ne peut pas découper ou plier le dessin. Il doit s'assurer que 3 conditions sont remplies : Toutes les faces du solide (et seulement elles) sont bien représentées (connaître le nombre et les caractéristiques), les côtés des différents polygones qui représentent les faces et qui se correspondent après pliage sont identiques et deux faces ne se superposeront pas au moment du pliage.

Variables didactiques : La nature du solide (familiarité, nombre de faces) et la présence ou non du solide.

Erreurs : L'élève ne s'assure que d'une condition en raison de la surcharge cognitive, il n'arrive pas à effectuer mentalement les rotations de plusieurs polygones et il pense que le patron d'un solide a toujours la même forme. Il faut donc l'entraîner en lui montrant différents patrons. Il faut s'entraîner à la recherche de tous les patrons.

- Savoir construire le patron d'un polyèdre.

Si l'élève a le droit de manipuler l'objet, il peut construire le patron en le faisant rouler sur sa feuille mais il faut faire attention à ce que toutes les faces soient représentées et qu'elles se rejoignent bien par leurs côtés et pas par leurs sommets.

Si l'élève n'a pas le droit de manipuler l'objet mais le voit, il doit « étaler » mentalement les différentes faces. La difficulté réside dans la construction de l'image mentale.

Si l'objet est seulement représenté par une perspective cavalière, il doit se représenter mentalement l'objet puis le dérouler, ce n'est pas un objectif de l'école.

Si l'objet n'est pas représenté, il ne peut être qu'un objet familier

- Savoir représenter un solide dans le plan.

C'est un problème car le plan est un 3 dimensions alors que le dessin n'est qu'en deux dimensions. Il y a donc des codes, avec la perspective cavalière (pointillés pour ce qui est caché). C'est mieux de faire la représentation des solides dans le plan en sixième mais à l'école, on peut proposer des exercices de mise en relation des solides avec des photos de la vie quotidienne en perspective ou des mises en relation de solides avec une de leur face (dessus, côté, …).

14. Grandeurs et mesures

Les 5 grandeurs abordées à l'école sont : Longueur d'un segment, aire d'une surface, masse d'un objet, volume d'un solide, durée.

I. Longueur d'une ligne

A. Longueur d'un segment

« Il a même longueur que » : Le segment est de même longueur qu'un autre s'il est possible de faire coïncider les extrémités de ces deux segments.

« Il a une longueur plus grande que » : Quand on superpose les deux segments en faisant coïncider l'une des extrémités, la deuxième extrémité se trouve en dehors du segment.

Sans mesurer, on peut comparer mentalement (si les longueurs sont assez grandes) ou en utilisant un objet intermédiaire.

B. La longueur d'une ligne brisée, courbe ouverte ou fermée

Variables : l'objet est déployable (fil de fer), non déployable (on utilise les segments intermédiaires puis on aligne bout à bout les longueurs). La ligne courbe doit être dépliable.

C. Comparer des angles

Deux angles sont égaux si on peut superposer simultanément leurs sommets et leurs côtés. Un angle est plus petit qu'un autre si, quand on les superpose, l'angle se retrouve inclut dans l'autre angle.

II. Aire d'une surface

Si S et S' sont deux surfaces, S=S' quand on peut transformer S par découpage, déplacement, … pour qu'elle se superpose sur S'. S' est plus grande que S quand la surface de S est inclue dans la surface de S'.

Les méthodes : Comparaison directe (superposer), par comparaison à l'aide de transformation (découpage, recollement).

Les surfaces délimitées par des lignes courbes sont plus difficiles à comparer, on peut utiliser un quadrillage en comptant le nombre de carreaux intérieurs et le nombre de carreaux que la ligne courbe chevauche pour obtenir un ordre de grandeur. Pour les surfaces qui ne sont pas superposables, il faut utiliser une surface intermédiaire.

III. La masse d'un objet

Deux objets ont la même masse si, quand on les place sur deux plateaux d'une balance, la balance reste en parfait équilibre.

IV. Le volume (contenance) d'un solide

Deux solides S et S' ont le même volume si, quand on les plonge dans une même quantité d'eau, la hauteur de l'eau monte de la même façon ou s'il faut la même quantité d'eau pour remplir S et S'.

La grandeur d'un objet est définie par une relation d'égalité qui permet d'établir que deux objets ont la même grandeur ou par une relation d'inégalité. Pour un même objet, on peut définir plusieurs grandeurs (on peut calculer la longueur mais aussi la masse d'une baquette de bois). On peut définir une grandeur sans avoir recours aux nombres mais ces méthodes sont souvent difficiles à mettre en œuvre.

La mesure d'une grandeur d'un objet est le nombre d'unités permettant de réaliser une grandeur égale à celle de l'objet. La mesure est un nombre et dépend de l'unité choisie mais la grandeur est invariante. Dans certains cas, on encadre simplement la mesure d'un objet.

Pour chaque grandeur, on a créé un système d'unités de mesure en rapport avec le système de numération décimale. Par exemple, un décamètre est une dizaine de mètre, un kilomètre est un millier de mètres, …

Pour mesurer des longueurs de segments, on prend un segment auquel on attribue 1 comme mesure de sa longueur, on l'appelle « segment-unité » puis on le reporte sur le segment à mesurer.

Le système métrique s'est imposé depuis 1790 en France dans un souci d'unicité des mesures. Avant, certaines unités de mesure faisaient référence au corps humain.

Procédures pour mesurer des longueurs d'objets :

- Reporter la longueur-unité et compter le nombre de reports.

- Utiliser un instrument.

- Réaliser un calcul.

Pour mesurer l'aire d'une surface, on choisit comme unité d'aire une surface donnée. La mesure d'une aire est alors le nombre d'unités nécessaires pour recouvrir entièrement et sans chevauchement la surface en question. On mesure l'aire soit grâce au quadrillage, soit par le calcul en appliquant des formules.

Pour mesurer une masse, on est obligé de prendre un objet intermédiaire (balance) car les objets ne sont pas superposables.

Pour mesurer des volumes, on choisit comme unité un solide.

Les durées : Se repérer dans le temps par rapport à des événements familiers et évaluer des durées.

Les activités de grandeurs et mesure font intervenir aussi bien des notions géométriques que des notions numériques.

L'élève doit apprendre à **faire la différence entre un objet réel, la grandeur associée à cet objet et la mesure de cette grandeur.** Dès la maternelle, les élèves doivent comparer des objets du point de vue de leur longueur et de leur masse avant d'aborder les mesures de longueur et de masse au CP.

L'élève doit **donner du sens à ses mesures** : On travaille d'abord sur la grandeur, puis sur la mesure à l'aide d'une unité (report d'un gabarit), puis sur la mesure en utilisant le calcul. Cette progression permet à l'élève d'interpréter ses calculs.

L'élève doit **savoir comparer des longueurs d'objets sans instruments de mesure**. Il peut procéder à vue d'œil, utiliser un objet intermédiaire transportable, reporter la longueur du 1er sur le $2^{ème}$ avec un compas, … Il réside des problèmes pour les élèves non conservants et ceux qui ont des difficultés dans la manipulation d'objets.

L'élève doit **savoir comparer des longueurs de lignes brisées et des périmètres**. S'il dispose d'un compas, il doit reporter sur une demi-droite les longueurs des segments qui constituent la ligne brisée. S'il dispose d'objets intermédiaires, il les superpose sur chacun des segments de la ligne brisée.

Parfois, l'élève ne voit pas le lien entre le compas et la comparaison des longueurs car, pour lui, le compas permet seulement de tracer des cercles. L'élève applique des théorèmes en acte : « La ligne brisée la plus longue est celle qui contient le plus de segments.

L'élève doit **savoir comparer des longueurs de lignes courbes et des périmètres avec un gabarit**. Si le gabarit est assez long, il peut l'utiliser directement. Sinon, il faut le reporter autant de fois que nécessaire. La conservation des longueurs est longue à mettre en place dans l'esprit des élèves.

L'élève doit **savoir mesurer des longueurs d'objets rectilignes avec le double-décimètre**. Si la longueur totale de l'objet est inférieure à la longueur du décimètre, l'élève l'utilise directement. Si la longueur est un nombre décimal, l'extrémité du segment tombera entre deux graduations. Si la longueur est un nombre supérieur à la longueur de la règle, l'élève doit reporter le double-décimètre.

Difficultés : L'élève place l'extrémité de l'objet sur le début de la règle (induit par l'utilisation antérieure de gabarits) alors que le 0 est plus loin sur le double-décimètre. L'élève n'arrive pas à donner un résultat lorsque la mesure ne correspond pas à un nombre entier de cm. Pour les reports, en raison de la surcharge cognitive, l'élève peut oublier d'ajouter les longueurs obtenues par les reports successifs ou faire une erreur de calcul. De plus, difficulté de manipulation.

L'élève doit **savoir mesurer la longueur d'une ligne brisée ou le périmètre d'une figure avec un double-décimètre**. Il mesure les longueurs de chacun des segments puis additionne ces longueurs. Les difficultés viennent du fait que l'élève ne perçoit pas le lien entre l'addition des mesures des longueurs et la longueur totale de la ligne brisée. L'élève peut avoir des difficultés à additionner des nombres décimaux. Plus il y a de segments et plus il est facile de se tromper dans le calcul.

L'élève doit **savoir mesurer le périmètre d'un polygone par le calcul**. Les variables viennent de la nature du polygone. Si le polygone est un carré, un rectangle ou un polygone régulier, l'élève peut appliquer une formule ou un raisonnement. Il peut se tromper dans la mémorisation de la formule et confondre la formule de l'aire du rectangle ou du carré.

L'élève doit **savoir mesurer le périmètre d'un cercle**, soit en utilisant un objet intermédiaire dépliable, soit en utilisant une formule.

L'élève doit **savoir comparer et mesurer des distances**.

L'élève doit **savoir effectuer des conversions d'unités de longueur**. Si l'unité de départ est familière, alors il utilise la multiplication ou la division par 10. Si l'unité n'est pas bien connue de l'élève, il peut utiliser un tableau de conversion. Les erreurs viennent d'une mauvaise mémorisation de l'ordre des unités, d'une méconnaissance des relations entre les différentes unités et, si le nombre de départ est un nombre décimal, il y aura des erreurs de calcul et d'écriture.

L'élève doit **savoir comparer et mesurer des aires de surfaces données**. Si les aires sont très différentes, l'élève effectuera la comparaison à vue d'œil, mais il ne faut pas qu'il assimile l'aire à l'encombrement. Si les surfaces sont faciles à inclure dans une autre, alors l'élève peut déplacer ces figures mentalement ou physiquement. L'élève est tenté de fermer les figures concaves pour comparer leurs aires. Si l'élève décide de découper puis de coller les aires dans une autre aire, difficulté à anticiper les tracés et les découpages. Si les surfaces ne peuvent pas être inclues dans une autre surface et qu'elles sont des figures usuelles, l'élève calcule les aires en appliquant des formules puis compare les nombres obtenus. Si ces surfaces sont composées de plusieurs figures usuelles, il calcule l'aire de chaque figure puis additionne. Si la figure ne peut pas se décomposer en figures usuelles, l'élève s'aidera du quadrillage. Mais difficulté à tracer le quadrillage et difficulté à dénombrer les carreaux si les segments de la figure ne sont pas sur le quadrillage.

Les difficultés : Les élèves pensent que « De deux aires, la plus grande est celle qui a le plus grand périmètre ». Cela est souvent le cas dans la vie de tous les jours : le prix des oranges varie dans le même sens que leur masse.

L'élève doit **savoir effectuer des conversions d'unités d'aires**. Si l'unité du nombre de départ et du nombre d'arrivée sont voisines, il utilisera la multiplication ou la division par 100. Sinon, tableau de conversion. L'élève peut utiliser les techniques de conversion qu'il connaît et dire que $2.5m^2=25dm^2$. Il peut avoir des difficultés à mémoriser l'ordre des unités, dans les calculs de décimaux ou pour placer les nombres et la virgule des nombres dans le tableau (2 colonnes par unité).

L'élève doit **savoir comparer des masses sans recours à des mesures**. Il peut soupeser les masses ou utiliser une balance.

L'élève doit **savoir mesurer la masse d'objets à l'aide d'une balance** (balance avec des poids ou balance de ménage).

L'élève doit **savoir effectuer des conversions d'unités de masse**.

L'élève doit **savoir résoudre des problèmes avec des unités de masse**.

L'élève doit **savoir comparer des capacités/volumes sans recours à des mesures**, avec la perception à vue d'œil, le transvasement ou comparer les masses des solides. Les élèves se focalisent sur l'une des dimensions de l'objet. Ainsi, ils pensent qu'un objet plus haut mais moins large aura une plus grande capacité qu'un objet moins haut mais beaucoup plus large.

L'élève doit **savoir mesurer la capacité d'un récipient en utilisant un liquide et un verre gradué**. Les résultats seront présentés sous forme complexe ou avec des nombres décimaux : 1.25L.

L'élève doit **savoir mesurer le volume en le remplissant avec un volume unité**. Comme un pavé droit rempli avec des cubes identiques.

L'élève doit **savoir calculer le volume d'un pavé droit en utilisant une formule**. (Seule formule de l'école).

L'élève doit **savoir effectuer des conversions d'unités de contenances**.

La notion de durée est très abstraite pour les élèves. Ils doivent faire la distinction entre l'horaire et la durée.

L'élève doit **savoir lire l'heure en heures et minutes à partir d'un affichage à aiguilles**. Cela donne du sens à l'égalité : 1h=60min.

L'élève doit **savoir convertir des unités de durée**.

L'élève doit **savoir résoudre des problèmes liant horaires et durées**. Exemple : on donne l'heure du début d'un événement et sa durée, puis une demande l'heure de la fin.

« Je pars à 8h45 et j'arrive à 10h30. Quelle a été la durée de mon trajet ? ».

Procédures : Calcul de proche en proche (schéma de 15 en 15 minutes), calcul par soustraction (mais les élèves traitent les heures comme des nombres décimaux).

L'élève doit **savoir résoudre des problèmes utilisant des calculs sur les durées**.

L'élève doit **savoir comparer des angles sans avoir recours à leur mesure**. La mesure des angles n'est pas au programme de l'école primaire. On utilise donc du papier calque ou un gabarit. Les élèves doivent isoler les angles de la figure. Ils doivent **savoir reproduire un angle** (avec gabarit par exemple).

Les objectifs et compétences :

Premier apprentissage des nombres

- Comparer deux collections dessinées.
- Modifier une collection pour la rendre équipotente à une collection donnée.
-Enumérer simultanément deux collections : pointage et association des objets.
- Savoir que « un de plus » correspond à « juste après » et « un de moins » correspond à « juste avant ».
- Dénombrer par reconnaissance immédiate (subitizing) ou dénombrer un à un.
- Identifier les écritures chiffrées.
- Lire les nombres écrits en chiffres (jusqu'à 10).
- Vérifier, à l'aide de la comptine numérique, si les nombres sont consécutifs ou non.

Addition et soustraction :

- Savoir ajouter un nombre entier à un nombre décimal.
- Savoir utiliser ou élaborer une procédure pour soustraire un nombre proche d'une dizaine entière.

Compétences transversales :

- S'avoir s'organiser.
- Comprendre une consigne.
- Organiser les étapes de la résolution.
- Apprendre à résoudre un problème par tâtonnement, essais.
- Faire l'inventaire de toutes les solutions possibles.
- Maîtriser un langage spécifique.